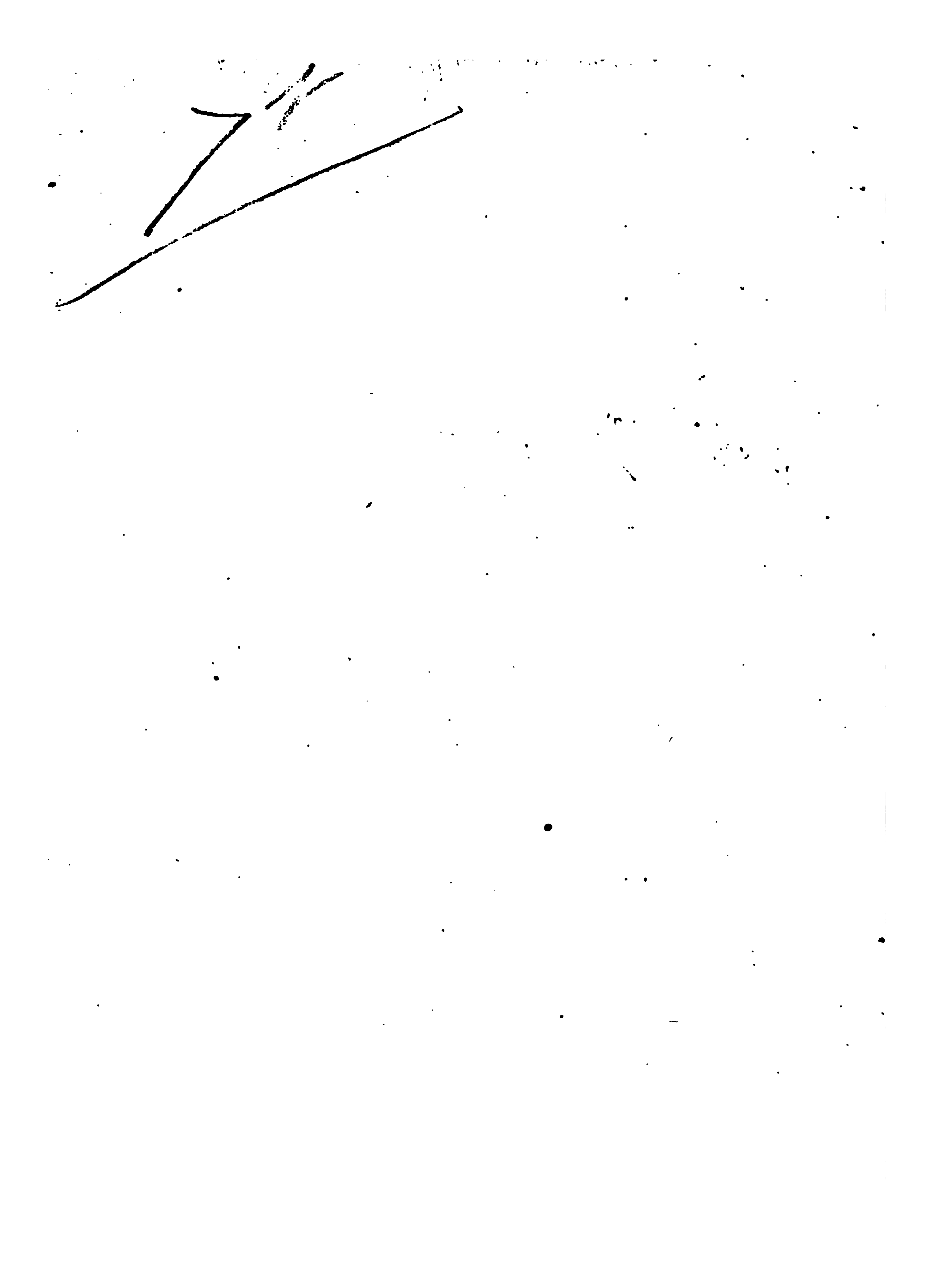



1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR



# TRAITÉ
## ANALYTIQUE
## DES
# SECTIONS CONIQUES
## ET DE LEUR USAGE
## POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS
dans les Problêmes tant déterminez qu'indéterminez.

*OUVRAGE POSTHUME*

*De M.* LE MARQUIS DE L'HOSPITAL, *Academicien Honoraire de l'Academie Royale des Sciences.*

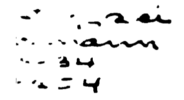


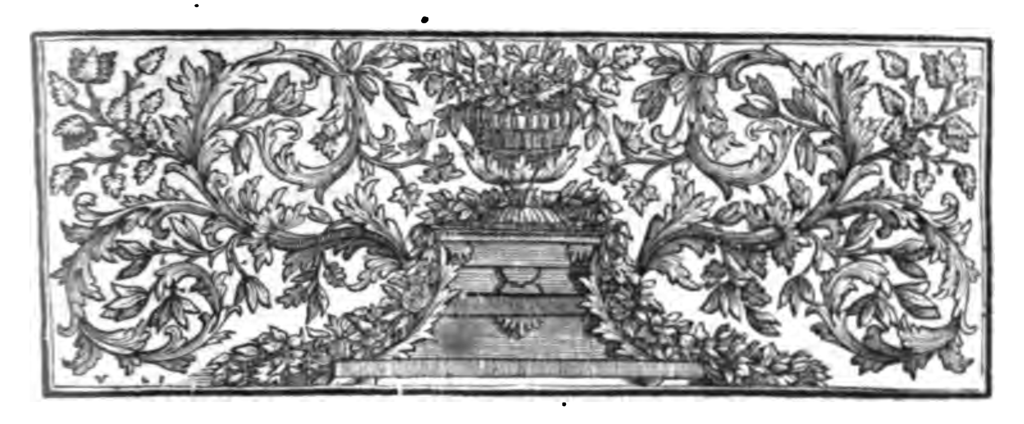
A PARIS,

Chez { La Veuve de JEAN BOUDOT, Imprimeur Ordinaire du Roi, & de l'Academie Roïale des Sciences ; ET JEAN BOUDOT Fils, Imprimeur Ordinaire du Roy & de l'Academie Roïale des Sciences, ruë S. Jacques, au Soleil d'Or, prés S. Severin.

M. DCCVII.

*AVEC PRIVILEGE DU ROI.*





# AVERTISSEMENT DU LIBRAIRE.

*L'Illustre & sçavant Auteur de cet Ouvrage étoit sur le point de le donner au Public, lorsqu'il mourut âgé seulement de quarante-trois ans: ce fut au commencement de 1704. Le Manuscrit en étoit sans Préface que ce seul Auteur pouvoit bien faire : c'est pour cela qu'il ne s'en trouve point ici. Mais le titre suffira sans doute aux Connoisseurs, pour voir de quelle consequence en Géometrie est la matiere de ce Livre, & la grande réputation de M. le Marquis de l'Hôpital en ce genre, répond aussi assez, ce me semble, de l'habileté avec laquelle j'ai appris que cette matiere y est traitée. C'est ce qui m'a déterminé à imprimer ce Manuscrit tel qu'il étoit, sans autre soin que de faire ensorte qu'il le fût le*

*plus correctement qu'il me seroit possible, en cherchant quelque habile Géometre, qui voulût bien veiller à l'impression. C'est aussi ce que la consideration des Sçavans pour l'Auteur, & l'estime pour l'Ouvrage que plusieurs avoient déja vû en Manuscrit, m'ont fait heureusement trouver: estime déja tellement répanduë, que les empressemens d'un trés-grand nombre de Mathematiciens pour cet Ouvrage, qui pendant le cours de l'impression venoient me le demander avec une espece d'impatience de le voir, sur tout les jeunes Geometres, qui sur ce qu'ils en avoient entendu, le regardoient comme devant leur faciliter l'entrée à la sublime* Analyse des Infiniment petits *de l'Auteur, m'ont forcé en quelque façon de le donner sans la Préface que je pensois pourtant à y faire faire, me disant qu'ils aimoient mieux s'en passer, que d'attendre plus long-temps que la maladie d'un des deux Géometres qui ont bien voulu revoir les Epreuves de cet Ouvrage, ou les affaires de l'autre, permissent à un d'eux de la faire. Ces empressemens, les soins de ces deux Meßieurs, & les miens, me font esperer que le Lecteur sera content & du fond de l'Ouvrage, & de la maniere correcte dont il est imprimé. C'est tout ce qu'en peut dire un homme de ma proseßion: les Geometres en jugeront.*

# TABLE.



FIN.



# TRAITÉ ANALYTIQUE
## DES SECTIONS CONIQUES,

*Et de leur usage pour la Résolution des Equations dans les Problêmes tant déterminés qu'indéterminés.*

## LIVRE PREMIER.

### *De la Parabole.*

### DÉFINITIONS.

I.

AYANT placé sur un plan une Régle *BC*, & une E'querre *GDO*, en sorte que l'un de ses côtés *DG* soit couché le long de cette régle, on prendra un fil *FMO* égal en longueur à l'autre côté *DO* de cette équerre, duquel l'on attachera un bout à l'extrêmité *O* de ce côté *DO*, & l'autre bout en un point quelconque *F* pris sur ce plan du même côté de l'équerre par rapport à la régle. Maintenant FIG. 1.

si l'on fait glisser le côté *DG* de l'équerre le long de la régle *BC*, & qu'en même tems l'on se serve d'un style *M* pour tenir toûjours le fil tendu, & sa partie *MO* toute jointe & comme collée contre le côté *OD* de l'équerre ; la courbe *AMX* que le style *M* décrit dans ce mouvement, est une portion de Parabole.

Si l'on renverse l'équerre de l'autre côté du point fixe *F*, on décrira en la même façon l'autre portion *AMZ* de la même Parabole ; de sorte que la ligne *XAZ* ne fera qu'une même courbe qu'on appelle *Parabole*.

2.

La ligne *BC* dans laquelle le bord inferieur de la régle immobile *BC* touche le plan & le côté *DG* de l'équerre *GDO*, est appellée *Diréctrice*.

3.

Le point fixe *F* du plan, est nommé le *Foyer* de la Parabole.

4.

Si l'on méne du point fixe *F*, sur la directrice *BC* une perpendiculaire *FE* qui rencontre la parabole au point *A* ; la ligne *AF* indéfiniment prolongée du côté de *F*, est appellée l'*Axe* de la parabole.

5.

La ligne *p* quadruple de *AF*, est appellée *Parametre* de l'axe.

6.

Toutes les lignes comme *MP* menées des points de la parabole perpendiculairement à l'axe, sont appellées *Ordonnées* à l'axe.

7.

Toutes les lignes comme *MO* menées des points de la parabole parallelement à l'axe, en sont les *Diametres*.

8.

Une ligne droite qui ne rencontre la parabole qu'en un point, & qui étant continuée de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appellée *Tangente* en ce point.

## COROLLAIRE I.

1. Il suit de la définition de la Parabole, que si l'on tire par un de ses points quelconques *M* au foyer *F* une ligne droite *MF*, & sur la diréctrice *BC* une perpendiculaire *MD*; les droites *MF*, *MD*, seront toûjours égales entre elles. Car si l'on retranche du côté *OD* de l'équerre & du fil *OMF* qui * lui est égal, la partie commune *OM*, il est visible que les parties restantes *MD*, *MF*, seront toûjours égales entre elles. * Déf. 1.

## COROLLAIRE II.

2. De-là il est évident, que si l'on méne une ligne droite quelconque *KK* parallele à la diréctrice *BC*, & que d'un point quelconque *M* de la parabole, on tire sur cette ligne la perpendiculaire *MK*, & au foyer la droite *MF*; la difference ou la somme *KD* des deux droites *MF*, *MK*, sera toûjours la même: savoir la difference lorsque le point *M* tombe au dessous de *KK*, & la somme lorsqu'il tombe au dessus.

## COROLLAIRE III.

3. Il est évident que *FE* est divisée en deux parties égales par la parabole au point *A*. Car supposant que le point *M* tombe au point *A*, la ligne *MF* tombe sur *AF*, & la ligne *MD* sur *AE*, qui seront par conséquent égales entre elles; puisque *MF* est toûjours * égale à *MD*, en quelque endroit de la parabole que tombe le point *M*. * Art. 1.

## COROLLAIRE IV.

4. De-là on voit comment on peut décrire une parabole *XAZ*, l'axe *AP* dont le point *A* est l'origine étant donné, avec son parametre *p*. Car ayant pris sur l'axe *AP* de part & d'autre du point *A* les parties *AF*, *AE* égales chacune au quart de son parametre *p*, & mené par le point *E* la perpendiculaire indéfinie *BC* sur *FE*; si l'on couche le bord inferieur d'une régle sur cette ligne

*BC* qui sert de diréctrice, & que par le moyen d'une équerre *ODG*, & d'un fil *FMO* égal au côté *OD*, & attaché par l'un de ses bouts au foyer *F*, & par l'autre bout à l'extrémité *O* de ce même côté, l'on décrive une Parabole *XAZ* comme l'on a enseigné dans la définition premiére, il est visible qu'elle sera celle qu'on demande.

* Déf. 1. Il n'est pas moins visible que plus le côté *OD* de l'équerre & le fil *OMF* (qui* lui doit être égal) sera long, plus aussi la portion de la parabole qu'on décrira sera grande; de sorte qu'on la peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également le côté *OD* de l'équerre & le fil *OMF*.

## COROLLAIRE V.

5. Si d'un point quelconque *M* de la Parabole l'on méne une ordonnée *MP* à l'axe, & au foyer *F* la droite *MF*; il est clair que cette ligne $MF = AP + AF$,

* Art. 3. puisque $MF = MD = AP + AE$, & que* $AF = AE$.

## PROPOSITION I.

### Theorême.

FIG. 1. 6. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* MP *à l'axe* AP, *est égal au rectangle du parametre* p, *par la partie* AP *de l'axe prise entre son origine* A *&* *la rencontre* P *de l'ordonnée.*

*Il faut prouver que* $\overline{MP}^2 = p \times AP$.

* Art. 5. Ayant nommé la donnée *AF*, *m*; & les indéterminées *AP*, *x*; *PM*, *y*; on aura $MF =$ * $m + x$, & $PF = x - m$ ou $m - x$, selon que le point *p* se trouve au dessous ou au dessus du foyer *F*. Or le triangle rectangle *MPF* donne en l'un & l'autre cas $\overline{MF}^2$ $(mm + 2mx + xx) = \overline{MP}^2$ $(yy) + \overline{PF}^2$ $(mm - 2mx + xx)$; d'où l'on tire $4mx = yy$. Donc puisque selon la 5[e] définition $p = 4m$, on aura aussi $yy = px$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## COROLLAIRE PREMIER ET FONDAMENTAL.

7. Il eſt donc évident que ſi l'on nomme $p$ le parametre de l'axe $AP$; chacune de ſes parties $AP$, $x$; & chacune de ſes ordonnées correſpondantes $PM$, $y$; on aura toûjours $yy = px$. Or comme cette proprieté convient à tous les points de la parabole, & en détermine la poſition par rapport à ſon axe $AP$; il s'enſuit que l'équation $yy = px$ exprime parfaitement la nature de la parabole par rapport à ſon axe. Fig. 2.

## COROLLAIRE II.

8. Si l'on méne deux ordonnées quelconques $MP$, $NQ$ à l'axe $AP$, leurs quarrés ſeront entr'eux comme les parties $AP$ & $AQ$ de l'axe, priſes entre ſon origine $A$ & les rencontres $P$ & $Q$ de ces mêmes ordonnées. Car* $\overline{PM}^2 . \overline{QN}^2 :: p \times AP . p \times AQ :: AP . AQ$. Fig. 2.

* Art. 6. 7.

## COROLLAIRE III.

9. Si l'on méne par un point quelconque $P$ de l'axe $AP$ une parallele $MPM$ à ſes ordonnées; elle rencontrera la parabole en deux points $M$ & $M$ également éloignés de part & d'autre du point $P$, & non en davantage. Car afin que les points $M$ & $M$ ſoient à la parabole, il faut * que les quarrés de chaque $PM$ ($y$) priſe de part & d'autre du point $P$, ſoient égaux chacun au même rectangle $px$.

* Art. 7.

## COROLLAIRE IV.

10. Il ſuit de ce que* $yy = px$, que plus $AP$ ($x$) eſt grande, plus auſſi l'ordonnée $PM$ ($y$) priſe de part & d'autre de l'axe $AP$ augmente, & cela à l'infini; & qu'au contraire plus $AP$ ($x$) diminuë, plus auſſi l'ordonnée $PM$ ($y$) devient petite: de ſorte que $AP$ ($x$) étant nulle ou zero, chaque $PM$ ($y$) priſe de part & d'autre de l'axe $AP$ devient auſſi nulle; c'eſt-à-dire que le point $P$ tombant en $A$, les deux points de rencontre $M$ & $M$ ſe réu-

* Art. 7.

nissent en ce point. D'où il est clair.

1°. Que si l'on méne par l'origine *A* de l'axe une ligne *LL* parallele à ses ordonnées, elle sera tangente en *A*.

2°. Que la Parabole s'éloigne de part & d'autre de plus en plus à l'infini de son axe *AP* à commencer par son origine *A*; & qu'ainsi toute parallele comme *LM* à l'axe *AP*, ne rencontre la Parabole qu'en un seul point *M*, & passe au dedans, puisque sa distance de l'axe demeure partout la même.

## COROLLAIRE V.

11. Si d'un point quelconque *M* de la Parabole l'on tire une parallele *ML* à l'axe *AP*, laquelle rencontre en *L* la parallele *AL* à ses ordonnées; il est clair en ménant l'ordonnée *MP*, que $AL = PM (y)$, & que $ML = AP$

* Art. 7. $(x) = \frac{yy}{p}$, puisque * $px = yy$. D'où il suit que les droites $ML \left(\frac{yy}{p}\right)$, $ML \left(\frac{yy}{p}\right)$ prises de part & d'autre de l'axe *AP* sont égales entr'elles, lorsque les points *L*, *L* sont également éloignés du point *A*; & partant que si une ligne quelconque *MM* terminée par la parabole est coupée en deux parties égales par l'axe en *P*, elle sera parallele à la ligne *LL*, c'est à dire qu'elle sera ordonnée de part & d'autre à l'axe. Car ayant mené les paralleles *ML*, *ML* à l'axe *AP*, il est évident que *LL* sera divisée par le milieu en *A*, puisque *MM* l'est en *P*. Les droites *ML*, *ML*, seront donc égales entr'elles comme on vient de le prouver; & par conséquent la ligne *MM* sera parallele à *LL*.

## COROLLAIRE VI.

12. Il suit de ce que toutes les perpendiculaires *MPM* à l'axe *AP*, terminées de part & d'autre par la parabole, sont* coupées par le milieu en *P*; que l'axe divise

* Art. 9. la parabole en deux portions entierement égales & semblablement posées de part & d'autre. Car si le plan sur lequel elle est tracée, étoit plié le long de l'axe ensorte

que les deux parties ſe joigniſſent, il eſt viſible que les deux portions de la parabole tomberoient exactement l'une ſur l'autre.

## PROPOSITION II.

### Theorême.

13. *Si l'on mene par l'origine* A *de l'axe* AP *une ligne droite quelconque* AM *dans l'un ou l'autre des angles* PAL, PAL, *faits par l'axe* AP *& par la ligne* LL *parallele à ſes ordonnées ; je dis qu'elle ira rencontrer la parabole* MAM *en un autre point* M. FIG. 3.

Ayant pris ſur $AL$ de part ou d'autre du point $A$ la partie $AG$ égale au parametre $p$ de l'axe, & tiré $GF$ parallele à l'axe $AP$, & qui rencontre la ligne $AM$ (prolongée s'il eſt neceſſaire) au point $F$; on prendra ſur la ligne $AL$ du même côté où tombe la ligne $AM$ par rapport à l'axe $AP$, la partie $AL$ égale $GF$; & ayant tiré $LM$ parallele à l'axe, je dis que le point $M$ où cette ligne rencontre la droite $AM$, ſera à la parabole $MAM$.

Car menant $MP$ parallele à $AL$, les triangles ſemblables $FGA$, $APM$, donneront $FG$ ou $AL$ ou $PM . GA :: AP . PM$. Et partant $\overline{PM}^2 = GA\,(p) \times PA$. La ligne $PM$ ſera donc * une ordonnée à l'axe $AP$. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 7.

### COROLLAIRE I.

14. De là on voit comment l'axe $AP$ d'une parabole $MAM$ étant donné avec ſon parametre $p$, & ayant mené par l'origine $A$ de l'axe dans l'un ou l'autre des angles $PAL$, $PAL$, faits par l'axe $AP$ & par la ligne $LL$ parallele à ſes ordonnées, une ligne droite quelconque $AM$ ; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver ſur cette ligne le point $M$ où elle rencontre la parabole $MAM$.

## COROLLAIRE II.

* Art. 10. 13.

15. Il eſt évident * qu'il n'y a que la ligne *LAL* parallele aux ordonnées à l'axe *AP*, qui puiſſe être tangente de la parabole *MAM* au point *A* origine de l'axe ; puiſqu'il n'y a que cette ſeule ligne qui paſſant par le point *A*, & étant continuée de part & d'autre, ne rencontre la parabole en aucun autre point, & n'entre pas dedans.

## DÉFINITIONS.

9.

Fig. 4. & 5. Si l'on mene par un point quelconque *M* de la parabole un diametre *MO*, une ordonnée *MP* à l'axe *AP*, & une ligne droite *MT* qui coupe ſur l'axe *AP* prolongé au delà de ſon origine *A*, la partie *AT* égale à *AP* ; toutes les lignes droites, comme *NO*, menées des points de la parabole parallelement à *MT*, & terminées par le diametre *MO*, ſont appellées *Ordonnées* à ce diametre.

10.

Si l'on prend la ligne $q$ troiſiéme proportionnelle à *AT*, *MT* ; cette ligne $q$ ſera nommée le *Parametre* du diametre *MO*.

## COROLLAIRE I.

16. Si l'on nomme l'indéterminée *AP* ou *AT*, $x$ ; il eſt clair que $\overline{MT}^2 = qx$, puiſque $AT\,(x).\ MT :: MT.\ q$.

## COROLLAIRE II.

* Art. 7.

17. A Cauſe du triangle réctangle *MPT*, le quarré $\overline{MT}^2\ (qx) = \overline{PT}^2\ (4xx) + \overline{MP}^2$ * $(px)$ ; d'où, en diviſant par $x$, l'on tire $q = 4x + p$.

C'eſt à dire que le parametre $q$ d'un diametre quelconque *MO*, ſurpaſſe le parametre $p$ de l'axe du quadruple de *AP* $(x)$.

## COROLLAIRE III.

* Art. 5.

18. Si l'on tire du point *M* au foyer *F* la droite *MF*, on aura $MF$ * $= AP + AF$. Or ſelon la définition 5e. le

le parametre de l'axe étant $p = 4AF$, le parametre du diametre $MO$ sera * $q = 4AP + 4AF$. Donc le parametre $q$ d'un diametre quelconque $MO$, vaut quatre fois la ligne $MF$ tirée de son origine $M$ au foyer $F$. * Art. 17.

## PROPOSITION III.

### Theorême.

19. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* ON *au diametre* MO, *est égal au rectangle du parametre* q, *par la partie* MO *de ce diametre, prise entre son origine* M *& la rencontre* O *de l'ordonnée.* Fig. 4. 5.

*Il faut prouver que* $\overline{ON}^2 = q \times MO$.

Ayant mené l'ordonnée $NQ$ à l'axe $AP$, laquelle rencontre le diametre $MO$ au point $R$, & tiré $OH$ parallele à $MP$, on nommera les données $AP$ ou $AT$, $x$; $PM$ ou $RQ$, $y$; & les indéterminées $OR$ ou $HQ$, $a$; $MO$ ou $PH$, $b$; les triangles semblables $TPM$, $ORN$, donneront cette proportion $TP\ (2x).\ PM\ (y) :: OR\ (a).\ RN = \frac{ay}{2x}$. Cela posé.

Puisque (*fig.* 4.) $NQ = RQ\,(y) - RN\left(\frac{ay}{2x}\right)$, ou $RN\left(\frac{ay}{2x}\right) - RQ\,(y)$, & $AQ = AH\,(x + b) - HQ\,(a)$, lorsque le point $N$ tombe du côté de l'axe $AP$ par rapport au diametre $MO$; & qu'au contraire (*fig.* 5.) $NQ = RQ\ (y) + RN\left(\frac{ay}{2x}\right)$, & $AQ = AH\ (x + b) + HQ\ (a)$, lorsqu'il tombe du côté opposé: on aura $\overline{QN}^2 = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$, & $AQ = x + b \pm a$, sçavoir $-$ dans le premier cas, & $+$ dans le second. Or * $AP\ (x).\ AQ\ (x + b \pm a) :: \overline{PM}^2\ (yy).\ \overline{QN}^2 = yy + \frac{byy}{x} \pm \frac{ayy}{x}$. On formera donc en comparant ensemble ces * Art. 8.

deux valeurs de $\overline{QN}^2$, l'égalité $yy + \frac{byy}{x} \pm \frac{ayy}{x} = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$; d'où en effaçant de part & d'autre $yy \pm \frac{ayy}{x}$, divisant par $yy$, & multipliant par $4xx$, l'on tirera $\overline{OR}^2$ $(aa) = 4bx$. Mais les triangles semblables $MPT$, $NRO$, donnent $\overline{PT}^2 (4xx) . \overline{OR}^2 (4bx) :: \overline{MT}^2$ * $(qx) . \overline{ON}^2 = bq = q \times MO (b)$. *Ce qu'il falloit &c.*

* *Art.* 16.

## COROLLAIRE GENERAL.

20. Il est visible que ce qu'on a démontré dans la proposition premiere par rapport à l'axe $AP$, à ses ordonnées $PM$, & à son parametre $p$, s'étend par le moyen de cette derniere proposition à un diametre quelconque $MO$, à ses ordonnées $ON$, & à son parametre $q$. Or comme les articles 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 & 15. se tirent de la premiere proposition, & subsistent également, soit que les angles $APM$ soient droits, ou bien qu'ils ne le soient pas; il s'ensuit que si l'on imagine dans ces articles que la ligne $AP$, au lieu d'être l'axe, soit un diametre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites $PM$, $QN$, & pour parametre la ligne $p$, ils seront encore vrais dans cette supposition; car leur démonstration demeurera la même, & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant partout où se trouve le mot d'axe, celui de diametre.

## COROLLAIRE II.

FIG. 4. & 5.

21. Comme les articles 10 & 15 subsistent avec la même force, lorsque la ligne $AP$ au lieu d'être l'axe, est un diametre quelconque, tel que $MO$; il s'ensuit que la ligne $MT$ parallele aux ordonnées $ON$ à ce diametre, est tangente en $M$, & qu'il n'y a que cette seule ligne qui puisse toucher la parabole en ce point.

D'où l'on voit que d'un point donné sur une parabole, on ne peut mener qu'une seule tangente.

## COROLLAIRE III.

22. DE-LA il est évident selon la définition 9. que si l'on mene par un point quelconque *M* d'une parabole, une ordonnée *MP* à l'axe *AP*, & une ligne droite *MT* qui coupe sur l'axe prolongé du côté de son origine *A*, la partie *AT* égale à *AP*; cette ligne *MT* sera tangente en *M*. Et réciproquement que si la ligne *MT* est tangente en *M*, & qu'on mene l'ordonnée *MP* à l'axe; les parties *AT*, *AP*, de l'axe seront égales entr'elles.

## COROLLAIRE IV.

23. SI l'on imagine dans les définitions 9 & 10, & dans la derniere proposition, que la ligne *AP* au lieu d'être l'axe, soit un diametre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites *PM*, *QN*; on verra que cette proposition sera encore vraye, puisqu'elle se démontrera de la même maniere qu'auparavant, comme il est évident par la seule inspection de la fig. 6. où les triangles semblables donnent les mêmes proportions que dans le cas de l'axe. FIG. 6.

D'où il suit 1°. Que le Corollaire précedent doit encore avoir lieu, lorsque la ligne *AP* au lieu d'être l'axe, est un diamétre quelconque. 2°. Que le diametre *MO* peut être l'axe dans cette supposition; & qu'ainsi on peut regarder l'axe comme un diametre qui fait avec ses ordonnées des angles droits.

## PROPOSITION IV.

### Theorême.

24. SI *par un point quelconque* M *d'une parabole, l'on mene une ordonnée* MP *à l'axe, & une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT *qui passe par le point* M; *je dis que la partie* PG *de l'axe sera toûjours égale à la moitié de son parametre* p. FIG. 7.

*Il faut prouver que* $PG = \frac{1}{2}p$.

Car à cause des angles droits $TPM$, $TMG$, on aura $TP\,(2x)$. $PM\,(y)$ :: $PM\,(y)$. $PG = \frac{yy}{2x} = \frac{1}{2}p$, en mettant à la place de $yy$ sa valeur * $px$.

* Art. 7.

## PROPOSITION V.

### Theorême.

Fig. 7.

25. Si *par un point quelconque* M *d'une parabole, l'on mene au foyer* F *la droite* MF, *un diametre* MO, *& une tangente* TMS; *les angles* FMT, OMS, *faits par la tangente* TMS *d'un côté avec la droite* MF, *& de l'autre avec le diametre* MO, *seront égaux entr'eux.*

* Art. 22.
* Art. 5.

Car menant l'axe $AP$ qui rencontre en $T$ la tangente $TMS$, & l'ordonnée $MP$ à l'axe; on aura * $TA + AF$ ou $TF = AP + AF$ ou * $MF$. Le triangle $TFM$ sera donc isoscelle; & par conséquent l'angle $FTM$, ou son égal $OMS$, sera égal à l'angle $FMT$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

### COROLLAIRE.

26. De-là il est clair que la tangente $TMS$ prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant $M$, laisse la parabole toute entiere du côté de son foyer $F$. Et comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la parabole que tombe le point touchant $M$, il s'ensuit que cette ligne courbe est concave dans toute son étenduë autour de son foyer $F$.

## PROPOSITION VI.

### Problême.

Fig. 8. & 9.

27. Un *diametre* AP *avec la tangente* LAL *qui passe par son origine* A, *& son parametre étant donnés; trouver un diametre* BQ *qui fasse de part ou d'autre avec ses ordonnées, un angle égal à l'angle donné* K, *son origine* B, *& son parametre.*

Ayant mené par l'origine *A* du diametre donné la ligne *AE* qui fasse avec ce diametre de part ou d'autre, l'angle *PAE* égal à l'angle donné *K*, & trouvé * sur cette ligne (prolongée de l'autre côté de *A* lorsqu'elle ne tombe point dans l'un ou l'autre des angles *PAL*, *PAL*) le point *M* où elle rencontre la parabole, on menera par le point du milieu *Q* de la ligne *AM*, une parallele *QD* au diametre *AP*, qui rencontre la tangente *AL* au point *D*; & on divisera *QD* par le milieu en *B*. Je dis que la ligne *BQ* est le diametre qu'on cherche, qu'il a pour origine le point *B*, & pour parametre une troisiéme proportionnelle à *BQ*, & *QA*. *Art. 14 & 20.

Car 1°. La ligne *AM* étant divisée en deux parties égales au point *Q* par le diametre *BQ*, elle sera ordonnée * de part & d'autre à ce diametre; & comme les lignes *BQ*, *AP* sont paralleles entr'elles, l'angle *BQA* que fait le diametre *BQ* avec son ordonnée *QA* sera égal à l'angle *PAM* égal à l'angle donné *K* ou à son complement à deux droits. 2°. Le point du milieu *B* de la ligne *QD* sera l'origine * de ce diametre, puisque *AQ* en est une ordonnée. 3°. Le parametre du diametre *BQ* est * la troisiéme proportionnelle à *BQ*, *QA*. *Art. 11 & 20. *Art. 22 & 23. *Art. 19.

Lorsque l'angle donné *K* n'est pas droit, il est clair qu'on peut mener de part & d'autre du diametre *AP* deux differentes lignes *AE* qui fassent avec ce diametre des angles égaux à l'angle donné *K*; & qu'ainsi on pourra toûjours avoir deux solutions differentes, en observant que si l'une des deux lignes *AE* tomboit sur la tangente *AL*, le diametre donné *AP* satisferoit lui-même à la question. Mais lorsque cet angle *K* est droit, comme l'on ne peut mener qu'une seule ligne *AE* qui fasse avec le diametre *AP* un angle droit, il s'ensuit qu'on ne peut avoir alors qu'une solution; & qu'ainsi * le diametre cherché sera l'axe. FIG. 8. FIG. 9. *Art. 23.

Il est à remarquer que les deux diametres *BQ*, *BQ*, qui satisfont au Problême lorsque l'angle donné *K* n'est pas droit, sont semblablement posés de part & d'autre FIG. 10.

de l'axe *AP*, & que leurs parametres sont égaux : ce qui se voit par la construction même, en supposant que le diametre donné *AP* soit l'axe, & en menant deux differentes lignes *AE*, *AE* de part & d'autre. Car les triangles rectangles *ALM*, *ALM*, & *ADQ*, *ADQ* étant visiblement égaux & semblables entr'eux, les lignes *AD*, *AD*; *DQ*, *DQ*; leurs moitiés *BQ*, *BQ*; & les
* Art. 19. ordonnées *QA*, *QA* seront égales entr'elles ; * & par conséquent les parametres le seront aussi.

COROLLAIRE

28. Il est donc évident, 1°. qu'il n'y a qu'un seul diametre qui fasse avec ses ordonnées des angles droits ; & qu'ainsi il ne peut y avoir qu'un seul axe. 2°. Qu'on peut toûjours trouver deux differens diametres, qui fassent avec leurs ordonnées des angles égaux à un angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit ; que ces deux diametres seront semblablement posés de part & d'autre de l'axe, & qu'ils auront des parametres égaux.

## PROPOSITION VII.

### Problême.

29. *Un diametre étant donné avec la tangente qui passe par son origine, & son parametre ; décrire la parabole par un mouvement continu.*

PREMIERE MANIERE.

Si le diametre donné étoit l'axe, on la décriroit selon
FIG. 11. l'article 4e ; mais lorsqu'il ne l'est pas, soit *MO* le diametre donné, & *TMS* la tangente qui passe par son origine *M*. Cela posé.

On prendra sur le diametre *MO* prolongé au delà de son origine *M*, la partie *MD* égale au quart de son parametre ; & on tirera une perpendiculaire indéfinie *DE* à *MD*. On menera *MF* qui fasse avec la tangente *TMS* un angle *FMT* égal à l'angle *OMS* ; & ayant pris *MF* égale à *MD*, on décrira selon la définition

P. 84

premiere, une parabole qui ait pour diréctrice la ligne *DE*, & pour foyer le point *F*. Je dis qu'elle sera celle qu'on demande.

Car, 1°. La ligne *MO* étant perpendiculaire à la diréctrice *DE*, sera parallele à l'axe; & par conséquent un diametre selon la définition 7e. 2°. La ligne *TMS* sera * tangente en *M*. 3°. Le parametre du diamétre *MO* sera * quadruple de *MF*. * *Art.* 25. * *Art.* 18.

SECONDE MANIERE.

Soit *AP* le diametre donné, & *LAL* la tangente qui passe par son origine *A*. Cela posé. FIG. 12.

Ayant pris sur le diametre *AP* prolongé au delà de son origine *A* la partie *AG* égale à son parametre, & mené une droite indéfinie *DGD* qui fasse avec *AG* l'angle *AGD* égal à l'angle *GAL* pris du même côté; on fera mouvoir une ligne droite indéfinie *DM* le long de *GD* toûjours parallelement à *AG*, en entraînant par son extrêmité *D* le côté *DA* de l'angle *DAM* égal à l'angle *GAL*, & mobile par son sommet autour du point fixe *A*. Je dis que l'intersection continuelle *M* de la ligne *DM* & du côté *AM*, décrira dans ce mouvement la parabole qu'on demande.

Car menant *MP* parallele à *AL*, les lignes *MP*, *GD* seront égales entr'elles; puisque l'angle *APM* ou *GAL* étant égal à l'angle *AGD*, elles seront également inclinées entre les paralleles *GP*, *DM*. Or les triangles *AGD*, *MPA* sont semblables: car l'angle *MPA* ou *GAL* est égal à l'angle *AGD*; & l'angle *PMA* ou *MAL* égal à l'angle *GAD*, puisque retranchant des angles égaux *GAL*, *DAM*, le même angle *DAL*, les restes doivent être égaux. On aura donc *AG*. *GD* ou *PM* :: *PM*. *AP*, & partant $GA \times AP = \overline{PM}^2$; d'où il clair que *PM* est * une ordonnée au diametre *AP* qui a pour origine le point *A*, pour tangente la ligne *LAL*, & pour parametre la ligne *AG*. *Ce qu'il falloit, &c.* * *Art.* 19. & 21.

Si le diametre *AP* étoit l'axe, alors les lignes *GD*, FIG. 13.

*AL*, ſeroient paralleles, & la démonſtration deviendroit plus facile; car l'on voit tout d'un coup que *GD* eſt égale à *PM*, & que les triangles rectangles *AGD*, *MPA* ſont ſemblables; d'où il ſuit $AG. GD$ ou $PM :: PM. AP$. Donc $AG \times AP = \overline{PM}^2$, &c.

## PROPOSITION VIII.

### Problême.

30. Un *diametre* AP *étant donné avec ſon parametre, & la tangente* AL *qui paſſe par l'origine* A *de ce diametre; trouver autant de differens points que l'on voudra de la parabole, ou (ce qui eſt la même choſe) la décrire par pluſieurs points.*

PREMIERE MANIERE.

Fig. 14. Ayant pris ſur le diametre *AP* prolongé au delà de ſon origine *A*, la partie *AG* égale à ſon parametre, diviſé *AG* en deux parties égales au point *D*, & mené une ligne droite indéfinie *AF* perpendiculaire à *AG*; on décrira d'un point *C* pris partout où l'on voudra ſur *DA* prolongée indéfiniment du côté de *A*, comme centre, & du rayon *CG*, un arc de cercle *PF* qui coupera le diametre *AP* & ſa perpendiculaire *AF* en deux points *P*, *F*. On menera par le point *P* une parallele *MPM* à la tangente *AL*, ſur laquelle on prendra de part & d'autre les parties *PM*, *PM*, égales chacune à *AF*. On trouvera de la même maniere autant de couple de points *M* que l'on voudra; par leſquels on fera paſſer une ligne courbe *MAM* qui ſera la parabole qu'on demande.

Car tous les arcs *PF* paſſant par le même point *G*, & ayant leurs centres ſur la ligne *GA* prolongée, s'il eſt neceſſaire du côté de *A*, auront pour diametres les lignes *GP*; & par conſéquent la proprieté de ces cercles donnera toûjours $\overline{AF}^2 = GA \times AP$. Mais chaque *PM*

* Hyp. eſt* égale à ſa correſpondante *AF*, & de plus parallele

à

à la tangente *AL* qui passe par l'origine *A* du diametre *AP*; elle sera donc * ordonnée à ce diametre. C'est pourquoi la Parabole qu'on demande, doit passer par tous les points *M*, trouvés comme l'on vient d'enseigner.

*Art. 19. & 21.

Il est visible qu'on peut se tromper en traçant les parties de la parabole, qui joignent les points trouvés; mais on voit en même temps que l'erreur ne peut être sensible, lorsque ces points sont fort prés les uns des autres. Ceux qui ont besoin de décrire souvent des Sections Coniques, préferent ordinairement cette methode, de les décrire par plusieurs points; parce que les machines dont on se sert pour les décrire par un mouvement continu, étant composées, sont souvent fautives, & peu exactes dans la pratique.

## SECONDE MANIERE.

Fig. 15.

Ayant mené par un point quelconque *L* de la tangente *AL*, une parallele indéfinie *LE* au diametre *AP*; on prendra sur cette ligne & sur le diametre *AP* prolongé au delà de son origine *A*, les parties *LE*, *EE*, *EE*, &c. *AF*, *FF*, *FF*, &c. toutes égales entr'elles, & de telle grandeur qu'on voudra. On marquera sur *LE*, le point *M*, en sorte que *LM* soit troisiéme proportionnelle au parametre donné du diametre *AP*, & à la partie *AL* de la tangente. On tirera enfin des points *A*, *M*, les lignes *AE*, *AE*, *AE* &c. *MF*, *MF*, *MF* &c; je dis que les points d'intersection *N*, *N*, *N* &c. de chaque *AE*, avec la correspondante *MF*, seront tous à la parabole qu'on demande.

Car menant par le point marqué *M*, & par l'un des points trouvez *N*, les lignes *MP*, *NQ*, paralleles à la tangente *AL*, & nommant *AP*, $x$; *PM* ou *AL*, $y$; *AQ*, $u$; *QN*, $z$; les triangles semblables *NQA*, *ALE*, & *MPF*, *NQF*, donneront ces deux proportions *QN* $(z)$. *QA* $(u)$ :: *AL* $(y)$. *LE* ou *AF* $= \frac{uy}{z}$. & *MP*

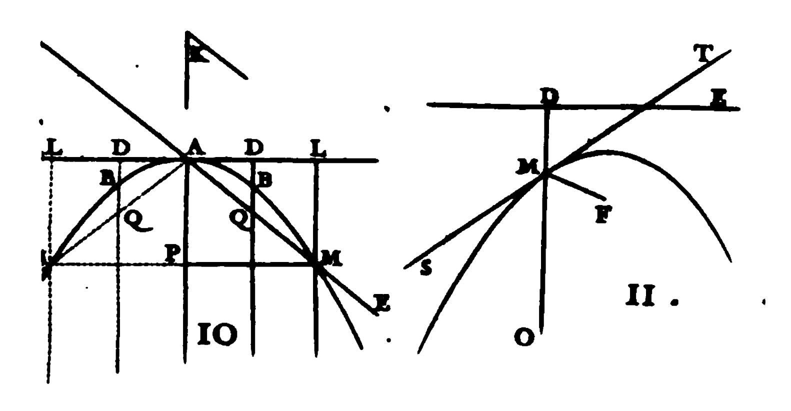
($y$). $PF$ ou $PA + AF$ ($x + \frac{uy}{z}$) :: $NQ$ ($z$). $QF$ ou $QA + AF$ ($u + \frac{uy}{z}$). D'où en multipliant les Extrêmes & les Moyens, l'on forme l'égalité $uy + \frac{uyy}{z} = xz + uy$; & effaçant de part & d'autre $uy$, & multipliant par $z$, il vient $uyy = xzz$, qui se reduit à cette proportion $AP$ ($x$). $AQ$ ($u$) :: $\overline{MP}^2$ ($yy$). $\overline{NQ}^2$ ($zz$). Or par la construction, le quarré de $AL$ ou de $PM$, est égal au rectangle de la partie $AP$ du diametre donné, par son parametre. Cette ligne $PM$ sera donc * une ordonnée au diametre $AP$; & par consequent $QN$ en sera * une autre. Ainsi le point $N$ sera l'un des points de la parabole qui tombent d'un côté du diametre $AP$: pour les avoir de l'autre, il n'y a qu'à prendre sur les droites indéfinies $LE$, $AF$, les parties égales $LE$, $EE$, &c. $AF$, $FF$, &c. de l'autre côté des points $L$, $A$.

* Art. 19. & 21.

* Art. 8. & 20.

Si au lieu du parametre du diametre $AP$ que l'on suppose ici donné, l'on avoit un des points $M$ de la parabole; ce qui arrive souvent: il n'y auroit qu'à mener par ce point, une parallele indéfinie $LE$, au diametre $AP$, & achever le reste comme cy-dessus.





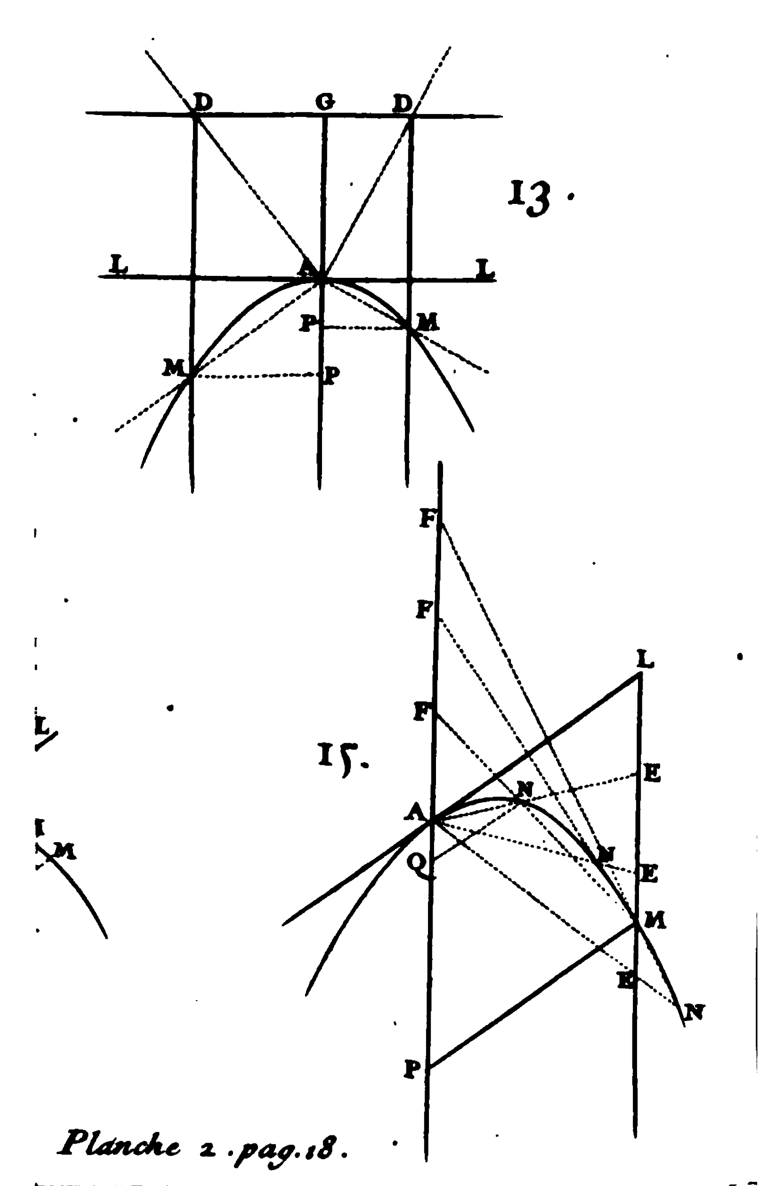




Planche 2 .pag.18.

# LIVRE SECOND.

## *De l'Ellipse.*

### DÉFINITIONS.

I.

AYANT attaché sur un plan les deux bouts d'un fil *FMf*, en deux points *F*, *f*, dont la distance *Ff* soit moindre que la longueur du fil, on se servira d'un stile *M*, pour tenir ce fil toûjours tendu ; & conduisant ce stile autour de ces deux points, en sorte qu'il revienne au même point d'où il étoit parti : ce stile décrira dans ce mouvement, une ligne courbe, qui sera nommée *Ellipse*. FIG. 16.

2.

Les deux points fixes *F*, *f*, sont nommés les deux *Foyers*.

3.

La ligne *Aa*, qui passe par les deux Foyers *F*, *f*, & qui est terminée de part & d'autre par l'Ellipse, est appellée le *premier* ou le *grand Axe*.

4.

Le point *C*, qui divise par le milieu le premier Axe *Aa*, est nommé le *Centre* de l'Ellipse.

5.

La ligne *Bb*, menée par le Centre *C*, perpendiculairement au premier Axe *Aa*, & terminée de part & d'autre par l'Ellipse, est appellée le *second* ou le *petit Axe*.

6.

Les deux Axes *Aa*, *Bb*, sont appellez ensemble, *Conjugués* : de sorte que le premier Axe *Aa*, est dit conjugué au second *Bb* ; & réciproquement le second *Bb*, conjugué au premier *Aa*.

7.

Les lignes *MP*, *MK*, menées des points *M* de l'Ellipse parallelement à l'un des Axes, & terminées par

l'autre, sont appellées *Ordonnées* à cet autre Axe: ainsi *MP* est Ordonnée à l'Axe *Aa*, & *MK* à l'Axe *Bb*.

8.

La troisiéme proportionnelle aux deux Axes, est appellée *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion. Ainsi si l'on fait comme le premier Axe *Aa*, est au second Axe *Bb*, de même le second *Bb*, à une troisiéme proportionnelle *p*; cette ligne *p* sera le Parametre du premier Axe.

9.

Toutes les lignes droites qui passent par le centre *C*, & qui sont terminées de part & d'autre par l'Ellipse, sont appellées *Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre l'Ellipse qu'en un seul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appellée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

FIG. 17. 31. Si l'on conçoit que les deux foyers *F*, *f*, & le centre *C* se réünissent en un seul point; il est visible que l'Ellipse se changera alors en un Cercle qui aura pour rayon la droite *CM*, égale à la moitié de la corde *CMC*, attachée par ces deux bouts au point *C*, qui en sera le centre. On pourra donc considérer un cercle comme une espece particuliére d'Ellipse, dans laquelle la distance des foyers est nulle; de sorte que tout ce qu'on démontrera dans la suite de l'Ellipse, telle que puisse être la distance de ces deux foyers, se peut aussi appliquer au cercle, en supposant que cette distance devienne nulle.

COROLLAIRE I.

FIG. 16. 32. Il suit de la définition premiere, que si l'on mene d'un point quelconque *M* de l'Ellipse, aux deux foyers *F*, *f*, les droites *MF*, *Mf*; leur somme sera toûjours la même.

## COROLLAIRE II.

33. LORSQUE le point $M$ tombe en $A$, il est visible que $MF$ devient $AF$, & que $Mf$ devient $Af$: de même lorsque le point $M$ tombe en $a$, il est encore visible que $MF$ devient $aF$, & que $Mf$ devient $af$. On aura donc $AF + Af$, ou $2AF + Ff = aF + af$, ou $2af + fF$; & partant $AF = af$. D'où il suit:

1°. Que la somme des deux droites $MF$, $Mf$, est toûjours égale au premier axe $Aa$, puisque $Mf + MF = Af + AF = Af + fa$.

2°. Que la distance $Ff$ des foyers, est divisée en deux parties égales par le centre $C$, puisque $CA - AF$ ou $CF = Ca - af$ ou $Cf$.

## COROLLAIRE III.

34. SI de l'extremité $B$ du second axe $Bb$, l'on mene aux deux foyers $F, f$, les droites $BF$, $Bf$; il est clair que les triangles réctangles $BCF$, $BCf$, seront égaux; & qu'ainsi l'hypothenuse $BF$, est égale à l'autre hypothenuse $Bf$: & par consequent $BF$, ou $Bf = CA$ ou $Ca$, puisque * $BF + Bf = Aa$. On prouve de même que $Fb$ ou $bf = CA$ ou $Ca$. D'où l'on voit: * Art. 33.

1°. Que le second axe $Bb$, est divisé en deux parties égales par le centre $C$; car les triangles réctangles $FCB$, $FCb$ seront égaux, puisqu'ils ont des hypothenuses égales $FB$, $Fb$, & le côté $FC$ commun.

2°. Que le second axe $Bb$, est toûjours moindre que le premier $Aa$; puisque sa moitié $BC$ étant l'un des côtez du triangle réctangle $BCF$, sera moindre que son hypothenuse $BF$, qui est égale à la moitié $CA$ du premier axe $Aa$.

3°. Que si l'on décrit de l'une des extremitez $B$ du petit ou second axe $Bb$ comme centre, & du rayon $BF$ égal à $CA$, moitié du premier ou grand axe $Aa$, un cercle; il coupera ce grand axe en deux points $F, f$, qui seront les deux foyers de l'Ellipse.

### COROLLAIRE IV.

35. Les mêmes choses étant posées, si l'on nomme $CA$ ou $BF$, $t$; $CF$, $m$; le triangle réctangle $BCF$, donnera $\overline{BC}^2 = tt - mm$. Or $AF = t - m$, & $Fa = t + m$, & partant $AF \times Fa = tt - mm$. D'où il est évident que le quarré de la moitié $CB$ du petit axe $Bb$, est égal au rectangle de $AF$ par $Fa$ parties du grand axe $Aa$, prises entre l'un des foyers $F$, & ses deux extremités $A$, $a$.

### COROLLAIRE V.

36. Il sera facile à present de décrire une Ellipse dont
* Art. 34. les deux axes $Aa$, $Bb$, sont donnez. Car ayant trouvé* sur le premier ou grand axe $Aa$, les foyers $F$, $f$, on attachera dans ces points, les extremités d'un fil $FMf$, dont la longueur égalera celle de cet axe; & ayant décrit par le moyen de ce fil, une Ellipse comme l'on a enseigné dans la définition premiere, il est évident qu'elle sera celle qu'on demande.

## PROPOSITION I.

### Theorême.

FIG. 16. 37. *Si l'on mene l'ordonnée* MP *au premier ou grand axe* Aa, *& qu'on prenne sur cet axe la partie* AD *égale à* MF; *Je dis que* CA. CF :: CP. CD.

Ayant nommé, comme auparavant, les données $CA$, $t$; $CF$, $m$; & de plus les indéterminées $CP$, $x$; $PM$, $y$; & l'inconnuë $CD$, $z$; il peut arriver deux differens cas.

*Premier cas.* Lorsque le point $P$ tombe au dessus du centre $C$. Comme $PF$ est toûjours moindre que $Pf$; il s'ensuit que $MF$ ou $AD$ sera moindre que $Mf$ ou $aD$; c'est pourquoi $AD$ ou $MF = t - z$, $aD$ ou $Mf = t + z$, $FP = m - x$ ou $x - m$ ( selon que le point $P$ tombe au dessous ou au dessus du foyer $F$), $Pf = x + m$. Or les triangles réctangles $MPF$, $MPf$, donnent $tt -$

$2tz + zz = yy + mm - 2mx + xx$, & $tt + 2tz + zz = yy + mm + 2mx + xx$. Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la premiere égalité de ceux de la seconde, on aura $4tz = 4mx$; d'où l'on tire $CD\ (z) = \frac{mx}{t}$.

*Second cas.* Lorsque le point $P$ tombe au dessous du centre $C$, comme $PF$ est toûjours plus grande que $Pf$, il s'ensuit que $MF$ ou $AD$, sera plus grande que $Mf$ ou $aD$: c'est pourquoi $AD$ ou $MF = t + z$, $aD$ ou $Mf = t - z$, $PF = x + m$, $Pf = x + m$ ou $m - x$ (selon que le point $P$ tombe au dessous ou au dessus du foyer $f$). Or les triangles réctangles $MPF$, $MPf$, donnent $tt + 2tz + zz = yy + mm + 2mx + xx$, & $tt - 2tz + zz = yy + mm - 2mx + xx$. Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la seconde égalité de ceux de la premiere, on aura $4tz = 4mx$; d'où l'on tire encore $CD\ (z) = \frac{mx}{t}$. Par conséquent en l'un & l'autre cas, on aura $CA\ (t).\ CF(m) :: CP\ (x).\ CD\ (z)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

### COROLLAIRE

38. Il est donc évident que si l'on nomme les données $CA$ ou $Ca$, $t$; $CF$ ou $Cf$, $m$; & l'indéterminée $CP$, $x$; on aura toûjours $MF = t - \frac{mx}{t}$, & $Mf = t + \frac{mx}{t}$, lorsque le point $P$ tombe au dessus du centre $C$: & qu'au contraire on aura $MF = t + \frac{mx}{t}$, & $Mf = t - \frac{mx}{t}$, lorsqu'il tombe au dessous.

## PROPOSITION II.

### Theorême.

39. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* MP *à l'axe* Aa, *est au rectangle de* AP *par* Pa, *parties de cet axe, comme le quarré de son conjugué* Bb, *est au quarré de l'axe* Aa.

*Il faut prouver que* $\overline{PM}^2 . AP \times Pa :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$.

Les mêmes choses étant posées que dans l'article précedent, si l'on met dans l'égalité $tt \pm 2tz + zz = yy + mm \pm 2mx + xx$ que l'on a trouvée* par le moyen du triangle réctangle *MPF*, à la place de $z$ sa valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toûjours celle-ci $ttyy = t^4 - ttxx - mmtt + mmxx$, laquelle étant réduite à une proportion, donne $\overline{PM}^2 (yy). AP \times Pa (tt - xx) ::$ * $\overline{BC}^2 (tt - mm). \overline{CA}^2 (tt) :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$. *Ce qu'il fal. &c.*

* Art. 37.

* Art. 35.

## COROLLAIRE I.

40. Si l'on mene une ordonnée *MK* à l'autre axe *Bb*, lequel j'appelle $2c$, il est clair que $MK = CP (x)$, & que $CK = PM (y)$. Or * $\overline{PM}^2 (yy). AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{Bb}^2 (4cc). \overline{Aa}^2 (4tt)$. Et partant $4ccxx = 4cctt - 4ttyy$; ce qui donne cette proportion $\overline{MK}^2 (xx). BK \times Kb (cc - yy) :: \overline{Aa}^2 (4tt). \overline{Bb}^2 (4cc)$.

* Art. 39.

C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque *MK* à l'axe *Bb*, est au réctangle de *BK* par *Kb* parties de cet axe, comme le quarré de son conjugué *Aa*, est au quarré de l'axe *Bb*.

## COROLLAIRE FONDAMENTAL.

FIG. 18. 19.

41. Si l'on nomme l'un ou l'autre axe *Aa*, $2t$; son conjugué *Bb*, $2c$; son parametre $p$; chacune de ses ordonnées *PM*, $y$; chacune de ses parties *CP* prises entre le centre & les rencontres des ordonnées, $x$; on aura * toûjours $\overline{PM}^2 (yy). AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{Bb}^2 (4cc). \overline{Aa}^2 (4tt) :: p. Aa (2t)$. Puisque selon la définition du Parametre, $Aa (2t). Bb (2c) :: Bb (2c). p = \frac{4cc}{2t}$. D'où en multipliant d'abord les extrêmes & les moyens de la proportion $yy. tt - xx :: 4cc. 4tt$, & ensuite

* Art. 39.

ensuite de l'autre $yy . tt - xx :: p . 2t$. L'on tire $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, & $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$. Or comme cette proprieté convient également à tous les points de l'Ellipse, & qu'elle en détermine la position par rapport aux deux axes conjugués $Aa$, $Bb$; il s'ensuit que l'équation $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, ou $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$, exprime parfaitement la nature de l'Ellipse par rapport à ses axes.

### COROLLAIRE III.

42. Si l'on mene deux ordonnées quelconques $MP$, $NQ$, à l'axe $Aa$; leurs quarrés seront entr'eux comme les réctangles $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$, des parties de cet axe, faites par la rencontre de ces mêmes ordonnées; car* $\overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2 :: \overline{PM}^2 . AP \times Pa :: \overline{QN}^2 . AQ \times Qa$. Et partant $\overline{PM}^2 . \overline{QN}^2 :: AP \times Pa . AQ \times Qa$. * Art. 39.

### COROLLAIRE IV.

43. Si l'on mene par un point quelconque $P$ de l'un des axes conjugués $Aa$, une parallele $MM$ à l'autre axe $Bb$; elle rencontrera l'Ellipse en deux points $M$, $M$, également éloignés de part & d'autre du point $P$, & non en davantage. Car afin que les points $M$, $M$, soient à l'Ellipse, il faut * que les quarrés de $PM$ $(y)$ prise de part & d'autre de l'axe $Aa$, soient égaux chacun à la même quantité $cc - \frac{ccxx}{tt}$. * Art. 41.

### COROLLAIRE V.

44. Il suit de ce que * $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, que plus $CP$ $(x)$ prise de part & d'autre du centre $C$ augmente, plus chaque ordonnée $PM$ $(y)$ prise de part & d'autre de l'un ou de l'autre axe $Aa$, diminuë; de sorte que $CP$ $(x)$ étant égale à $CA$ ou $Ca$ $(t)$, chaque $PM$ $(y)$ devient alors nulle ou zero: & qu'au contraire plus $CP$ $(x)$ devient petite, plus aussi chaque ordonnée $PM$ $(y)$ prise * Art 41.

de part & d'autre de l'axe *Aa* augmente ; de sorte que *CP* ($x$) devenant zero, chaque *PM* ($y$), qui est alors *CB* ou *Cb* ($c$), sera la plus grande des ordonnées. D'où il est clair.

1°. Que si l'on mene par les extremités *B*, *b*, de l'un des axes conjugués, des paralleles à l'autre ; elles seront tangentes en ces points.

2°. Que l'Ellipse s'éloigne de part & d'autre de plus en plus de l'un ou de l'autre axe *Aa*, en commençant par l'extremité *A*, jusqu'à ce qu'elle rencontre son conjugué *Bb* ; aprés quoi elle va toûjours en s'approchant du même axe *Aa*, jusqu'à ce qu'elle le rencontre en son autre extremité *a*.

## COROLLAIRE VI.

* Art. 41.

45. Il suit encore de ce que* $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, que si l'on prend les points *P*, *P*, également éloignés de part & d'autre du centre *C* ; les ordonnées *PM*, *PM*, seront égales. D'où il est évident que si une ligne quelconque *MM*, terminée par l'Ellipse, est coupée en deux également par l'un des axes conjugués *Bb* en un point *K* autre que le centre ; elle sera parallele à l'autre *Aa*. Car menant les paralleles *MP*, *MP*, à l'axe *Bb*, la ligne *PP* sera divisée par le milieu en *C*, puisque *MM* l'est en *K* : & partant les ordonnées *PM*, *PM* seront égales. La droite *MM* sera donc parallele à l'axe *Aa*.

## COROLLAIRE VII.

46. Si l'on conçoit que le plan sur lequel l'Ellipse est tracée, soit plié le long d'un des axes *Bb*, en sorte que ses deux parties se joignent ; il est clair que les deux demi-Ellipses *BAb*, *Bab*, tomberont exactement l'une sur l'autre ; sçavoir, les points *A*, *M*, &c. sur *a*, *M*, &c. puisque* toutes les perpendiculaires *Aa*, *MM*, &c. à cet axe, sont coupées par le milieu aux points *C*, *K*, &c. D'où il est visible que l'Ellipse est coupée par les deux axes en qua-

* Art. 45.

tre portions parfaitement égales & uniformes, qui ne different entr'elles que par leur situation.

## PROPOSITION III.

### Theorême.

47. *Si l'on mene par l'une des extremités* A *de l'un des axes* Aa, *une ligne droite quelconque* AM *dans l'un des angles* aAL, aAL, *faits par cet axe, & par la ligne* LAL *parallele à son conjugué* Bb; *je dis qu'elle rencontrera l'Ellipse en un autre point* M. FIG. 20.

Ayant pris sur $AL$ de part ou d'autre du point $A$, la partie $AG$ égale au parametre $p$ de l'axe $Aa$, & tiré $GF$ parallele à cet axe, & qui rencontre la ligne $AM$ (prolongée, s'il est necessaire) au point $F$, ou prendra sur la ligne $AL$ du même côté où tombe la ligne $AM$ par rapport à l'axe $Aa$, la partie $AL$ égale à $GF$, & ayant tiré par l'autre extremité $a$ de l'axe $Aa$ la droite $aL$; je dis que le point $M$ où elle coupe la ligne $AM$, est à l'Ellipse $MAM$.

Car menant $MP$ parallele à $AL$, & nommant les connuës $Aa$, $2t$; $AG$, $p$; $GF$ ou $AL$, $a$; & les inconnuës $CP$, $x$; $PM$, $y$; les triangles semblables $AGF$, $MPA$, & $LAa$, $MPa$, donneront $AG(p)$. $GF(a)$ :: $MP(y)$. $AP\ (t \pm x) = \frac{ay}{p}$. Et $AL\ (a)$. $Aa\ (2t)$ :: $PM\ (y)$. $aP\ (t \mp x) = \frac{2ty}{a}$. Et par consequent on aura toûjours $AP \times Pa\ (tt - xx) = \frac{2tyy}{p}$, soit que le point $P$ tombe au dessus ou au dessous du centre $C$; d'où l'on tire $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$. La ligne $PM$ sera donc * une ordonnée à l'axe $Aa$; & partant le point $M$ sera à l'Ellipse $MAM$. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 41.

### COROLLAIRE I.

48. DE-LA on voit comment un axe $Aa$ d'une Ellipse $MAM$ étant donné avec son parametre $p$, &

ayant mené par l'une des extremités *A* de cet axe, une ligne droite quelconque *AM* dans l'un ou l'autre des angles *aAL*, *aAL*, faits par cet axe, & par la ligne *LAL* parallele à son conjugué *Bb*; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver sur cette ligne le point *M* où elle rencontre l'Ellipse *MAM*.

### COROLLAIRE II.

49. Il est évident qu'il n'y a que la ligne *LAL* parallele à l'axe *Bb*, qui puisse être tangente de l'Ellipse *MAM* au point *A*, l'une des extremités de son conjugué *Aa*; puisqu'il n'y a que cette seule ligne, qui passant par le point *A*, & étant continuée de part & d'autre, ne la rencontre en aucun point, & n'entre pas dedans.

## PROPOSITION IV.

### Theorême.

FIG. 20. 50. Tous *les diametres comme* MCm, *sont coupés en deux également par le centre* C, *& ils ne rencontrent l'Ellipse qu'en deux points* M, m.

Ayant mené l'ordonnée *MP*, & pris *Cp* égale à *CP*, si l'on mene la perpendiculaire *pm* terminée en *m* par la droite *MCm*; il est évident que les triangles *CPM*, *Cpm* sont semblables & égaux, & qu'ainsi *CM* est égale à *Cm*, & *PM* à *pm*. Or comme * les ordonnées qui sont également éloignées de part & d'autre du centre *C*, sont égales entr'elles, & que *PM* est une ordonnée, il s'ensuit que *pm* sera aussi une ordonnée; & par consequent que le point *m* est à l'Ellipse.

* Art. 45.

De plus il est visible que si l'on imagine une parallele à l'axe *Bb*, qui se meuve de *C* vers *A*; la partie de cette parallele renfermée dans l'angle *ACM*, ira toûjours en augmentant à mesure que *CP* croît, & qu'au contraire la partie de cette parallele renfermée entre le quart d'Ellipse *AMB* & l'axe *CA*, c'est à dire, l'ordon-

née *PM* * ira toûjours en diminuant; d'où il suit que la ligne droite *CM*, qui passe par le centre, ne rencontre l'Ellipse qu'en un point *M* du même côté de l'axe; & il en est de même pour le point *m* pris de l'autre côté. Donc &c. *Art. 44.

## DÉFINITIONS.

11.

Si l'on mene par un point quelconque *M* de l'Ellipse, un diametre *MCm*, une ordonnée *MP* à l'un ou l'autre axe *Aa*, & une ligne droite *MT*, en sorte que *CT* soit troisiéme proportionnelle à *CP*, *CA*; le diametre *SCs* parallele à *MT*, est appellé *Diametre conjugué* au diametre *Mm*; Et réciproquement le diametre *Mm* est dit conjugué au diametre *Ss*: de sorte que les deux ensemble sont appellés *Diametres conjugués*. FIG. 21. 22.

12.

Toutes les lignes droites menées des points de l'Ellipse parallelement à l'un de ces deux diametres, & terminées par l'autre, sont appellées *Ordonnées* à cet autre. Ainsi *NO* parallele au diametre *Ss*, est Ordonnée à son conjugué *Mm*.

13.

La troisiéme proportionnelle à deux diametres conjugués, est appellée *Parametre* du premier de la proportion. Ainsi la troisiéme proportionnelle à *Mm*, *Ss*, est appellée *Parametre* du diametre *Mm*.

## COROLLAIRE.

51. Si l'on nomme la donnée *CA*, $t$; & les indéterminées *CP*, $x$; *PT*, $s$; il est clair, selon la définition 11[e] que $CT\ (x+s) = \frac{tt}{x}$; & qu'ainsi $sx = tt - xx = AP \times Pa$.

## PROPOSITION V.

### Theorême.

52. SI *l'on mene par les extremités* M, S, *de deux diametres conjugués* Mm, Ss, *deux ordonnées* MP, SK, *à un axe* Aa: *je dis que la partie* CK *de cet axe, prise entre le centre & la rencontre de l'une des ordonnées* SK, *est moyenne proportionnelle entre les deux parties* AP, Pa, *faites par la rencontre de l'autre ordonnée* MP.

*Il faut prouver que* $\overline{CK}^2 = AP \times Pa$.

Ayant nommé les connuës $CA$, $t$; $CP$, $x$; $PT$, $s$; &
* Art. 51. l'inconnuë $CK$, $m$; on aura $AP \times Pa = tt - xx =$ * $sx$, & $AK \times Ka = tt - mm = sx + xx - mm$ en mettant pour $tt$ sa valeur $xx + sx$. Cela posé, la proprieté de
* Art. 42. l'Ellipse * donnera $AP \times Pa\ (sx) . AK \times Ka\ (sx + xx - mm) :: \overline{PM}^2 . \overline{KS}^2 :: \overline{TP}^2\ (ss) . \overline{CK}^2\ (mm)$, à cause des triangles semblables $TPM$, $CKS$. D'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens, & en transposant à l'ordinaire, $\overline{CK}^2\ (mm) = \frac{sxx + ssx}{x + s} = sx = AP \times Pa$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

### COROLLAIRE.

53. PUISQUE $\overline{CK}^2 = tt - xx$, il s'ensuit que $\overline{CA}^2 -$
* Art. 41. $\overline{CK}^2$ ou $AK \times Ka = xx$. Or * $\overline{CA}^2\ (tt) . \overline{CB}^2\ (cc) :: AK \times Ka\ (xx) . \overline{SK}^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Et $\overline{CA}^2\ (tt) . \overline{CB}^2\ (cc) :: AP \times Pa\ (tt - xx) . \overline{PM}^2 = cc - \frac{ccxx}{tt}$. De plus à cause des triangles réctangles $CPM$, $CKS$, on aura le quarré $\overline{CM}^2$ ou $\overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = xx + cc - \frac{ccxx}{tt}$, & le quarré $\overline{CS}^2$ ou $\overline{CK}^2 + \overline{KS}^2 = tt - xx + \frac{ccxx}{tt}$. Donc $\overline{CM}^2 + \overline{CS}^2 = tt + cc$.

C'est à dire que la somme des quarrés de deux diametres conjugués quelconques $Mm$, $Ss$, est égale à la somme des quarrés des deux axes $Aa$, $Bb$.

## PROPOSITION VI.

### Theorême.

54. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* ON *au diametre Mm, est au rectangle de* MO×Om *fait des parties de ce diametre; comme le quarré de son conjugué* Ss, *est au quarré du même diametre* Mm.

*Il faut prouver que* $\overline{ON}^2 . MO \times Om :: \overline{Ss}^2 . \overline{Mm}^2$.

Ayant mené les paralleles *NQ*, *OH*, à l'axe *Bb*, & la parallele *OR* à son conjugué *Aa*, qui rencontre au point *R* l'ordonnée *NQ* prolongée, s'il est necessaire; on nommera les données *CP*, *x*; *PM*, *y*; *CA*, *t*; *PT*, *s*; & les indéterminées *HQ* ou *OR*, *a*; *CH*, *b*; & on aura à cause des triangles semblables *CPM*, *CHO*, & *MPT*, *NRO*, ces deux proportions $CP\ (x) . PM\ (y) :: CH\ (b) . HO$ ou $RQ = \frac{by}{x}$. Et $TP\ (s) . PM\ (y) :: OR\ (a) . RN = \frac{ay}{s}$. Cela posé.

Puisque (*fig.* 21.) *NQ* est toûjours la difference de $RQ\ (\frac{by}{x})$, $RN\ (\frac{ay}{s})$, & *CQ* la somme de *CH* (*b*), *HQ* (*a*), lorsque le point *N* tombe entre les points *M*, *S*, ou *m*, *s*; & qu'au contraire (*fig.* 22.) *NQ* est toûjours la somme de *RQ*, *RN*, & *CQ* la difference de *CH*, *HQ*, lorsque le point *N* tombe par tout ailleurs: on aura $\overline{NQ}^2 = \frac{bbyy}{xx} \pm \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss}$, & $\overline{CQ}^2 = aa \mp 2ab + bb$; sçavoir $-\frac{2abyy}{sx}$ & $+2ab$ dans le premier cas, & au contraire $+\frac{2abyy}{sx}$ & $-2ab$ dans le second cas. Or* $AP \times Pa\ (tt - xx) . AQ \times Qa$ ou $\overline{CA}^2 - \overline{CQ}^2\ (tt - aa \pm 2ab - bb) :: \overline{PM}^2\ (yy) . \overline{QN}^2 = \frac{ttyy - aayy \pm 2abyy - bbyy}{tt - xx}$. En comparant ensemble ces deux valeurs du quarré de *NQ*, on formera l'égalité $\frac{bbyy}{xx} \pm \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss} = \frac{ttyy - aayy \pm 2abyy - bbyy}{tt - xx}$, dans laquelle effaçant d'une part le

* Art. 42.

terme $\pm\frac{2abyy}{sx}$ & de l'autre le terme $\pm\frac{2abyy}{tt-xx}$ qui lui est
* Art. 51. égal, puisque * $sx=tt-xx$, & divisant par $yy$, il vient $\frac{bb}{xx}+\frac{aa}{ss}=\frac{tt-aa-bb}{tt-xx}$.

Si l'on multiplie par $xx$, & qu'on transpose $bb$, on trouvera $\frac{aaxx}{ss}$ ou $\frac{aax^4}{ssxx}=\frac{ttxx-aaxx-bbtt}{tt-xx}$; & multipliant le premier membre par $ssxx$, & le second par le quarré de $tt-xx$ valeur de $sx$ (ce qui se fait en multipliant simplement le numerateur par $tt-xx$) on aura $aax^4=t^4xx-aattxx-bbt^4-ttx^4+aax^4+bbttxx$; d'où en effaçant de part & d'autre $aax^4$, transposant $aattxx$, & divisant par $ttxx$, l'on tirera $\overline{HQ}^2$ ou $\overline{OR}^2$ $(aa)=tt-xx+bb-\frac{bbtt}{xx}$.

Maintenant si l'on nomme le demi diametre $CM$ ou $Cm$, $z$; on aura à cause des triangles semblables $CPM$, $CHO$, cette proportion $CP\ (x).\ CM\ (z) :: CH\ (b).\ CO=\frac{bz}{x}$. Et partant $MO\times Om=zz-\frac{bbzz}{xx}$. Or les triangles semblables $ORN$, $CKS$, donnent $\overline{ON}^2.\ \overline{CS}^2 :: \overline{OR}^2$
* Art. 52. $(tt-xx+bb-\frac{bbtt}{xx}).\ \overline{CK}^2$ * $(tt-xx) :: MO\times Om\ (\frac{xxzz-bbzz}{xx}).\ \overline{CM}^2\ (zz)$. Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Donc $\overline{ON}^2.$
* Art. 50. $MO\times Om :: \overline{CS}^2.\ \overline{CM}^2$ * $:: \overline{Ss}^2.\ \overline{Mm}^2$. *Ce qu'il falloit &c.*

## COROLLAIRE GENERAL.

55. IL est visible que ce qu'on a démontré dans la Proposition seconde par rapport aux deux axes *Aa*, *Bb*, s'étend par le moyen de cette Proposition à deux diametres conjugués quelconques *Mm*, *Ss*. Or comme les articles 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48 & 49, se tirent de la seconde Proposition, & subsistent également, soit que l'angle *ACB* soit droit ou qu'il ne le soit pas; il s'ensuit que si l'on suppose dans ces articles, que les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, soient deux diametres

diametres conjugués quelconques, ils seront encore vrais dans cette supposition : car leur démonstration demeurera toûjours la même ; & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant par tout où se trouve le mot d'*Axe* celui de *Diametre*.

### COROLLAIRE II.

56. COMME les articles 44 & 49, subsistent avec la même force, lorsque les lignes $Aa$, $Bb$, au lieu d'être les deux axes, sont deux diametres conjugués quelconques, tels que $Mm$, $Ss$; il s'ensuit que la ligne $MT$ menée par le point $M$ l'une des extremités d'un diametre quelconque $Mm$, parallelement à son diametre conjugué $Ss$, est tangente en $M$, & qu'il n'y a que cette seule ligne qui puisse toucher l'Ellipse en ce point.

D'où l'on voit que d'un point donné sur une Ellipse, on ne peut mener qu'une seule tangente.

### COROLLAIRE III.

57. DE-LA il est évident, selon la définition 11ᵉ, que si l'on mene par un point quelconque $M$ d'une Ellipse, une ordonnée $MP$ à l'un ou l'autre axe $Aa$; & qu'ayant pris $CT$ du côté du point $P$, troisiéme proportionnelle à $CP$, $CA$, on tire la droite $MT$ : cette ligne $MT$ sera tangente en $M$. Et réciproquement, que si la ligne $MT$ est tangente en $M$, & qu'on mene l'ordonnée $MP$ à l'un ou l'autre axe $Aa$, les parties $CP$, $CA$, $CT$ de cet axe, seront en proportion geométrique continuë.

### COROLLAIRE IV.

58. SI l'on imagine dans les définitions 11, 12 & 13, & dans les deux dernieres Propositions, que les lignes $Aa$, $Bb$, au lieu d'être les deux axes, soient deux diametres conjugués quelconques ; on verra que ces Propositions seront encore vrayes, puisqu'elles se démontreront de la même maniere qu'auparavant : comme il est évident par l'inspéction de la figure 23, où les triangles

semblables donnent les mêmes proportions que dans le cas des axes.

D'où il suit 1°. Que le Corollaire précedent doit encore avoir lieu, lorsque la ligne $Aa$, au lieu d'être un axe, est un diametre quelconque. 2°. Que les diametres conjugués $Mm$, $Ss$, peuvent être les deux axes dans cette supposition; & qu'ainsi on peut regarder les deux axes comme deux diametres conjugués, qui font entr'eux des angles droits.

## PROPOSITION VII.

### Theorême.

FIG. 24. 59. *Si par un point quelconque d'une Ellipse qui a pour centre le point* C, *l'on tire une ordonnée* MP *à l'un des axes* Aa, *& une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT *qui passe par le point* M: *je dis que* CP *sera toûjours à* PG *en raison donnée de l'axe* Aa *à son parametre.*

Car nommant le demi-axe $CA$ ou $Ca$, $t$; & les indéterminées $CP$, $x$; $PM$, $y$; on aura * $CT = \frac{tt}{x}$; & partant $PT = \frac{tt-xx}{x}$. Or les triangles réctangles semblables $TPM$, $MPG$, donnent $TP\ (\frac{tt-xx}{x}) . PM\ (y) :: PM\ (y) . PG = \frac{xyy}{tt-xx}$. D'où l'on tire cette proportion $CP\ (x) . PG\ (\frac{xyy}{tt-xx}) :: AP \times Pa\ (tt-xx) . \overline{PM}^2\ (yy)$. Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit $xyy$. Mais le réctangle $AP \times Pa$, est * au quarré $\overline{PM}^2$, comme l'axe $Aa$ est à son parametre. Donc &c.

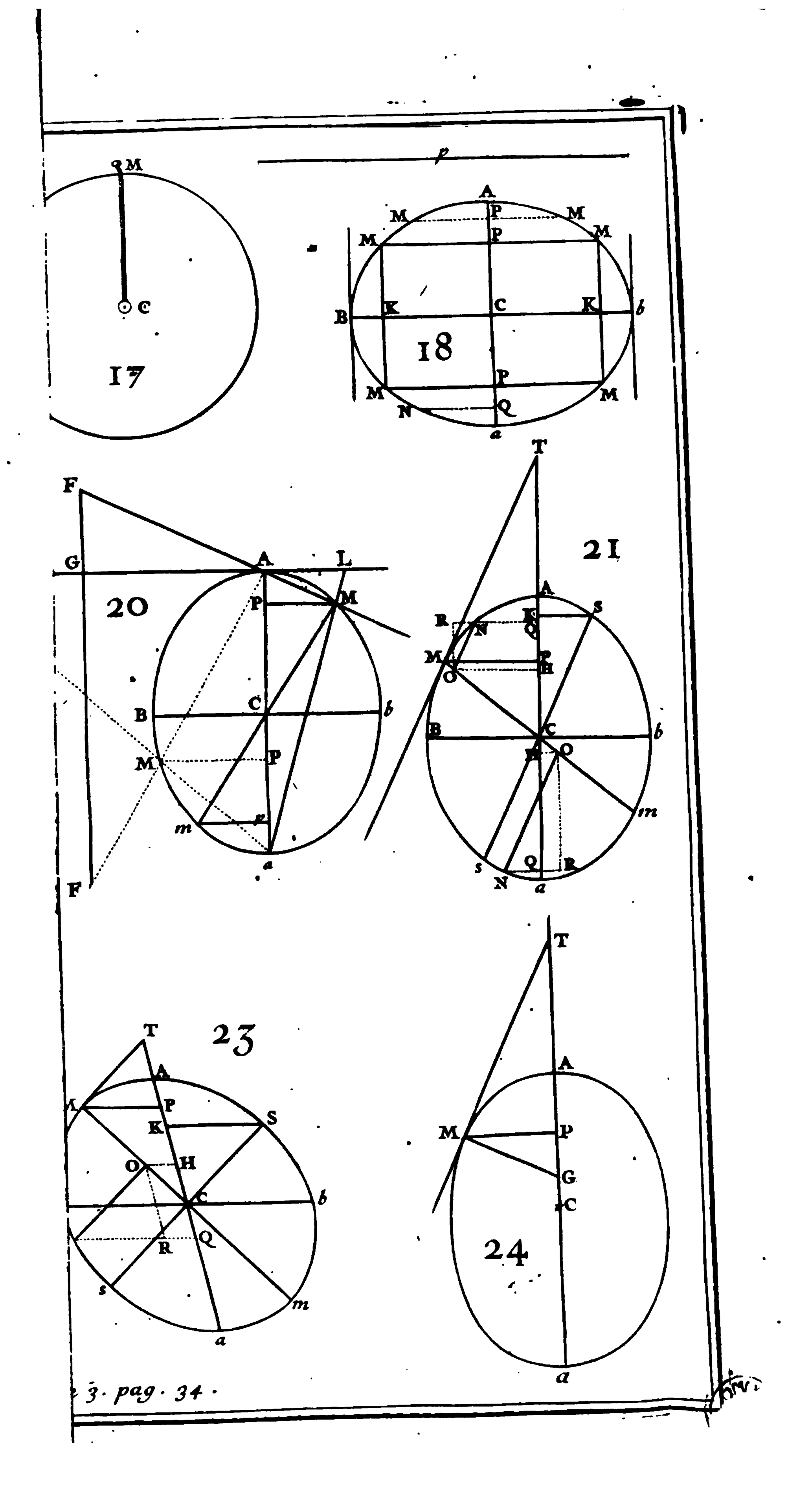
* Art. 57.

* Art. 41.

## PROPOSITION VIII.

### Theorême.

FIG. 25. 60. *Si l'on mene par un point quelconque* M *d'une Ellipse, une tangente* TMS, *& aux deux foyers* F, f, *les droites* MF,


M
C
17
p
A
M
P
M
M
P
M
B
K
C
K
b
18
P
M
M
N
Q
a
F
G
A
L
20
P
M
C
B
b
M
P
m
g
a
F
T
21
A
R
N
K
S
Q
M
P
O
H
B
C
b
O
m
s
N
Q
R
a
T
23
A
P
S
K
O
H
C
b
R
Q
s
m
a
T
A
M
P
G
C
24
a

*Mf; je dis que les angles* FMT, fMS, *faits par ces lignes de part & d'autre avec la tangente* TMS, *sont égaux entr'eux.*

Car ayant mené les perpendiculaires $FD$, $fd$, sur cette tangente; le premier axe $Aa$ qui la rencontre en $T$, & l'ordonnée $MP$ à cet axe, & nommé les données $CA$ ou $Ca$, $t$; $CF$ ou $Cf$, $m$; & l'indéterminée $CP$, $x$; on aura $MF$* $(t - \frac{mx}{t})$. $Mf$ $(t + \frac{mx}{t})$ :: $TF$, ou $CT$* $(\frac{tt}{x}) - CF (m)$. $Tf$ ou $CT$ $(\frac{tt}{x}) + Cf (m)$. Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Or les triangles semblables $TFD$, $Tfd$, donnent $TF$. $Tf$ :: $FD$. $fd$. L'hypothenuse $MF$ du triangle réctangle $MDF$, sera donc à l'hypothenuse $Mf$ du triangle réctangle $Mdf$, comme le côté $DF$ est au côté $df$; & par consequent ces deux triangles seront semblables. Les angles $FMD$, $fMd$, ou $FMT$, $fMS$, qui sont opposés aux côtés homologues $DF$, $df$, seront donc égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 58.
* Art. 57.

COROLLAIRE.

61. DE-LA il est évident que la tangente $TMS$ étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant $M$, laisse l'Ellipse toute entiere du côté de ses deux foyers $F$, $f$. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de l'Ellipse que tombe le point $M$, il s'ensuit qu'elle sera concave dans toute son étenduë autour de ses deux foyers, & par consequent aussi autour de son centre.

## PROPOSITION IX.

### Theorême.

62. S*i l'on mene par l'une des extremités* A *d'un diametre* Aa *une parallele* DAE *à son conjugué* Bb, *laquelle rencontre deux autres diametres conjugués quelconques* Mm, Ss, FIG. 26.

*aux points* D, E ; *je dis que le rectangle de* DA *par* AE, *est égal au quarré de la moitié* CB *du diametre* Bb.

*Il faut prouver que* $DA \times AE = \overline{CB}^2$.

Ayant mené par les extremités $M$, $S$, des diametres conjugués $Mm$, $Ss$, les ordonnées $MP$, $SK$, au diametre $Aa$, on nommera les données $CA$, $t$ ; $CB$, $c$ ; & les indéterminées $CP$, $x$ ; $PM$, $y$ ; & on aura * $\overline{CK}^2 = AP \times Pa = tt - xx$ ; & par consequent $AK \times Ka$ ou $\overline{CA}^2 - \overline{CK}^2 = xx$. Or * $\overline{BC}^2$ $(cc)$. $\overline{CA}^2$ $(tt)$ :: $\overline{MP}^2$ $(yy)$. $AP \times Pa$ ou $\overline{CK}^2 = \frac{tty}{cc}$. Et $\overline{CA}^2$ $(tt)$. $\overline{CB}^2$ $(cc)$ :: $AK \times Ka$ $(xx)$. $\overline{KS}^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Donc en extrayant les racines quarrées, l'on tire $CK = \frac{ty}{c}$, & $KS = \frac{cx}{t}$. Mais les triangles semblables $CPM$, $CAD$, & $CKS$, $CAE$, donnent $CP$ $(x)$. $PM$ $(y)$ :: $CA$ $(t)$. $AD = \frac{ty}{x}$. Et $CK$ $(\frac{ty}{c})$. $KS$ $(\frac{cx}{t})$ :: $CA$ $(t)$. $AE = \frac{ccx}{ty}$. Donc $DA \times AE = cc = \overline{BC}^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 52.

* Art. 54.

## PROPOSITION X.

### Problême.

FIG. 27.

63. **D**EUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés, avec une ligne droite* MCm *qui passe par le centre* C ; *marquer sur cette ligne les points* M, m, *où elle rencontre l'Ellipse.*

Ayant mené par l'une des extremités $A$ du diametre $Aa$, une parallele indéfinie $AD$, à son conjugué $Bb$, laquelle rencontre la ligne $CM$ donnée de position au point $D$ ; on tirera par le point $A$ perpendiculairement sur $AD$, la ligne $AO$ égale à $CB$, & par les points $O$, $D$, la ligne $OD$. On décrira du rayon $OA$ un cercle qui coupera la ligne $OD$ en deux points $N$, $n$, par où l'on tirera des paralleles $NM$, $nm$, à la ligne $OC$ qui joint

les centres de l'Ellipse & du cercle. Je dis que les points $M, m$, où elles rencontrent la ligne $CD$, seront à l'Ellipse, & détermineront par consequent les extremités du diametre $MCm$ donné de position.

Car menant les paralleles $MP$, $NQ$, à $AD$, qui rencontrent les lignes $CA$, $OA$, aux points $P$, $Q$; les triangles semblables $CDO$, $MDN$, & $CDA$, $CMP$, & $ODA$, $ONQ$, donneront $CA.\ CP :: CD.\ CM :: OD.\ ON :: OA.\ OQ$. c'est à dire, $CA.\ CP :: OA.\ OQ$. Et partant si l'on mene la droite $PQ$, elle sera parallele à $OC$; & par consequent aussi à $MN$ supposée parallele à $OC$. Ainsi les paralleles $MP$, $NQ$, seront égales entr'elles. Cela posé, si l'on nomme les données $CA$, $t$; $CB$ ou $AO$ ou $ON$, $c$; & les indéterminées $CP$, $x$; $PM$ ou $NQ$, $y$; on aura $CA\ (t).\ CP\ (x) :: OA\ (c).\ OQ = \frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle $OQN$ réctangle en $Q$, le quarré $\overline{NQ}^2$ ou $\overline{MP}^2\ (yy) = \overline{ON}^2\ (cc) - \overline{OQ}^2\ (\frac{ccxx}{tt})$. La ligne $MP$ sera donc* une ordonnée au diametre $Aa$, & par consequent le point $M$ appartiendra à l'Ellipse qui a pour diametres conjugués les droites $Aa$, $Bb$. Mais à cause des paralleles $NM$, $OC$, $nm$, la ligne $Mm$ est divisée en deux également par le centre $C$; puisque par la proprieté du cercle, $Nn$ l'est au point $O$. Donc le point $m$ appartiendra * aussi à la même Ellipse.

* Art. 42. & 55.

* Art. 50.

Si les diametres conjugués $Aa$, $Bb$, étoient les deux axes, les paralleles $CO$, $PQ$, se confondroient alors avec les lignes $CA$, $AO$, qui n'en feroient qu'une seule; ce qui rendroit la construction & la démonstration un peu plus faciles.

## PROPOSITION XI.

### Problême.

64. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés; en trouver les deux axes* Mm, Ss: *& démontrer qu'il n'y en peut avoir que deux.* FIG. 27.

Ayant mené par l'une des extremités *A* du diametre *Aa*, une parallele *DE* à son conjugué *Bb*, on tirera *AO* perpendiculaire à *DE* & égale à *CB*. Ayant joint *OC*, on menera par son point de milieu *F* la ligne *FG* qui la coupe à angles droits, & qui rencontre au point *G* la ligne *DE*, sur laquelle on prendra de part & d'autre du point *G* les parties *GD*, *GE*, égales chacune à *GO* ou *GC*. Tirant enfin les droites *CD*, *CE*; je dis que les deux axes *Mm*, *Ss*, sont situés sur ces droites.

*Art. 58. Car les deux axes pouvant être regardés * comme deux diametres conjugués, qui font entr'eux un angle droit, ils rencontreront la ligne *DE* en des points *D*, *E*, tels que le cercle décrit de ce diametre passera par les deux points *C*, *O*; puisque le réctangle $DA \times AE$ étant
*Art. 62. égal * au quarré de *AO*, l'angle *DOE* sera droit, aussi-bien que l'angle *DCE*. Or il est évident que c'est précisément ce que l'on vient de faire par le moyen de cette construction; puisque les lignes *GO*, *GC*, *GE*, *GD* étant toutes égales entr'elles, sont les rayons d'un même cercle. Mais comme il ne peut y avoir sur la ligne *DE* que deux points *D*, *E*, qui satisfassent en même temps à ces deux conditions; sçavoir, que l'angle *DCE* & l'angle *DOE* soient chacun droit; il s'ensuit que les diametres conjugués *Mm*, *Ss*, qui font entr'eux un angle droit, seront les mêmes que les axes; & qu'il n'y en peut avoir que deux.

Maintenant pour en déterminer la grandeur, il n'y a qu'à tirer les droites *OD*, *OE*; & par les points *N*, *R*, où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon *OA*, mener
*Art. 63. les paralleles *NM*, *RS*. Car il est évident * que les points *M*, *S*, où elles rencontrent les droites *CD*, *CE*, appartiendront à l'Ellipse qui a pour diametres conjugués les lignes *Aa*, *Bb*; & qu'ainsi ils seront les extremités de ses axes.

COROLLAIRE.

65. Si l'on proposoit de trouver deux diametres conjugués *Mm*, *Ss*, qui fissent entr'eux un angle *MCS* égal à un angle donné ; deux autres diametres conjugués *Aa*, *Bb*, étant donnés. Il est visible que la question se réduiroit à trouver sur la ligne *DE* donnée de position ; deux points *D*, *E*, tels que menant aux deux points *O*, *C*, donnés] hors cette ligne, les droites *DO*, *OE*, *CD*, *CE*, l'angle *DOE* fût droit, & l'angle *DCE* égal à l'angle donné. Mais comme la solution de ce Problême est assez difficile, on l'a renvoyée dans le 10e Livre, & on a suivi ici une autre voye, qui est plus simple ; c'est de trouver d'abord les deux axes, & de s'en servir ensuite pour trouver les deux diametres conjugués qu'on demande, comme l'on va enseigner dans la Proposition suivante.

## PROPOSITION XII.

### Problême.

66. Les *deux axes* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés ; trouver deux diametres conjugués* Mm, Ss, *qui fassent entr'eux l'angle* MCS *égal à un angle donné.* FIG. 28. 29.

Je suppose que les diametres *Mm*, *Ss*, soient en effet ceux qu'on demande, & qu'ils rencontrent aux points *D*, *E*, la ligne droite indéfinie *DE* menée par l'extremité *A* du petit axe *Aa* parallelement au grand *Bb*. Et ayant tiré du centre *C* de l'Ellipse, la ligne *CF*, qui fasse avec *DE* au point *F* l'angle *CFE* égal à l'angle donné *MCS*, je nomme les données *CA*, $t$ ; *CB*, $c$ ; *AF*, $a$ ; & l'inconnuë *AE*, $z$ ; ce qui donne $AD = {}^{*}\frac{cc}{z}$, $CE = \sqrt{tt + zz}$ à cause du triangle réctangle *CAE*. Cela posé. *Art. 62.

Les triangles *FEC*, *CED*, seront semblables ; puisque l'angle au point *E* est commun, & que l'angle *CFE* a

été fait égal à l'angle *MCS*: c'est pourquoi *FE* $(z-a)$. *EC* $(\sqrt{tt+zz})$ :: *EC* $(\sqrt{tt+zz})$. *ED* $(z+\frac{cc}{z})$. D'où en multipliant les extrêmes & les moyens, l'on forme l'égalité $zz-az+cc-\frac{acc}{z}=tt+zz$; & effaçant de part & d'autre $zz$, multipliant ensuite par $z$, & divisant par $a$, il vient $zz-\frac{cc}{a}z+\frac{tt}{a}z+cc=0$. Et en faisant (pour faciliter le calcul) $\frac{cc-tt}{a}=2b$, on changera l'égalité précédente en celle-ci $zz-2bz+cc=0$, ou $zz-2bz+bb=bb-cc$; ce qui donne en extrayant de part & d'autre la racine quarrée $z-b$ ou $b-z=\sqrt{bb-cc}$, & par conséquent l'inconnuë *AE* $(z)=b\pm\sqrt{bb-cc}$. Voici maintenant la construction que cette derniere égalité fournit.

Ayant prolongé le petit axe *Aa* jusqu'au point *O*, en sorte que *AO* soit égale à la moitié *CB* du grand; soit tirée *CF*, qui fasse avec *DE* menée par le point *A* parallelement à *Bb*, l'angle *CFE* égal à l'angle donné. Ayant joint *OF*, soient tirées les droites *OH*, *CG*, perpendiculaires sur *OF*, *CF*, qui rencontrent *DE* aux points *H*, *G* (on n'a point marqué dans les figures 28 & 29, les points *H*, *G*, sur la ligne *DE*; parce que ces figures auroient été trop grandes, & que d'ailleurs il est facile de les y imaginer). Soit décrit du centre *O*, & du rayon *OK*, égal à la moitié de *GH*, partie de *AD* prolongée, comprise entre *G* & *H*, un arc de cercle qui coupe *DE* aux points *K*, *K*; & ayant pris sur *DE* les parties *KD*, *KE*, égales chacune à *KO*, soient tirées par le centre *C* de l'Ellipse, les droites *DC*, *EC*. Je dis que les diametres cherchés *Mm*, *Ss*, sont situés sur ces lignes.

Car à cause des angles droits *FAC*, *FCG*, & *FAO*, *FOH*; on aura $AG=\frac{tt}{a}$, $AH=\frac{cc}{a}$; & partant $GH=\frac{cc-tt}{a}=2b$. Le rayon *OK* qui est égal à la moitié de *HG*, sera donc égal à $b$; & à cause du triangle rectangle

gle $OAK$, on aura $AK = \sqrt{bb-cc}$, & $AE$ ou $KE \mp AK = b \mp \sqrt{bb-cc}$, & $AD$ ou $KD \pm AK = b \pm \sqrt{bb-cc}$. Or cela posé, si l'on multiplie la valeur de $AE$ par celle de $AD$, il vient $AE \times AD = cc = \overline{CB}^2$; & partant * les diametres $Mm$, $Ss$, sont conjugués. Mais le réctangle de $AE + AD$ ou $DE\,(2b)$ par $AE - AF$ ou $EF\,(b \mp \sqrt{bb-cc} - a)$ est $= 2bb \mp 2b\sqrt{bb-cc} - 2ab = 2bb \mp 2b\sqrt{bb-cc} + tt - cc$ en mettant pour $2ab$ sa valeur $cc - tt$; & à cause du triangle réctangle $CAE$ le quarré $\overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CA}^2 = 2bb \mp 2b\sqrt{bb-cc} + tt - cc = DE \times EF$ : ce qui donne $FE.\ EC :: EC.\ ED$. Et partant les triangles $FEC$, $CED$, seront semblables; puisqu'ils ont l'angle au point $E$ commun, & que leurs côtés autour de cet angle sont proportionnels. L'angle $MCS$ sera donc égal à l'angle donné $CFE$. C'est ce qui restoit à démontrer. * Art. 62.

Maintenant pour avoir la grandeur $CM$, $CS$, des deux demi-diametres cherchés; il n'y a qu'à tirer les lignes $OD$, $OE$, & mener par les points $N$, $R$, où elles rencontre le cercle qui a pour rayon $OA$, les paralleles $NM$, $RS$, à $OC$. Car il est visible * que les points $M$, $S$, où elles rencontrent les droites $CD$, $CE$, seront à l'Ellipse, & détermineront par consequent les extremités de ces diametres. * Art. 63.

## COROLLAIRE I.

67. Il suit de cette construction, 1°. Qu'afin que le Problême soit possible, il faut que $OK\,(\frac{cc-tt}{2a})$ surpasse ou soit égale à $AO\,(c)$; car autrement le cercle décrit du rayon $OK$, ne rencontreroit la ligne $DE$ en aucun point, ce qui est neanmoins necessaire pour la construction.

2°. Que lorsque $OK$ surpasse $OA$, on trouve toûjours par le moyen des deux points $K$, $K$, deux differens diametres conjugués $Mm$, $Ss$, qui satisfont également : mais qu'alors le diametre $Ss$ de la figure 29 est égal au diametre $Mm$ de la figure 28. & semblablement posé de l'autre côté de l'axe $Aa$; parce que $AE$ de la figure

29. eſt égal à $AD$ de la figure 28. Et de même que le diametre $Mm$ de la figure 29. eſt égal au diametre $Ss$ de la figure 28. & ſemblablement poſé de l'autre côté de l'axe $Aa$; parce que $AD$ de la figure 29. eſt égal à $AE$ de la figure 28. C'eſt à dire que les deux differens diametres conjugués $Mm$, $Ss$, qui ſatisfont également au Problême, ſont ſemblablement poſés de part & d'autre de l'axe $Aa$, & que dans ces deux differentes poſitions leurs grandeurs demeurent la même.

FIG. 30. 3°. Que lorſque $OK = OA$, les deux points d'interſection $K$, $K$, ſe réüniſſent au point touchant $A$; & qu'ainſi il n'y a alors qu'à prendre les parties $AE$, $AD$, égales chacune à la moitié $CB$ du grand axe : d'où l'on voit qu'il ne peut y avoir alors qu'une ſolution, & que les deux diametres conjugués $Mm$, $Ss$, qui ſatisfont, ſont égaux entr'eux.

### COROLLAIRE II.

FIG. 28. 29. & 30. 68. Il eſt clair auſſi que plus $AF$ ($a$) eſt grande, plus l'angle obtus donné $CFE$ l'eſt auſſi, & plus au contraire la ligne $OK$ ($\frac{ee-tt}{2a}$) diminuë : de ſorte que $AF$ étant la plus grande qu'il eſt poſſible, l'angle obtus $CFE$, ſera auſſi le plus grand; & au contraire la ligne $OK$, ſera la moindre, c'eſt à dire égale à $AO$. Or ſi l'on mene alors

FIG. 30. les droites $Ba$, $ab$; les triangles rectangles $aCB$, $CAD$, $aCb$, $CAE$, ſeront tous égaux entr'eux; puiſque les lignes, $AE$, $AD$, ſont égales chacune à la moitié $CB$ ou $Cb$ de l'axe $Bb$, & que $CA$ eſt égal à $Ca$. L'angle $ACM$, ſera donc égal à l'angle $CaB$, & l'angle $ACS$ à l'angle $Cab$; & partant l'angle donné $MCS$ ou $CFE$, ſera auſſi égal à l'angle $Bab$. D'où l'on voit :

FIG. 28. 29. & 30. 1°. Que ſi l'on mene de l'une des extremités $a$ du petit axe $Aa$ aux extremités $B$, $b$, du grand, les lignes $aB$, $ab$; l'angle obtus donné $CFE$, doit être égal ou moindre que l'angle $Bab$, afin que * le Problême ſoit poſſible.

* Art. 67.

2°. Que lorſqu'il lui eſt égal, comme dans la figure 30.

il n'y a que deux diametres conjugués *Mm*, *Ss*, qui satisfassent, lesquels sont égaux entr'eux.

3°. Que lorsqu'il est moindre, comme dans les fig. 28. & 29. il y a toûjours deux differens diametres conjugués qui satisfont également; qu'ils sont semblablement posés de part & d'autre du petit axe, cet angle demeurant le même entr'eux; & que leur grandeur demeure aussi la même dans ces deux differentes positions.

## PROPOSITION XIII.

### Problême.

69. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés; la décrire par un mouvement continu.*

#### PREMIERE MANIERE.

On cherchera * les deux axes, & on la décrira ensuite selon l'article 36. ** Art. 64.*

#### SECONDE MANIERE.

Ayant mené par l'une des extremités *A* de l'un des diametres donnés *Aa*, une perpendiculaire *AH* sur l'autre *Bb*, on prendra sur cette ligne la partie *AQ* de part ou d'autre du point *A* égale à *CB*. Et aïant tiré la ligne *CQ*, on fera glisser la ligne *GF* égale à *HQ* par ses extremités le long des lignes *Bb*, *CQ* (prolongées de part & d'autre du centre *C* autant qu'il sera necessaire) jusqu'à ce qu'aprés avoir parcouru successivement les quatre angles faits par ces deux lignes, elle revienne dans la même situation d'où elle étoit partie. Je dis que si l'on prend *GM* égal à *AQ*, le point *M* décrira dans ce mouvement l'Ellipse requise. FIG. 31. & 32.

Car menant *GP* parallele à *QA*, qui rencontre en *P* le diametre *Aa*, & en *O* le diametre *Bb*; les triangles semblables *CHQ*, *COG*, & *CAQ*, *CPG*, donneront *CQ*. *CG* :: *AQ* ou *GM*. *GP* :: *HQ* ou *GF*. *GO*. Et par consequent la ligne *PM* sera parallele au diametre *Bb*. Cela posé.

Si l'on nomme les données $CA$, $t$; $AQ$ ou $CB$ ou $Cb$, $c$; & les inconnuës $CP$, $x$; $PM$, $y$; on aura $CA$ $(t)$ $CP$ $(x)$ :: $AQ$ $(c)$. $GP = \frac{cx}{t}$. Et le triangle réctangle $GPM$ donnera $\overline{PM}^2 = \overline{GM}^2 - \overline{GP}^2$, c'est à dire en termes analytiques $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$. La ligne $PM$ sera donc * une ordonnée au diametre $Aa$ dans l'Ellipse qui a pour diametres conjugués les lignes $Aa$, $Bb$. Donc &c.

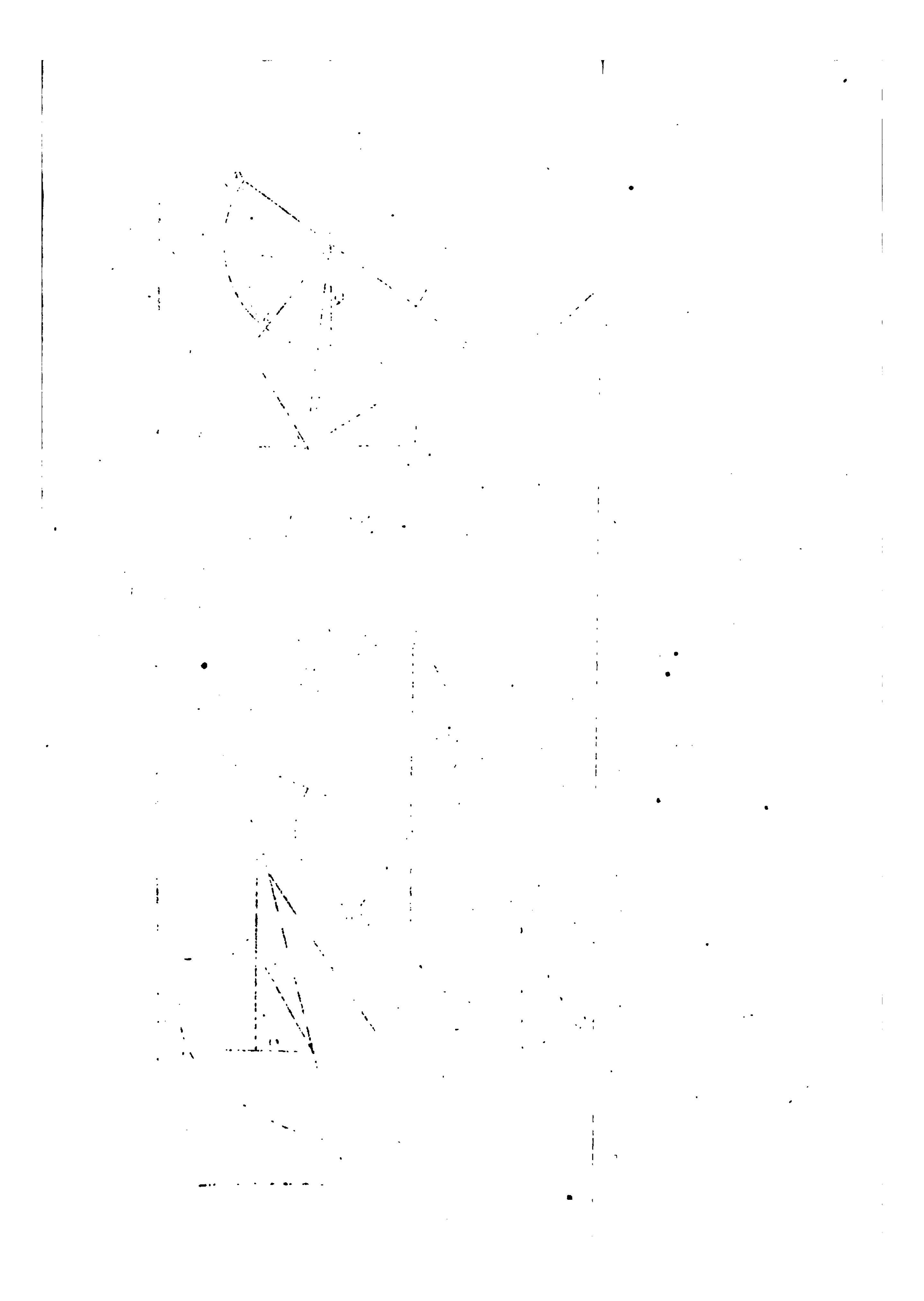
* Art. 41. & 55.

FIG. 33.

Si les deux diametres conjugués $Aa$, $Bb$, étoient les deux axes, il est clair que les lignes $AQ$, $CQ$, tomberoient sur le diametre $Aa$ qui seroit l'un des axes, & que le point $H$ tomberoit sur le centre $C$. D'où l'on voit qu'il faudroit prendre alors $GF$ égale à $CQ$, somme ou difference des deux demi-axes $CA$, $CB$; & la faire glisser par ses extremités le long des axes $Aa$, $Bb$, prolongés s'il est necessaire.

Comme les lignes $Aa$, $Bb$, s'entrecoupent à angles droits au point $C$; il est clair qu'en quelque situation que se trouve la droite $GF$ pendant qu'elle glisse le long de ces lignes, le cercle qui auroit cette ligne pour diametre, passeroit toûjours par le point $C$; & qu'ainsi la ligne $CD$ qui passe par le point $D$ milieu de $FG$, sera toûjours égale à $DF$, puisque les lignes $CD$, $DF$, $DG$, seront toûjours des raïons de ce cercle. Delà naît la description suivante.

Soient deux lignes droites $CD$, $DF$, égales chacune à la moitié de $CQ$, somme ou difference des deux demi-axes $CB$, $CA$; attachées l'une à l'autre par leur extremité commune $D$, en sorte qu'elles se puissent mouvoir autour de ce point, comme les jambes d'un compas autour de sa tête. Soit attachée l'extremité $C$ de la droite $CD$ dans le centre de l'Ellipse; & soit entenduë l'extremité $F$ de l'autre droite $FD$, se mouvoir le long de l'axe $Bb$, en entraînant avec elle la ligne $DC$ mobile autour du point fixe $C$. Il est clair que si l'on prend sur $FD$ (prolongée, s'il est necessaire) la partie $FM$ égale à $CA$, le



point *M* décrira dans ce mouvement l'Ellipse qu'on cherche.

## PROPOSITION XIV.

### Problême.

70. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipse étant donnés ; la décrire par plusieurs points.*

PREMIERE MANIERE.

Ayant mené par l'une des extremités *A* de l'un des diametres donnés *Aa*, une parallele indéfinie *DAD* à son conjugué *Bb*, on tirera *AO* perpendiculaire à *AD*, & égale à la moitié *CB* du diametre *Bb* ; on joindra *OC* ; & on décrira un cercle du centre *O*, & du raïon *OA*. Cela fait on menera librement de part & d'autre de *CA*, autant de lignes *CD*, *CD*, &c. qu'on voudra ; & ayant tiré des points *D*, *D*, &c. où elles rencontrent la ligne *DAD*, au centre *O*, les lignes *DO*, *DO* &c. qui coupent la circonference du cercle aux points *N*, *N*, &c. on menera des droites *NM*, *NM*, &c. paralleles à *OC*, lesquelles rencontrent aux points *M*, *M*, &c. les droites correspondantes *CD*, *CD*, &c. sur lesquelles on marquera de l'autre côté du centre *C* des points *m*, *m* &c. qui en soient également éloignés. Il est évident * que la ligne courbe qui passera par tous les points *M*, *M*, &c ; *m*, *m*, &c. ainsi trouvés, aura pour diametres conjugués les droites *Aa*, *Bb*. FIG. 34. * *Art.* 65.

SECONDE MANIERE.

Ayant pris sur l'un des demi-diametres *CB*, de petites parties *CE*, *EE*, &c. égales entr'elles, de telle grandeur qu'on voudra, & autant que ce demi-diametre en pourra contenir ; on lui menera les perpendiculaires *ED*, *ED*, &c, qui rencontrent la circonference circulaire décrite du centre *C* & du raïon *CB*, aux points *D*, *D*, &c. Ayant joint *AB*, on tirera par celui des points *E*, qui est le plus proche du centre *C*, la ligne *EP* parallele à *AB*, FIG. 35.

qui rencontre $CA$ au point $P$. On prendra sur le diametre $Aa$ de part & d'autre du centre $C$, autant de parties $PP$, $PP$, &c. égales à $CP$, qu'il en pourra contenir; & on menera par tous les points $P$, $P$, &c. des paralleles $MPM$, $MPM$, &c. au diametre $Bb$, sur chacune desquelles on prendra de part & d'autre du point $P$, des parties $PM$, $PM$, égales chacune à sa correspondante $ED$. Je dis que la ligne courbe qui passe par tous ces points $M$, sera l'Ellipse qu'on demande.

Car nommant les données $CA$, $t$; $CB$ ou $CD$, $c$; & les indéterminées $CP$, $x$; $PM$, $y$; on aura à cause des triangles semblables $CAB$, $CPE$, cette proportion $CA$ $(t)$. $CB$ $(c)$ :: $CP$ $(x)$. $CE = \frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle $CED$ réctangle en $E$, le quarré $\overline{ED}^2$ ou $\overline{PM}^2$ $(yy) = \overline{CD}^2$ $(cc) - \overline{CE}^2$ $(\frac{ccxx}{tt})$. La ligne $PM$ sera donc * une ordonnée au diametre $Aa$. Et comme cette démonstration convient à toutes les lignes $PM$; puisque chaque $CP$ est toûjours à sa correspondante $CE$, en raison de $CA$ à $CB$: il s'ensuit que la Courbe qui passe par tous les points $M$ trouvés comme cy-dessus, sera l'Ellipse qu'on demande.

* Art. 42. & 55.



# LIVRE TROISIÉME.

## *De l'Hyperbole.*

### DÉFINITIONS.

1.

AYANT attaché sur un plan en un point $f$ l'une des extremités d'une longue regle $fMO$, en sorte qu'elle puisse tourner librement autour de ce point fixe $f$, comme centre; on attachera à son autre extremité $O$, le bout d'un fil $OMF$, dont la longueur doit être moindre que celle de la regle, & duquel l'autre bout sera attaché en un autre point $F$, pris aussi sur ce plan. Maintenant, si l'on fait tourner la regle $fMO$ autour du point fixe $f$, & qu'en même temps l'on se serve d'un stile $M$ pour tenir le fil $OMF$, toûjours également tendu, & sa partie $MO$ toute jointe & comme collée contre le bord de la regle: la ligne courbe $AX$ décrite dans ce mouvement, est une portion d'*Hyperbole*. FIG. 36.

Si l'on renverse la regle de l'autre côté du point $F$, on décrira de la même sorte l'autre portion $AZ$ de la même Hyperbole.

Mais, si sans changer la longueur de la regle, ni celle du fil, on attache l'extremité de la regle en $F$, & celle du fil en $f$, on décrira en la même sorte une autre ligne courbe $xaz$ opposée à la premiere $XAZ$, qui est encore appellée *Hyperbole*, & les deux ensemble sont nommées *Hyperboles opposées*.

2.

Les deux points fixes $F$, $f$, sont nommés les *Foyers*.

3.

La ligne $Aa$, qui passe par les deux foyers $F$, $f$, & qui est terminée de part & d'autre par les Hyperboles opposées, est appellée le *premier Axe*.

4.

Le point $C$, qui divise par le milieu le premier axe $Aa$, est nommé le *Centre*.

5.

Si l'on mene par le centre *C* une perpendiculaire indéfinie *B b* au premier axe *Aa*; & que du point *A*, comme centre, & de l'intervalle *CF*, on décrive un arc de cercle qui la coupe aux points *B*, *b*: la partie *Bb* de cette perpendiculaire, est appellée le *second Axe*.

6.

Les deux axes *Aa*, *Bb*, sont appellés ensemble *Conjugués*; de sorte que le premier axe *Aa*, est dit *Conjugué* au second *Bb*; & reciproquement le second *Bb*, *Conjugué* au premier *Aa*.

7.

Les lignes *MP*, *MK*, menées des points *M* des Hyperboles opposées parallelement à l'un des axes conjugués, & terminées par l'autre, sont appellées *Ordonnées* à cet autre axe. Ainsi *MP* est *Ordonnée* au premier axe *Aa*, & *MK* au second *Bb*.

8.

La troisiéme proportionnelle aux deux axes, est appellée *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion. Ainsi si l'on fait comme le premier axe *Aa*, est au second axe *Bb*, de même le second axe *Bb*, à une troisiéme proportionnelle *p*; cette ligne *p* sera le Parametre du premier axe *Aa*.

9.

Toutes les lignes qui passent par le centre *C*, sont appellées *Diametres*: ceux qui rencontrent les Hyperboles opposées, *premiers Diametres*, & ceux qui ne les rencontrent point, quoique prolongées à l'infini, *seconds Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre une Hyperbole qu'en un seul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appellée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

REMARQUE.

71. On a dit dans la premiere définition que la longueur du fil $FMO$ doit être moindre ou plus grande que celle de la regle $fMO$; dont la raison est que s'il étoit égal à cette regle, le stile $M$ décriroit dans ce mouvement, une ligne dont tous les points $M$ seroient également distants des deux points $F, f$; puisque retranchant du fil & de la regle, la partie commune $MO$, les restes $MF$, $Mf$, seroient toûjours égaux entr'eux. D'où il est visible que cette ligne ne seroit autre qu'une ligne droite indéfinie $Bb$, menée perpendiculairement à la droite $Ff$ par son point de milieu $C$. FIG. 37.

COROLLAIRE I.

72. Il suit de la définition premiere, que si l'on mene d'un point quelconque $M$, de l'une des Hyperboles opposées, aux deux foyers $F, f$, les droites $MF, Mf$; leur difference sera toûjours la même. Car elle sera toûjours égale à la difference qui se trouve entre la longueur de la regle & celle du fil. FIG. 36.

COROLLAIRE II.

73. Lorsque le point $M$ tombe en $A$, il est visible que $MF$ devient $AF$, & que $Mf$ devient $Af$; & de même, lorsque le point $M$ tombe en $a$, en décrivant l'Hyperbole opposée $xaz$; il est encore visible que $MF$ devient $aF$, & que $Mf$ devient $af$. Donc puisque la difference de ces deux droites est par tout la même, on aura $Af - AF$ ou $Ff - 2AF = aF - af$ ou $Ff - 2af$; & partant $AF = af$. D'où il suit :

1°. Que la distance $Ff$ des foyers, est divisée en deux parties égales par le centre $C$; puisque $CA + AF$ ou $CF = Ca + af$ ou $Cf$.

2°. Que la difference des deux droites $MF, Mf$, est toûjours égale au premier axe $Aa$; puisque dans l'Hyperbole $XAZ$, on a toûjours $Mf - MF = Af - AF$ ou

$Af-af$; & que dans ſon oppoſée $xaz$, on a auſſi toûjours $MF-Mf=aF-af$ ou $aF-AF$.

## COROLLAIRE III.

74. Il ſuit de la définition cinquiéme.

1°. Que le ſecond axe $Bb$, eſt diviſé en deux parties égales par le centre $C$; car les triangles réctangles $ACB$, $ACb$, ſeront égaux, puiſqu'ils ont des hypothenuſes égales $AB$, $Ab$, & le côté $AC$ commun.

2°. Que ſi l'on prend ſur le ſecond axe $Bb$, la partie $CE$ égale à la moitié $CA$ du premier, & qu'on tire l'hypothenuſe $AE$: le ſecond axe $Bb$ ſera plus grand, égal, ou moindre que le premier $Aa$; ſelon que la droite $CF$, eſt plus grande, égale, ou moindre que l'hypothenuſe $AE$; parce que l'hypothenuſe $Ab$, priſe égale à $CF$, ſe trouvera auſſi pour lors plus grande, égale, ou moindre que l'hypothenuſe $AE$.

3°. Que ſi l'on prend ſur le premier axe $Aa$ de part & d'autre du centre $C$, les parties $CF$, $cf$, égales chacune à l'hypothenuſe $AB$ du triangle réctangle $CAB$, formé par les deux demi-axes $CA$, $CB$: les points $F$, $f$, ſeront les deux foyers.

## COROLLAIRE IV.

75. Les mêmes choſes étant poſées, ſi l'on nomme $CF$ ou $AB$, $m$; $CA$, ou $Ca$, $t$; le triangle réctangle $ACB$, donnera $\overline{BC}^2=mm-tt$. Or $AF=m-t$, & $Fa=m+t$; & partant $AF\times Fa=mm-tt$. D'où il eſt évident que le quarré de la moitié $CB$ du ſecond axe $Bb$, eſt égal au réctangle de $AF$ par $Fa$ parties du premier axe $Aa$, priſes entre l'un des foyers $F$, & ſes deux extremités $A$, $a$.

## COROLLAIRE V.

76. Il ſera maintenant facile de décrire les Hyperboles oppoſées dont les deux axes $Aa$, $Bb$, ſont donnés, & dont l'on ſçait que l'axe $Aa$ doit être le premier. Car

ayant trouvé * sur le premier axe $Aa$, les foyers $F, f$, * *Art.* 74.
on attachera dans le point $F$, le bout d'un fil $FMO$, duquel l'autre bout $O$, sera lié à l'extremité d'une longue regle $OMf$, mobile sur son autre extremité $f$ autour du foyer $f$, & dont la longueur $OMf$ doit * être moindre ou * *Art.* 71.
plus grande que la longueur du fil $OMF$, de la ligne $Aa$. Ayant ensuite décrit par le moyen de cette regle & de ce fil, deux Hyperboles opposées $XAZ$, $xaz$, comme l'on a enseigné dans la définition premiere, il est évident qu'elles auront pour premier axe, la ligne $Aa$, & pour second, la ligne $Bb$. Et c'est ce qu'on demandoit.

Plus la regle $OMf$ sera longue, & plus les portions des Hyperboles opposées, qu'on décrira par le moyen de cette regle, seront grandes; de sorte qu'on les peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également la longueur de la regle & celle du fil.

## PROPOSITION I.

### Theorême.

77. *Si l'on mene l'ordonnée* MP *au premier axe* Aa, *& qu'on prenne sur cet axe prolongé la partie* AD *égale à* MF, *du côté du foyer* F, *lorsque le point* M *tombe sur l'Hyperbole* XAZ, *& du côté du foyer* f *lorsqu'il tombe sur son opposée* xaz; *je dis que* CA. CF :: CP. CD.

Ayant nommé comme auparavant les données $CA$ ou $Ca$, $t$; $CF$, ou $Cf$, $m$; & de plus les indéterminées $CP$, $x$; $PM$, $y$; & l'inconnuë $CD$, $z$; on aura dans le premier cas, $AD$ ou $MF = z - t$, $aD$ ou $Mf = z + t$, $FP = x - m$ ou $m - x$ (selon que le point $P$ tombe au dessous ou au dessus du foyer $F$), $Pf = x + m$: & dans le second cas, $AD$ ou $MF = z + t$, $aD$ ou $Mf = z - t$, $FP = x + m$, $Pf = x - m$ ou $m - x$ selon que le point $P$ tombe au dessus ou au dessous du foyer $f$.

Cela posé, le triangle réctangle $MPF$ donnera $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$; sçavoir, — dans le premier

cas, $+$ dans le second; & l'autre triangle réctangle $MPf$ donnera $zz \pm 2tz + = yy + xx \pm 2mx + mm$; sçavoir, $+$ dans le premier, & $-$ dans le second.

Maintenant, si l'on retranche par ordre dans le premier cas, chaque membre de la premiere équation de ceux de la seconde; & au contraire dans le second cas, chaque membre de la seconde de ceux de la premiere, il vient $4tz = 4mx$; d'où l'on tire $CD\ (z) = \frac{mx}{t}$. Donc $CA\ (t).\ CF\ (m) :: CP\ (x).\ CD\ (z)$. *Ce qu'il falloit &c.*

COROLLAIRE.

78. Il est évident que si l'on nomme les données $CA$ ou $Ca$, $t$; $CF$ ou $Cf$, $m$; & l'indéterminée $CP$, $x$; on aura toûjours $MF = \frac{mx}{t} - t$, & $Mf = \frac{mx}{t} + t$, lorsque le point $M$ tombe sur l'Hyperbole $XAZ$, qui a pour foyer le point $F$: & qu'au contraire on aura $MF = \frac{mx}{t} + t$, & $Mf = \frac{mx}{t} - t$, lorsque le point $M$ tombe sur son opposée $xaz$, qui a pour foyer le point $f$.

## PROPOSITION II.

### Theorême.

79. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* PM, *au premier axe* Aa, *est au réctangle de* AP *par* Pa, *parties de cet axe prolongé, comme le quarré de son conjugué* Bb, *est au quarré du premier axe* Aa.

*Il faut prouver que* $\overline{PM}^2.\ AP \times Pa :: \overline{Bb}^2.\ \overline{Aa}^2$.

Les mêmes choses étant posées que dans la Proposition précédente, si l'on met dans l'équation $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$ que l'on a trouvée * par le moyen du triangle réctangle $MPF$, à la place de $z$, sa valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toûjours celle-cy $ttyy = mmxx - mmtt - ttxx + t^4$, laquelle étant réduite à une proportion, donne $\overline{PM}^2\ (yy).\ AP \times Pa\ (xx - tt) ::$

* Art. 77.

$\overline{BC}^2$ * $(mm-tt)$. $\overline{CA}^2$ $(tt)$ :: $\overline{Bb}^2$. $\overline{Aa}^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.* *Art. 75.

COROLLAIRE I.

80. Si l'on mene une ordonnée $MK$ au second axe $Bb$, lequel j'appelle $2c$; il est clair que $MK = CP$ $(x)$, & que $CK = PM$ $(y)$. Or $\overline{PM}^2$ $(yy)$. $AP \times Pa$ $(xx-tt)$ :: $\overline{Bb}^2$ $(4cc)$. $\overline{Aa}^2$ $(4tt)$. Et partant $4ccxx = 4cctt + 4ttyy$; ce qui donne cette proportion $\overline{MK}^2$ $(xx)$. $\overline{CK}^2 + \overline{CB}^2$ $(yy+cc)$ :: $\overline{Aa}^2$ $(4tt)$. $\overline{Bb}^2$ $(4cc)$.

C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque $MK$ au second axe $Bb$, est au quarré de $CK$, joint au quarré de $CB$ moitié du second axe $Bb$, comme le quarré de son conjugué $Aa$, est au quarré de ce second axe $Bb$.

COROLLAIRE II. FONDAMENTAL.

81. Si l'on nomme le premier ou second axe $Aa$, $2t$; son conjugué $Bb$, $2c$; son parametre $p$; chacune de ses ordonnées $PM$, $y$; & chacune de ses parties $CP$, prises entre le centre & les rencontres des ordonnées, $x$; on aura toûjours* $\overline{PM}^2$ $(yy)$. $\overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$ $(xx \mp tt)$ :: $\overline{Bb}^2$ $(4cc)$. $\overline{Aa}^2$ $(4tt)$ :: $p$. $Aa$ $(2t)$. puisque selon la définition du parametre $Aa$ $(2t)$. $Bb$ $(2c)$ :: $Bb$ $(2c)$. $p = \frac{4cc}{2t}$. où l'on doit observer que c'est le signe $-$ lorsque l'axe $Aa$ est le premier, & qu'ainsi on peut substituer alors à la place de $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$, le réctangle $AP \times Pa$ qui lui est égal; & au contraire que c'est le signe $+$ lorsque l'axe $Aa$ est le second. D'où en multipliant d'abord les Extrêmes & les Moyens de la premiére proportion $yy$. $xx \mp tt$ :: $4cc$. $4tt$. ensuite de l'autre $yy$. $xx \mp tt$ :: $p$. $2t$. l'on tire $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, & $yy = \frac{pxx}{2t} \mp \frac{1}{2}pt$. Or comme cette proprieté convient également à tous les points des Hyperboles opposées, & qu'elle en

FIG. 38. & 39.

*Art. 79. & 80.

détermine la poſition par rapport aux axes ; il s'enſuit que l'équation $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, ou $yy = \frac{pxx}{2t} \mp \frac{1}{2}pt$, en exprime parfaitement la nature par raport à ſes axes.

## COROLLAIRE III.

82. Si l'on mene deux ordonnées quelconques *MP*, *NQ* à l'axe *Aa*, il eſt clair que $\overline{MP}^2 . \overline{QN}^2 :: \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 . \overline{CQ}^2 \mp \overline{CA}^2$. Car $\overline{PM}^2 . \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2 :: \overline{QN}^2 . \overline{CQ}^2 \mp \overline{CA}^2$. Donc &c.

Il eſt bon de remarquer encore qu'on peut ſubſtituer à la place de $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$, & $\overline{CQ}^2 - \overline{CA}^2$, les réctangles $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$ qui leur ſont égaux ; ce qu'il faut toûjours obſerver dans la ſuite.

## COROLLAIRE. IV.

83. Si l'on mene par un point quelconque *P* de l'un ou de l'autre axe *Aa* ( prolongé lorſque c'eſt le premier ) une parallele *MPM* à ſon conjugué *Bb* ; elle rencontrera une Hyperbole ou les Hyperboles oppoſées en deux points *M*, *M*, également éloignés de part & d'autre du point *P*, & non en davantage. Car afin que les points *M*, *M*, ſoient à une Hyperbole ou aux Hyperboles oppoſées, il faut * que les quarrés de *PM* ($y$) priſes de part & d'autre de l'axe *Aa*, ſoient égaux chacun à la même quantité $\frac{ccxx}{tt} \mp cc$.

* Art. 81.

## COROLLAIRE V.

Fig. 38. & 39.

84. Il ſuit de ce que $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, que plus *CP* ($x$) priſe de part ou d'autre du centre *C*, devient grande, plus auſſi chaque ordonnée *PM* ($y$) priſe de part & d'autre de l'axe *Aa*, augmente, & cela à l'infini ; & qu'au contraire plus *CP* ($x$) devient petite, plus auſſi *PM* ($y$) diminuë ; de ſorte que (*fig.* 38.) *CP* ($x$) étant égale à *CA* ou *Ca* ($t$) lorſque l'axe *Aa*, eſt le premier,

*PM* ($y$) devient alors nulle ou zero; & que (*fig.* 39.) *CP* ($x$) étant nulle ou zero, lorſque l'axe *Aa* eſt le ſecond, chaque *PM* ($y$) qui devient alors *CB* ou *Cb* ($c$), eſt la moindre de toutes les ordonnées *PM* ($y$) priſes de part & d'autre du centre. D'où il eſt clair :

1°. Que ſi l'on mene (*fig.* 39.) par les extremités *B*, *b*, du premier axe *Bb*, des paralleles au ſecond *Aa*; elles ſeront tangentes en ces points.

2°. Que les Hyperboles oppoſées s'éloignent de part & d'autre de plus en plus à l'infini de leurs axes conjugués, en commençant par les extremités du premier : avec cette difference neanmoins que le premier axe rencontre chacune des Hyperboles oppoſées en un point, & qu'étant prolongé il paſſe au dedans; au lieu que le ſecond tombe tout entier entre les Hyperboles oppoſées, & ne les rencontre jamais, quoique prolongé à l'infini.

## COROLLAIRE VI.

85. IL ſuit encore de ce que $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, que ſi l'on prend les points *P*, *P*, également éloignés de part & d'autre du centre *C*, les ordonnées *PM*, *PM*, ſeront égales. D'où il eſt clair que ſi une ligne droite *MM*, terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, eſt coupée en deux également par un axe *Bb* en un point *K* autre que le centre, elle ſera parallele à ſon conjugué *Aa*. Car menant des paralleles *MP*, *MP*, à l'axe *Bb*, la ligne *PP*, ſera coupée par le milieu en *C*, puiſque *MM* l'eſt en *K*; & partant les ordonnées *PM*, *PM*, ſeront égales. La droite *MM* ſera donc parallele à l'axe *Aa*.

## COROLLAIRE VII.

86. SI l'on conçoit que le plan ſur lequel les Hyperboles oppoſées ſont tracées, ſoit plié le long de l'axe *Aa*, en ſorte que ſes deux parties ſe joignent; il eſt clair (*fig.* 39.) lorſque l'axe *Aa* eſt le ſecond, que les

deux Hyperboles oppoſées tomberont éxactement l'une ſur l'autre ; ſçavoir, les points *B*, *M*, &c. ſur les points *b*, *M*, &c. puiſque * toutes les perpendiculaires *Bb*, *MM* à cet axe, ſont coupées par le milieu aux points *C*, *P*, &c.

* *Art.* 83.

Par la même raiſon (*fig.* 38.) lorſque l'axe *Aa* eſt le premier, les portions des Hyperboles oppoſées qui ſont de part & d'autre de cet axe, tomberont éxactement l'une ſur l'autre.

## AVERTISSEMENT.

On a ſuivi juſqu'ici la même methode que dans l'Ellipſe, & on auroit pû la continuer juſqu'à la fin ; mais comme il faut néceſſairement parler de certaines lignes particulieres à l'Hyperbole, & qu'on peut par leur moïen prouver les mêmes choſes d'une maniere plus aiſée, on a pris ce dernier parti.

## DE'FINITIONS.

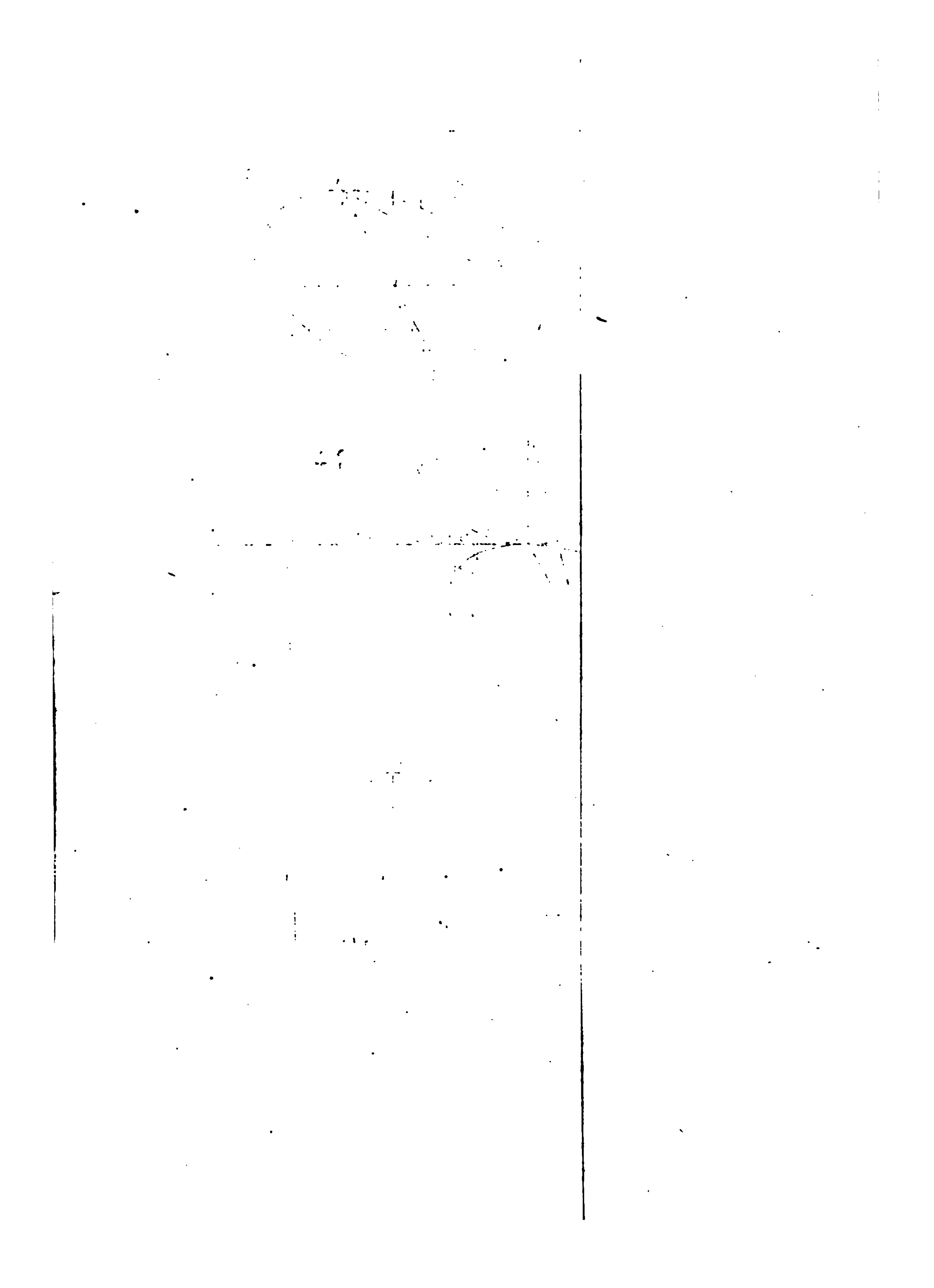
II.

FIG. 40. Si l'on mene du centre *C* deux droites indéfinies *CG*, *Cg*, paralleles aux lignes *Ab*, *AB*, menées de l'extremité *A* du premier axe *Aa*, aux deux extremités *B*, *b*, du ſecond : ces deux droites ſeront appellées les *Aſymptotes* de l'Hyperbole *MAM* ; & ſi on les prolonge indéfiniment de l'autre côté du centre, elles ſeront nommées les *Aſymptotes* de l'Hyperbole oppoſée *MaM*.

12.

Le quarré de la partie *CG*, ou *Cg*, d'une aſymptote, compriſe entre le centre *C*, & la rencontre de la ligne *AB*, ou *Ab*, menée de l'extremité *A* du premier axe, à l'extremité *B*, ou *b*, du ſecond, eſt appellé la *Puiſſance* de l'Hyperbole *MAM*, ou de ſon oppoſée *MaM*.

COROLLAIRE I.



## COROLLAIRE I.

87. Il est évident que l'angle $GCg$, fait par les asymptotes d'une Hyperbole, ou son égal $BAb$, est moindre, égal, ou plus grand qu'un droit; selon que le second axe $Bb$ est moindre, égal, ou plus grand que le premier $Aa$. Car lorsque le premier axe $Aa$ surpasse le second $Bb$, sa moitié $CA$, surpasse la moitié $CB$ du second; & par conséquent dans le triangle réctangle $CAB$, l'angle $CAB$ est moindre qu'un demi-droit. Les deux angles égaux $CAB$, $CAb$, qui font ensemble l'angle $BAb$, seront donc moindres qu'un droit. Les deux autres cas se démontrent de la même maniére.

## COROLLAIRE II.

88. A cause des triangles semblables $BAb$, $BGC$, il est clair que la ligne $AB$ est divisée par l'asymptote $CG$ en deux parties égales au point $G$, & que $CG$ est la moitié de $Ab$; puisque $BC$ est la moitié de $Bb$. On prouvera de même que $Ab$ est divisée par l'asymptote $Cg$ en deux parties égales au point $g$, & que $Cg$ est la moitié de $AB$. Donc toutes les lignes $CG$, $GA$, $GB$, $Cg$, $gA$, $gb$, sont égales entr'elles; puisqu'elles sont égales chacune à la moitié de l'une ou l'autre des lignes $AB$, $Ab$, que l'on sçait être égales entr'elles, suivant la définition 5[e].

## COROLLAIRE III.

89. La puissance d'une Hyperbole est égale à la quatriéme partie de la somme des quarrés des deux demi-axes. Car nommant $CA$, $t$; $CB$, $c$; $CG$, $m$; on aura *$BA = 2m$, & à cause du triangle réctangle $ACB$, le quarré $\overline{AB}^2$ $(4mm) = tt + cc$. Et par conséquent $\overline{CG}^2$ $(mm) = \frac{tt+cc}{4}$. *Art. 88.

## PROPOSITION III.

### Theorême.

FIG. 40.

90. *Si l'on mene par un point quelconque* M *de l'une ou de l'autre des Hyperboles opposées, une ligne droite* R r *perpendiculaire au premier axe* A a *qu'elle rencontre en* P, *& terminée par les asymptotes en* R *&* r; *je dis que le rectangle de* R M *par* M r, *est égal au quarré de* B C, *moitié du second axe* B b.

*Il faut prouver que* $RM \times Mr = \overline{BC}^2$.

Nommant les connuës $CA$, $t$; $CB$, $c$; & les indéterminées $CP$, $x$; $PM$, $y$; les triangles semblables $ACB$, $CPr$, & $ACb$, $CPR$, donnent $CA(t).CB$ ou $Cb(c)::CP(x).Pr$, ou $PR=\frac{cx}{t}$. Donc $RM$, ou $PR \pm PM = \frac{cx}{t} \pm y$; & $Mr$, ou $Pr \mp PM = \frac{cx}{t} \mp y$. Et par conséquent $RM \times Mr = \frac{ccxx}{tt} - yy = \overline{BC}^2 (cc)$ en mettant pour $yy$ sa valeur * $\frac{ccxx}{tt} - cc$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 81.

### COROLLAIRE I.

91. Il est clair que $\overline{PM}^2 \left(\frac{ccxx}{tt} - cc\right)$ est toûjours moindre que $\overline{PR}^2$ ou $\overline{Pr}^2 \left(\frac{ccxx}{tt}\right)$; Et par conséquent que tous les points des Hyperboles opposées, tombent dans les angles faits par leurs asymptotes; de sorte qu'il n'en peut tomber aucun dans les angles d'à côté.

### COROLLAIRE II.

92. Si l'on mene par deux points quelconques $M$, $N$, d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux lignes droites $Rr$, $Kk$, perpendiculaires au premier axe, & terminées par les asymptotes: il est évident que les réctangles $RM \times Mr$, $KN \times Nk$, seront toûjours égaux entr'eux; puisqu'ils sont égaux chacun au quarré de la

moitié $BC$ du second axe $Bb$. D'où l'on voit que $RM. KN :: Nk. Mr$.

## PROPOSITION IV.

### Theorême.

93. *Si l'on mene par deux points quelconques* M, N, *d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux droites* Hh, Ll, *paralleles entr'elles, & terminées par les asymptotes; je dis que les réctangles* HM×Mh, LN×Nl, *seront égaux entr'eux.*

*Il faut prouver que* HM×Mh = LN×Nl.

Ayant mené les droites $Rr$, $Kk$, perpendiculaires au premier axe $Aa$, il est clair que les triangles $MRH$, $NKL$, & $Mrh$, $Nkl$, sont semblables; puisqu'ils sont formés par des paralleles. On aura donc $RM. KN :: HM. LN$. Et $Nk. Mr :: Nl. Mh$. Or * $RM. KN :: Nk. Mr$. Donc $HM. LN :: Nl. Mh$. Et par conséquent $HM \times Mh = LN \times Nl$. *Ce qu'il falloit &c.* * Art. 92.

### COROLLAIRE. I.

94. Si l'on suppose que la ligne $NL$ parallele à $MH$, passe par le centre $C$, c'est à dire, qu'elle devienne $CE$: il est clair que les deux points $L$, $l$, se réüniront au centre $C$; & partant que le réctangle $LN \times Nl$, deviendra le quarré $\overline{EC}^2$. D'où l'on voit que si l'on mene d'un point quelconque $E$, de l'une des Hyperboles opposées au centre $C$, la droite $CE$, & par un autre point quelconque $M$ de l'une ou de l'autre de ces Hyperboles, une ligne $MHh$, parallele à $CE$, & qui rencontre les asymptotes en $H$ & $h$; le quarré de $CE$ sera égal au réctangle de $HM$ par $Mh$.

### COROLLAIRE II.

95. Si l'on mene par un point quelconque $N$, de l'une des Hyperboles opposées, une ligne droite $Ll$, terminées par les asymptotes, & qui rencontre l'une ou

l'autre de ces Hyperboles en un autre point *n*; les parties *LN*, *ln*, de cette droite prises entre les points des Hyperboles & la rencontre des asymptotes, seront égales entr'elles. Car nommant *LN*, *a*; *Nn*, *b*; *nl*, *c*; on aura $LN \times Nl\ (ab \mp ac) = HM \times Mh = Ln \times nl.\ (bc \mp ac)$, d'où l'on tire $LN\ (a) = ln\ (c)$.

## COROLLAIRE III.

96. Si l'on suppose dans le Corollaire précedent que la ligne *Nn*, terminée par les Hyperboles opposées, passe par le centre *C*, c'est à dire, qu'elle devienne le premier diametre *ED*: il est évident que les deux points *L*, *l*, se réüniront au centre *C*; & qu'ainsi *NL* deviendra *EC*, & *nl*, *CD*. D'où l'on voit que tout premier diametre *DE*, est divisé en deux également par le centre *C*.

## COROLLAIRE IV.

97. Si deux lignes droites *Mm*, *Nn*, paralleles entr'elles, sont terminées par une Hyperbole ou par les Hyperboles opposées, & rencontrent une asymptote aux points *H*, *L*; je dis que les réctangles $MH \times Hm$, $NL \times Ln$, seront égaux entr'eux. Car prolongeant, s'il est necessaire, ces deux lignes, jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'autre asymptote aux points *h*, *l*; les parties *MH*, *mh*, & *NL*, *nl*, seront égales * entr'elles: & partant, puisque $HM \times Mh = LN \times Nl$, il s'ensuit que $MH \times Hm = NL \times Ln$.

* Art. 95.

## PROPOSITION V.

### Theorême.

FIG. 41.

98. Si *l'on mene par deux points quelconques* M, N, *d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux droites* MH, NL; *paralleles entr'elles & terminées par un asymptote; & deux autres droites* Mh, Nl, *aussi paralleles entr'elles, & terminées par l'autre asymptote; je dis que les réctangles*

HM×Mh, NL×Nl, *sont égaux entr'eux*.

Cette Proposition se prouve de la même maniere que la précedente, & il n'y a rien à changer dans la démonstration.

## COROLLAIRE I.

99. Si les droites *MH*, *Mh*, & *NL*, *Nl*, sont paralleles aux deux asymptotes; il est clair que les parallelogrammes *MHCh*, *NLCl*, aussi-bien que les triangles *CHM*, *CLN*, qui en sont les moitiés, sont égaux entr'eux; puisque les côtés de ces parallelogrammes autour des angles égaux *HMh*, *LNl*, sont réciproquement proportionnels. FIG. 42.

## COROLLAIRE II.

100. Les mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précedent, il est visible que $CH \times HM = CL \times LN$; puisque dans cette supposition $Mh = CH$, & $Nl = CL$: c'est à dire, que si l'on mene par deux points quelconques *M*, *N*, de l'une, ou des Hyperboles opposées, deux droites *MH*, *NL*, paralleles à l'une des asymptotes, & terminées par l'autre; les réctangles $CH \times HM$, $CL \times LN$, seront toûjours égaux entr'eux; & qu'ainsi *CH. CL :: LN. MH.*

## COROLLAIRE III.

101. Puisque l'extremité *A* du premier axe, est un des points de l'Hyperbole, & que la ligne *AB*, qui coupe en *G*, l'asymptote *CG*, est parallele à l'autre asymptote *Cg*; il s'ensuit * que le réctangle $CH \times HM$ sera toûjours égal au même réctangle $CG \times GA$, ou * au quarré $\overline{CG}^2$, c'està dire, selon la définition 12e, à la puissance de l'Hyperbole. Si donc l'on nomme la donnée *CG*, *m*; & les indéterminées *CH*, *x*; *HM*, *y*; on aura toûjours $CH \times HM\ (xy) = \overline{CG}^2\ (mm)$. Or comme cette proprieté convient également à tous les points des Hyperboles opposées, & qu'elle en détermine la position par

* Art. 100.
* Art. 88.

rapport à ses asymptotes ; il s'ensuit que l'équation $xy = mm$ en exprime parfaitement la nature par rapport à ses asymptotes.

## COROLLAIRE IV.

102. Il suit de ce que $HM\ (y) = \frac{mm}{x}$, que plus $CH$ $(x)$ augmente, plus au contraire $HM\ (y)$ diminuë ; de sorte que $CH\ (x)$ étant infiniment grande, $HM\ (y)$ sera alors infiniment petite, c'est à dire, nulle ou zero. D'où l'on voit que l'Hyperbole $AM$, & son asymptote $CH$ (étant prolongées) s'approchent de plus en plus, de sorte qu'enfin leur distance devient moindre qu'aucune donnée ; & que cependant elles ne se peuvent jamais rencontrer, puisqu'elles ne se joignent que dans l'infini où l'on ne peut jamais arriver. Il en est de même pour l'autre asymptote $Cg$.

## COROLLAIRE V.

103. Entre toutes les lignes qui passent par le centre $C$, 1°. Celles qui, comme $Aa$, tombent dans les angles faits par les asymptotes du côté des Hyperboles, rencontrent chacune des Hyperboles opposées en un seul point $A$, ou $a$ ; & étant prolongées, elles passent au dedans de ces Hyperboles. Car à cause des angles $GCA$, $gCA$, & de leurs opposés au sommet, il est clair que la ligne $Aa$, s'éloigne de plus en plus de l'un & de l'autre asymptote ; au lieu que
* Art. 102. les Hyperboles opposées s'en approchent toûjours * de plus en plus. 2°. Celles qui, comme $Bb$, tombent dans les angles d'à côté, faits aussi par les asymptotes, ne peuvent jamais rencontrer les Hyperboles opposées, quoiqu'on les prolonge à l'infini ; puisqu'aucun des points des
* Art. 9[illegible]. Hyperboles * ne peut tomber dans ces angles.
* Def. 9. D'où l'on voit * que tous les premiers diametres, tombent dans les angles faits par les Asymptotes du côté des Hyperboles, & que les seconds tombent dans les angles d'à côté.

## COROLLAIRE VI.

104. Si l'on mene par un point quelconque *H*, de l'une des asymptotes *CE*, une parallele *HM*, à l'autre *Ce*; elle ne rencontrera l'Hyperbole qu'en un seul point *M*; & étant continuée, elle passera au dedans. Car sa distance de *Ce*, demeure par tout la même, au lieu que l'Hyperbole s'en approche * toûjours de plus en plus. FIG. 43. * *Art.* 102.

## COROLLAIRE VII.

105. De-là il est évident que si par un point quelconque *M*, d'une Hyperbole, l'on mene deux droites indéfinies *MH*, *Mh*, paralleles à ses asymptotes *Ce*, *CE*.

1°. Tous les points de l'Hyperbole qui lui est opposée, tomberont dans l'angle *HMh*; puisqu'ils tombent tous * dans l'angle fait par ses asymptotes, lequel est renfermé dans l'angle *HMh*. * *Art.* 91.

2°. Les deux portions de l'Hyperbole, tomberont dans les deux angles à côté de celui-ci; ainsi aucun de ses points ne tombera dans l'angle opposé au sommet à l'angle *HMh*.

3°. Toutes les lignes qui, comme *MF*, tombent dans l'angle *HMh*, rencontrent (étant prolongées du côté de *F*) l'Hyperbole opposée en un point *N*, & passent au dedans; puisqu'elles s'écartent de plus en plus des droites *MH*, *Mh*, & par consequent de ses deux asymptotes qui leur sont paralleles: mais étant prolongées de l'autre côté du point *M*, elles entrent au dedans de l'Hyperbole qui passe par ce point, & ne la rencontrent jamais ailleurs.

4°. Toutes les lignes qui, comme *Ee*, tombent dans les angles à côté de l'angle *HMh*, rencontrent les deux asymptotes de l'Hyperbole qui passe par le point *M*; ainsi lorsqu'elles passent au dedans de l'une de ses portions, elles la rencontrent necessairement en quelque point *N*, puisqu'elles vont rencontrer l'asymptote qui tombe au dehors de cette portion.

## COROLLAIRE VIII.

106. 1°. Si l'on mene par un point quelconque *M*, d'une Hyperbole, une ligne droite *Ff*, qui rencontre l'une de ses asymptotes au point *F*, & l'une des asymptotes de l'Hyperbole opposée au point *f*; & qu'on la prolonge en *N*, en sorte que *fN*, soit égale à *FM*: je dis que le point *N*, sera à l'Hyperbole opposée. Car la ligne *Ff*, tombe dans l'angle *HMh*, & rencontre par conséquent l'Hyperbole opposée en quelque point *N*, comme l'on vient de démontrer dans le Corollaire précedent. Donc * &c.

* Art. 95.

2°. Si l'on mene par un point quelconque *M*, d'une Hyperbole, une ligne droite *Ee*, terminée par ses asymptotes, & qu'on prenne sur cette ligne, la partie *eN*, égale à *EM*: je dis que le point *N*, sera encore l'un des points de cette Hyperbole. Car menant *MH*, parallele à l'asymptote *Ce*, & terminée par l'autre en *H*, si l'on prend sur cette autre asymptote, la partie *CL*, égale à *HE*, & qu'on tire *LN*, parallele à *HM*; on a démontré dans l'article 104 qu'elle rencontrera l'Hyperbole en un point *N*, & dans l'article 100. que ce point sera tel que *CL* ou *HE*. *HM* :: *CH* ou *EL*. *LN*; d'où l'on voit que la ligne *LN*, rencontre l'Hyperbole dans le même point où elle rencontre la droite *Ee*. Mais à cause des paralleles *HM*, *LN*, il est clair que *eN* = *EM*, puisque *CL* = *HE*. Donc &c.

## PROPOSITION VI.

### Problême.

FIG. 43.

107. D'UN *point donné* M, *sur une Hyperbole dont les asymptotes* CE, Ce, *sont données; mener la tangente* DMd; *& démontrer qu'on n'en peut mener qu'une seule.*

Ayant mené du point donné *M*, une parallele *MH*, à l'une des asymptotes *Ce*, & terminée par l'autre *CE*, au point *H*; on prendra sur cette asymptote, la partie

*HD*,

*HD* égale à *HC*; on tirera par le point donné *M*, la droite *DM*, qui rencontre l'asymptote *Ce* en un point *d*. Je dis en premier lieu, que cette ligne *DMd*, touchera l'Hyperbole au point *M*.

Car à cause des triangles semblables *CDd*, *HDM*; la ligne *Dd*, terminée par les asymptotes, est divisée en deux parties égales par le point *M*, de même que *CD*, l'est en *H*. Or s'il étoit possible qu'elle rencontrât l'Hyperbole en un autre point *O*, il est clair que *Od*, seroit * égale à *MD*, & par consequent à *Md*, c'est à dire, la partie au tout; ce qui ne pouvant être, il s'ensuit que la ligne *DMd*, ne peut rencontrer l'Hyperbole, qu'au seul point *M*. De plus, si elle passoit au dedans, comme la ligne *Ee*, il est visible qu'elle rencontreroit la portion de l'Hyperbole, au dedans de laquelle elle passeroit en quelque point *N*; puisqu'elle iroit, rencontrer en un point *e*, l'asymptote *Ce*, qui tombe * au dehors de cette portion. Il est donc évident que la ligne *Dd*, ne rencontre l'Hyperbole, qu'au seul point *M*, & qu'elle n'entre point au dedans; c'est à dire, qu'elle est tangente en ce point.

* Art. 95.

* Art. 91.

Je dis en second lieu, qu'il n'y a que la seule ligne *DMd*, qui puisse toucher l'Hyperbole au point *M*; car si l'on prend sur l'asymptote *CE*, la partie *HE*, plus grande ou moindre que *HD*, & qu'on tire par le point donné *M*, la droite *EM*, qui rencontre l'autre asymptote *Ce*, au point *e*, il est clair à cause des paralleles *MH*, *Ce*, que *ME* sera plus grande ou moindre que *Me*; puisque *HE* a été prise plus grande ou moindre que *HD* ou que *HC*. Or cela posé, si l'on prend sur la plus grande partie *Me*, le point *N*, en sorte que *Ne* soit égale à *ME*, il est évident que ce point * sera encore à l'Hyperbole, & qu'ainsi la ligne *Ee*, ne la touchera point au point *M*. Ce qui restoit à démontrer.

* Art. 106.

## REMARQUE.

108. On a démontré dans l'art. 102. que plus *CH* devient grande, plus au contraire *HM* diminuë; de ſorte que *CH* étant infiniment grande, *HM* devient infiniment petite, c'eſt à dire, nulle ou zero. Or *CH* étant infiniment grande, *HD* (qui lui eſt égale) la ſera auſſi; & par conſequent les lignes *MD*, *HD*, qui ne ſe rencontrent que dans l'infini, pouvant être regardées comme paralleles, tomberont l'une ſur l'autre; puiſque le point *M* ſe confond alors avec le point *H*: c'eſt à dire, que l'aſymptote *CE*, étant prolongée à l'infini, auſſi-bien que l'Hyperbole, peut être regardée comme une ligne qui la touche dans ſon extremité. Il en eſt de même de l'autre aſymptote *Ce*, laquelle peut être regardée comme touchant la même Hyperbole dans ſon autre extremité.

D'où l'on voit que les deux aſymptotes peuvent être regardées comme des tangentes infinies, qui touchent les Hyperboles oppoſées dans leurs extremités.

## COROLLAIRE I.

109. Comme il n'y a que la ſeule ligne *DMd*, laquelle étant terminée par les aſymptotes, ſoit coupée en deux parties égales au point *M*; il s'enſuit que ſi une ligne droite *DMd*, terminée par les aſymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point *M*, qui coupe cette ligne droite en deux parties égales; elle ſera tangente de cette Hyperbole en ce point. Et réciproquement que ſi une ligne droite *DMd*, terminée par les aſymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point *M*; elle ſera coupée en deux parties égales par ce point.

## COROLLAIRE II.

Fig. 44. 110. Si par le point touchant *M* d'une tangente quelconque *DMd*, terminée par les aſymptotes *CL*,

$Cl$, d'une Hyperbole, l'on mene un premier diametre $MCm$; & que par le point $m$, où il rencontre l'Hyperbole opposée, l'on tire une parallele $Ee$, à la tangente $Dd$, terminée par les asymptotes aux points $E, e$: je dis que cette ligne sera tangente au point $m$. Car les triangles $CMD, CmE$, seront semblables & égaux, puisque * $CM$ est égal à $Cm$. La ligne $mE$, sera donc égale à $MD$. On prouvera de même (à cause des triangles semblables & égaux $CMd, Cme$) que $me$ est égale à $Md$. C'est pourquoi la ligne $Ee$ est divisée en deux également au point $m$; puisque $Dd$ l'est au point $M$. Et par consequent * elle sera tangente en $m$. * Art. 96. * Art. 109.

D'où l'on voit que les tangentes $Dd, Ee$, qui passent par les extremités d'un premier diametre quelconque $Mm$, sont paralleles entr'elles; & de plus égales, lorsqu'elles sont terminées par les asymptotes.

## DÉFINITIONS.

13.

S'il y a deux diametres $Mm, Ss$, dont l'un $Ss$, soit parallele aux tangentes qui passent par les extremités de l'autre $Mm$; & de plus terminé en $S, s$, par les droites $MS, Ms$, menées de l'une des extremités $M$ du diametre $Mm$, parallelement aux asymptotes : ces deux diametres $Mm, Ss$, seront appellés ensemble *Conjugués*. FIG. 44.

14.

Les lignes droites menées des points des Hyperboles opposées parallelement à l'un des diametres conjugués, & terminées par l'autre, sont nommées *Ordonnées* à cet autre. Ainsi $NO$, est une ordonnée au diametre $Mm$.

15.

Si l'on prend une troisiéme proportionnelle à deux diametres conjugués, elle sera le *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion.

## COROLLAIRE I.

111. LA définition 13[e] convient aux deux axes; puisque selon l'article 84. le second axe est parallele aux tangentes qui passent par l'extremité du premier; & que de plus, selon la définition 11[e], il est terminé par deux droites menées de l'une des extrémités du premier axe, parallelement aux asymptotes. D'où l'on voit que les deux axes peuvent être regardés comme deux diametres conjugués qui font entr'eux des angles droits.

## COROLLAIRE II.

112. COMME le diametre $SCs$, est parallele à la tangente $DMd$, qui passe par l'une des extremités $M$ du diametre $MCm$, & que cette tangente rencontre les deux asymptotes $CD$, $Cd$, de l'Hyperbole, qui passe par le point $M$: il s'ensuit qu'il tombe dans les angles à côté de l'angle $DCd$, fait par les asymptotes de cette Hyperbole; Et qu'ainsi c'est un second diametre.

D'où l'on voit qu'entre deux diametres conjugués $MCm$, $SCs$; il y en a toûjours un premier $Mm$, & un second $Ss$.

## COROLLAIRE III.

113. LE second diametre $SCs$, est coupé par le milieu au centre $C$, & de plus égal à la tangente $DMd$, qui passant par l'une des extremités $M$ du premier diametre $Mm$, qui lui est conjugué, est terminée par les asymptotes. Car à cause des paralleles $MS$, $Cd$, & $Ms$, $CD$; il est clair que $CS$ est égale à $Md$, & $Cs$ à $MD$.
* Art. 109. Or $DMd$, est divisée * en deux parties égales au point touchant $M$. Donc &c.

## COROLLAIRE IV.

114. DEUX diametres conjugués $Mm$, $Ss$, étant donnés, & sçachant lequel des deux est un premier diametre; il ne faut pour avoir les asymptotes $CD$, $Cd$, que

tirer par le centre $C$, des paralleles aux deux droites $MS$, $Ms$, menées de l'une des extremités $M$, du premier diametre $Mm$, aux deux extremités $S$, $s$, du second.

Et réciproquement les deux asymptotes $CD$, $Cd$, d'une Hyperbole étant données, avec l'un de ses points $M$; il ne faut pour avoir deux de ces diametres conjuguez $MCm$, $SCs$, que tirer $MH$ parallele à l'une des asymptotes $Cd$, qui rencontre l'autre asymptote $CD$ en $H$; & l'ayant prolongée en $S$, en sorte que $HS$ soit égale à $HM$, mener les droites $CM$, $CS$. Car tirant $MD$ parallele à $CS$, il est clair à cause des triangles semblables $CHS$, $MHD$, que $HD$ est égale à $HC$; puisque $MH$ est égale à $HS$; & qu'ainsi * $MD$ est tangente en $M$: d'où il suit selon la définition 13[e], que les lignes $CM$, $CS$, sont deux demi-diametres conjuguez. * Art. 107.

Il est donc évident que deux diametres conjuguez $Mm$, $Ss$, étant donnés de position & de grandeur, & sçachant de plus lequel des deux est un premier diametre; on a les deux asymptotes $CD$, $Cd$, avec l'un des points $M$, de l'une des Hyperboles opposées.

Et réciproquement que les asymptotes $CD$, $Cd$, d'une Hyperbole étant données, avec un de ses points $M$; on a deux de ses diametres conjuguez $Mm$, $Ss$, de position & de grandeur; & l'on sçait lequel des deux est un premier diametre; sçavoir, celui qui passe par le point donné $M$.

## COROLLAIRE IV.

115. Un second diametre $SCs$, étant donné de position, pour en déterminer la grandeur, & trouver le premier diametre $Mm$, qui lui est conjugué; on lui menera par tout où l'on voudra au dedans de l'angle fait par les asymptotes, une parallele $Ll$, terminée par les asymptotes en $L$, $l$; & par son point de milieu $O$, le premier diametre $CO$, qui rencontrera l'Hyperbole en

un point *M*; par lequel ayant tiré les droites *MS*, *Ms*, paralleles aux asymptotes; il est clair, selon la définition 13[e], que les points *S*, *s*, où elles rencontrent le second diametre *SCs*, donné de position, en déterminent la grandeur, & que le premier diametre *MCm* lui est conjugué. Car menant par le point *M*, la ligne *Dd*, parallele à *Ll*, & terminée par les asymptotes, elle sera coupée en deux également au point *M*; puisque *Ll*,
*Art. 109. l'est au point *O*: & partant * elle sera tangente en *M*.

De-là, il est évident qu'un second diametre *SCs*, étant donné de position, sa grandeur est déterminée en sorte qu'il ne peut en avoir qu'une seule; comme aussi la grandeur & la position du premier diametre *Mm*, qui lui est conjugué.

## COROLLAIRE V.

116. Un second diametre *SCs*, étant donné de position & de grandeur, avec son parametre, & la position de ses ordonnées; il sera facile de trouver de position & de grandeur le premier diametre *MCm*, qui lui est conjugué, avec son parametre. Car ayant mené par le centre *C*, une parallele indéfinie aux ordonnées du diametre *Ss*, on marquera sur cette ligne deux points *M*, *m*, également éloignés de part & d'autre du centre *C*, en sorte que *Mm*, soit égale à la moyenne proportionnelle entre le second diametre *Ss*, & son parametre. Puis ayant trouvé une troisiéme proportionnelle aux deux lignes *Mm*, *Ss*, il est clair, selon les définitions 14 & 15, que *Mm*, sera le premier diametre conjugué au diametre *Ss*, & qu'il aura pour son parametre cette troisiéme proportionnelle.

## PROPOSITION VII.

### Theorême.

FIG. 44. 117. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* ON, *au premier diametre* Mm, *est au rectangle de* MO *par* Om, *par-*

*ties de ce diametre prolongé ; comme le quarré de son conjugué* Ss, *est au quarré de ce premier diametre* Mm.

*Il faut prouver que* $\overline{ON}^2 . MO \times Om :: \overline{Ss}^2 . \overline{Mm}^2$.

Ayant mené par l'une des extremités *M*, du premier diametre *Mm*, une parallele *Dd* au second diametre *Ss*, terminée par les asymptotes ; elle sera tangente en *M*, selon la définition 13e. Et par consequent * elle sera coupée en deux également par ce point : c'est pourquoi, si l'on prolonge l'ordonnée *ON* (qui selon la définition 14. est parallele au diametre *Ss*) de part & d'autre du diametre *Mm*, elle rencontrera les asymptotes en deux points *L*, *l*, qui seront également éloignés de part & d'autre du point *O*. Cela posé, soient nommées les données *CM*, ou *Cm*, *t* ; *CS*, ou *Cs*, ou * *MD*, ou *Md*, *c* ; & les indéterminées *CO*, *x* ; *ON*, *y* ; on aura à cause des triangles semblables *CMD*, *COL* ; cette proportion : $CM(t) . MD(c) :: CO(x) . OL$ ou $Ol = \frac{cx}{t}$. Donc $LN$ ou $LO \pm ON = \frac{cx}{t} \pm y$, & $Nl$ ou $Ol \mp NO = \frac{cx}{t} \mp y$ ; Et partant $LN \times Nl = \frac{ccxx}{tt} - yy =$ * $DM \times Md = cc$. D'où il suit que $\overline{ON}^2 (yy) . MO \times Om (xx - tt) :: \overline{Ss}^2 (4cc) . \overline{Mm}^2 (4tt)$. Puisqu'en multipliant les Extrêmes & les Moyens, on trouve $4ttyy = 4ccxx - 4cctt$, c'est à dire (en divisant par $4tt$, & transposant à l'ordinaire) l'équation même précédente $\frac{ccxx}{tt} - yy = cc$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 109.

* Art. 113.

* Art. 90.

## COROLLAIRE GENERAL.

118. Il est visible que ce qu'on a démontré dans la Proposition seconde *, par rapport aux deux axes *Aa*, *Bb*, s'étend par le moyen de cette Proposition à deux diametres conjugués quelconques, *Mm*, *Ss*. Or comme les articles 80, 81, 82, 83, 84 & 85, se tirent de la seconde Proposition, & subsistent également, soit que l'angle *ACB*, soit droit ou qu'il ne le soit pas ; il s'en-

* Art. 79.

ſuit que ſi l'on ſuppoſe dans ces articles que les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, ſoient deux diametres conjugués quelconques, ces articles ſeront encore vrais dans cette ſuppoſition : car leur démonſtration demeure toûjours la même ; & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant par tout où ſe trouve le mot d'*Axe*, celui de *Diametre*.

## PROPOSITION VIII.

### Theorême.

FIG. 45. 119. SOIENT *deux tangentes quelconques* DE, FG, *d'une Hyperbole* MA, *terminées par les aſymptotes*, *& qui s'entrecoupent en un point* O ; *je dis que les côtés des triangles* CDE, CFG, *autour de l'angle commun* C, *ſont réciproquement proportionnels*.

*Il faut prouver que* CD. CF :: CG. CE.

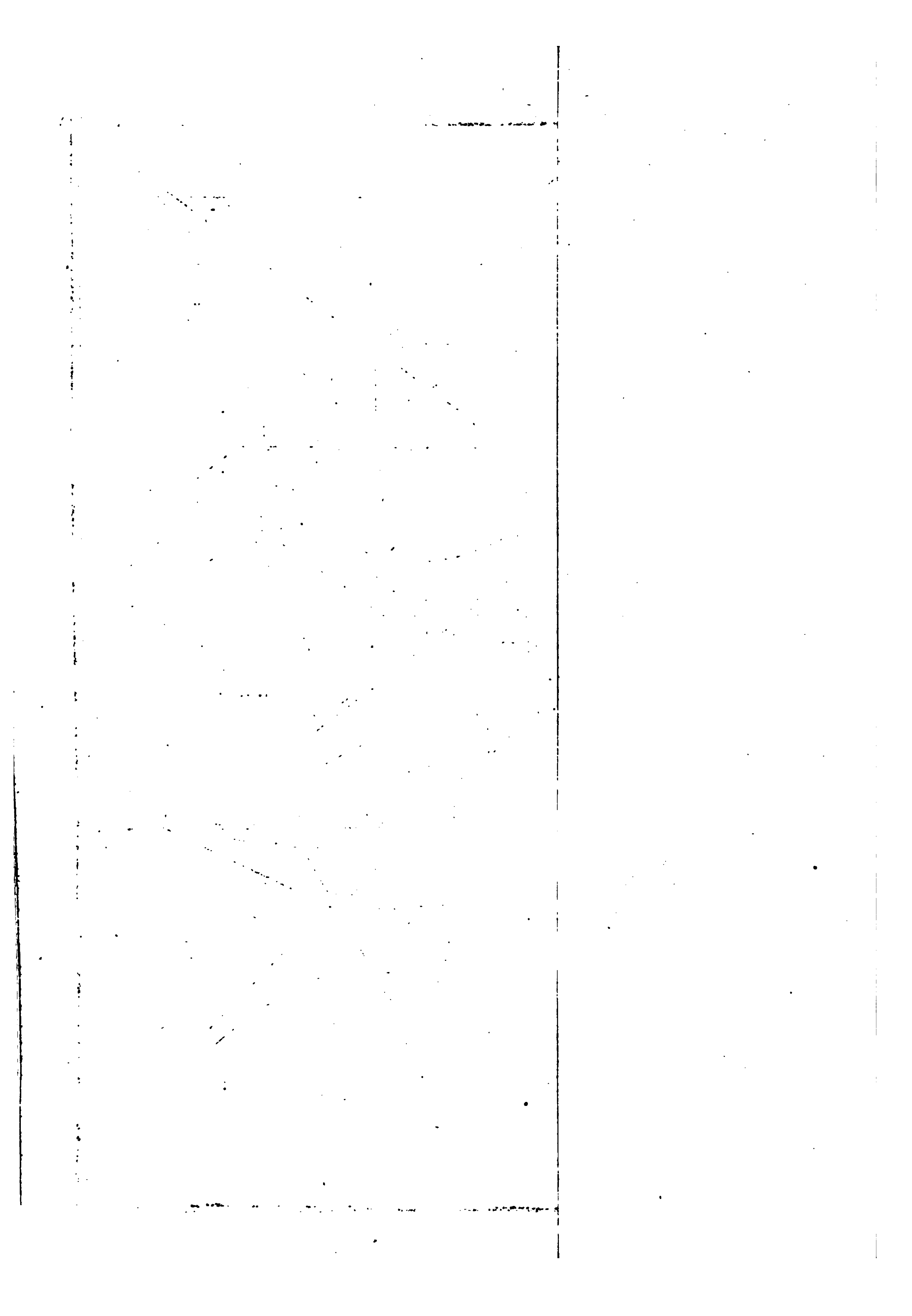
Ayant mené par les points touchans *M*, *A*, les paralleles *MH*, *AL*, à l'aſymptote *CG* ; il eſt clair à cauſe des triangles ſemblables *CDE*, *HDM*, que *CD* eſt double de *CH*, & *CE* double de *HM* ; puiſque *DE* eſt * double de *DM*. Et à cauſe des triangles ſemblables *CFG*, *LFA*, que *CF* eſt double de *CL*, & *CG* double de *LA* ; puiſque *FG*, eſt double de *FA*. Or * *CH*. *CL* :: *LA*. *HM*. Et partant ſi l'on prend le double de chaque terme ; on aura 2 *CH* ou *CD*. 2 *CL* ou *CF* :: 2 *LA* ou *CG*. 2 *HM* ou *CE*. *Ce qu'il falloit &c.*

* Art. 109.
* Art. 100.

### COROLLAIRE.

120. IL ſuit de cette Propoſition que les droites *DG*, *FE*, ſont paralleles entr'elles. D'où il eſt évident :

1°. Que les triangles *CDE*, *CFG*, ſont égaux ; car les triangles *FDE*, *FGE*, qui ont la même baſe *FE*, & qui ſont entre les mêmes paralleles *DG*, *FE*, ſont égaux ; Et partant, ſi l'on ajoûte de part & d'autre le même



même triangle $CFE$, on formera les triangles $CDE$, $CFG$, qui seront égaux entr'eux.

2°. Que la ligne $DE$, est couppée en même raison aux points $M$, $O$, que la ligne $FG$ l'est aux points $A$, $O$. Car menant par les points touchans la droite $MA$, il est clair qu'elle sera parallele aux deux droites $DG$, $FE$; puisqu'elle couppe par le milieu les droites $DE$, $FG$, renfermées entre ces paralleles.

## PROPOSITION IX.

### Theorême.

121. S*i par un point quelconque* M *d'une Hyperbole, l'on mene une ordonnée* MP *à tel de ses diametres* Aa *que l'on voudra, & une tangente* MT *qui le rencontre en* T; *je dis que* CP. CA :: CA. CT. *en observant que les points* P, T, *tombent du même côté du centre* C, *lorsque la ligne* Aa *est un premier diametre; & au contraire qu'ils tombent de part & d'autre du centre, lorsque c'est un second diametre.* Fig. 46. & 47.

*Premier cas.* Lorsque la ligne $Aa$ est un premier diametre. On prolongera la tangente $MT$ jusqu'à ce qu'elle rencontre les asymptotes $CD$, $CG$, aux points $D$, $E$; & l'ordonnée $PM$, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'asymptote $CD$ au point $N$; on menera ensuite par le point $A$ la ligne $AK$, parallele à $DE$, qui rencontre l'asymptote $CG$ au point $K$, & la tangente $FG$ terminée par les asymptotes, qui sera parallele * à $PM$, & qui rencontre au point $O$ l'autre tangente $DE$. Fig. 46. * Def. 14.

Cela posé, $AP$ est à $AC$, ou $FN$ à $FC$, en raison composée de $FN$ à $FD$, ou de $OM$ à $OD$, ou * de $OA$ à $OG$, ou de $EK$ à $EG$, & de $FD$ à $FC$, ou * de $EG$ à $EC$. Or $AT$ est à $TC$, ou $KE$ à $EC$, en raison composée de $EK$ à $EG$, & de $EG$ à $EC$. Donc $AP. AC :: AT. TC.$ puisque les raisons composantes de ces deux raisons sont les mêmes; & par consequent $AP+AC$ ou $CP. CA :: AT+TC$ ou $CA. CT.$ *Ce qui étoit proposé en premier lieu.* * Art. 120. * Art. 120.

FIG. 47. *Second cas.* Lorſque la ligne $Aa$ eſt un ſecond diametre. Ayant mené par le centre $C$ la ligne $CK$ parallele à l'ordonnée $PM$, qui rencontre l'Hyperbole au point $B$, & la tangente $MT$ au point $R$, & par le point touchant $M$ la ligne $MK$ parallele à $Aa$; il eſt clair que $CB$ ſera le premier demi-diametre conjugué au ſecond $Aa$, & qu'ainſi $MK$ ſera ordonnée à ce diametre.

Cela poſé, ſi l'on nomme les données $CA$ ou $Ca$, $t$; $CB$, $c$; & les indéterminées $CP$ ou $MK$, $x$; $PM$ ou $CK$, $y$; on aura ſelon ce qu'on vient de démontrer dans le premier cas, $CR = \frac{cc}{y}$; & partant $RK$ ou $CK - CR = \frac{yy-cc}{y}$. Or les triangles ſemblables $KRM$, $CRT$, donnent $KR\ (\frac{yy-cc}{y}).\ RC\ (\frac{cc}{y}) :: MK\ (x).$ $CT = \frac{ccx}{yy-cc} = \frac{tt}{x}$. en mettant pour $yy-cc$ ſa valeur

* Art. 80. & 118. $\frac{ccxx}{tt}$ tirée de ce que $yy = {}^{*}\frac{ccxx}{tt} + cc$. C'eſt à dire que $CP.\ CA :: CA.\ CT$. *Ce qui reſtoit à démontrer.*

## PROPOSITION X.

### Theorême.

FIG. 48. & 49. 122. SI *par un point quelconque* M *d'une Hyperbole qui a pour centre le point* C, *on mene une ordonnée* MP *à l'un ou à l'autre axe* Aa, *& une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT, *laquelle paſſe par* M: *Je dis que* CP *ſera toûjours à* PG *en la raiſon donnée de l'axe* Aa *à ſon Parametre.*

* Art. 121. Car nommant le demi-axe $CA$ ou $Ca$, $t$; & les indéterminées $CP$, $x$; $PM$, $y$; on aura * $CT = \frac{tt}{x}$; Et partant $PT = \frac{xx \mp tt}{x}$, ſelon que $Aa$ eſt le premier ou le ſecond axe. Or les triangles réctangles ſemblables $TPM$, $MPG$, donnent $TP\ (\frac{xx \mp tt}{x}).\ PM\ (y) :: PM$

$(y) . PG = \frac{xyy}{xx \mp tt}$. D'où l'on tire cette proportion $CP$ $(x) . PG \left(\frac{xyy}{xx \mp tt}\right) :: \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 (xx \mp tt) . \overline{PM}^2 (yy)$. puiſqu'en multipliant les moyens & les extrêmes, on trouve le même produit $xyy$. Mais $\overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$ eſt à $\overline{PM}^2$, comme * l'axe $Aa$ eſt à ſon parametre. Donc *Art. 81.* $CP$ eſt auſſi à $PG$ en cette même raiſon. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## PROPOSITION XI.

### Theorême.

123. *Si d'un point quelconque* M *d'une Hyperbole, l'on* FIG. 50. *tire à ſes deux foyers* F, f, *les droites* MF, Mf; *je dis que la tangente* MT, *qui paſſe par ce point* M, *diviſe en deux également l'angle* FMf.

Car ayant mené les perpendiculaires $FD$, $fd$, ſur la tangente $MT$; le premier axe $Aa$, qui paſſe par les foyers $F$, $f$, & qui rencontre la tangente en $T$; & l'ordonnée $MP$, à cet axe: on nommera les données $CA$ ou $Ca$, $t$; $CF$ ou $Cf$, $m$; & l'indéterminée $CP$, $x$. L'on aura $MF$ * $\left(\frac{mx}{t} - t\right) . Mf \left(\frac{mx}{t} + t\right) :: TF$ ou $CF$ *Art. 78.* $(m) - CT$ * $\left(\frac{tt}{x}\right) . Tf$ ou $Cf (m) + CT \left(\frac{tt}{x}\right)$. puiſqu'en *Art. 121.* multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit. Or les triangles réctangles ſemblables $TFD$, $Tfd$, donnent $TF . Tf :: FD . fd$. L'hypothenuſe $MF$ du triangle réctangle $MDF$, ſera donc à l'hypothenuſe $Mf$ du triangle réctangle $Mdf$, comme le côté $DF$ eſt au côté $df$; & par conſequent ces deux triangles ſeront ſemblables. Donc les angles $FMD$, $fMd$, qui ſont oppoſés aux côtés homologues $DF$, $df$, ſeront égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

### COROLLAIRE.

124. DE-LA il eſt évident, que la tangente *MT*, étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant *M*, laiſſe l'Hyperbole *AM*, toute entiere du côté de ſon foyer interieur *F*. Et comme cela arrive toûjours en quelque endroit de cette Hyperbole qu'on prenne le point *M*, il eſt viſible qu'elle ſera concave dans toute ſon étenduë autour de ſon foyer interieur *F*.

## PROPOSITION XII.

### Theorême.

FIG. 51. 125. LA *difference des quarrés de deux diametres conjugués quelconques* Mm, Ss, *eſt égale à la difference des quarrés des deux axes* Aa, Bb.

*Il faut prouver que* $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$, *ou que* $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$.

*Def. 11. & 13. Si l'on mene les droites *MS*, *AB*, elles ſeront* paralleles à l'aſymptote *Cg*, & de plus couppées en deux également par l'autre aſymptote *CG*, aux points *H*, *G*; *Def. 11. & 13. puiſque* les lignes *Ms*, *Ab*, ſont paralleles à cette aſymptote, & que les ſeconds diametres *Ss*, *Bb*, ſont coup- *Art. 113. pés* en deux également au centre *C*: C'eſt pourquoi ſi l'on mene ſur l'aſymptote *CG*, les perpendiculaires *AF*, *BE*, *ML*, *SK*, on formera les triangles *GAF*, *GBE*, & *HML*, *HSK*, qui ſeront ſemblables & égaux. Cela *Art. 88. poſé, ſoient nommées les données *CG* ou* *GA*, $m$; *GE* ou *GF*, $a$; *AF* ou *BE*, $b$; & les indéterminées *CH*, $x$; *HM*, $y$: ce qui donne $CE = m + a$, $CF = m - a$; $\overline{CE}^2 + \overline{EB}^2$ ou $\overline{CB}^2 = mm + 2am + aa + bb$, $\overline{CF}^2 + \overline{FA}^2$ ou $\overline{CA}^2 = mm - 2am + aa + bb$. Et partant $\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 = 4am$. Or les triangles ſemblables *GAF*, *HML*, fourniſſent *GA* $(m)$. *AF* $(b)$ :: *HM* $(y)$. *ML* ou $KS = \frac{by}{m}$. Et *GA* $(m)$. *GF* $(a)$ :: *HM*

($y$). $HL$ ou $HK = \frac{ay}{m}$. Donc $CK = x + \frac{ay}{m}$, $CL = x - \frac{ay}{m}$; $\overline{CK}^2 + \overline{KS}^2$ ou $\overline{CS}^2 = xx + \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$, $\overline{CL}^2 + \overline{LM}^2$ ou $\overline{CM}^2 = xx - \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$. Et partant $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \frac{4axy}{m} = 4am$, en mettant pour $xy$ sa valeur * $mm$. Donc $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$; *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 101.

Si l'angle $GCg$, fait par les asymptotes, étoit aigu, au lieu que dans cette figure & le raisonnement qui lui est approprié, il est obtus; $CF$ seroit alors plus grande que $CE$, & on prouveroit de la même maniere que $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$. Mais si l'angle $GCg$ fait par les asymptotes étoit droit, il est visible alors que les lignes $AB$, $MS$, seroient perpendiculaires sur l'asymptote $CG$; & qu'ainsi les deux demi-diametres conjugués $CM$, $CS$, seroient égaux entr'eux, de même que les deux demi-axes $CA$, $CB$. Or comme alors la difference des deux diametres conjugués $Mm$, $Ss$, est nulle, aussi-bien que celle des deux axes $Aa$, $Bb$; il s'ensuit que cette Proposition est vraïe dans tous les cas.

## COROLLAIRE.

126. DE-LA il est évident qu'un premier diametre quelconque $Mm$, est moindre, plus grand, ou égal au second diametre $Ss$, qui lui est conjugué; selon que l'angle $GCg$, fait par les asymptotes, est obtus, aigu, ou droit.

## DÉFINITION.

16.

Les deux Hyperboles opposées sont appellées *Equilateres*, lorsque deux de leurs diametres conjugués quelconques sont égaux entr'eux; ou bien lorsque l'angle fait par leurs asymptotes est droit.

## COROLLAIRE.

FIG. 52. 127. Si d'un point quelconque *M* d'une Hyperbole équilatére, l'on mene une ordonnée *MP* à tel de ses diametres *Aa* qu'on voudra, on aura * $\overline{MP}^2 = \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$: sçavoir —, lorsque *Aa* est un premier diametre; & —+, lorsque c'est un second. Car le diametre conjugué au diametre *Aa* * lui sera toûjours égal.

* Art. 81. & 118.

* Art. 126.

## PROPOSITION XIII.

### Problême.

FIG. 53. 54. & 55. 128. DEUX *diametres conjugués quelconques étant donnés, & sçachant lequel des deux est le premier; ou ce qui revient * au même, les asymptotes* CD, CF, *d'une Hyperbole étant données, avec un de ses points quelconques* M: *mener deux diametres conjugués* Aa, Bb, *qui fassent entr'eux un angle égal à un angle donné.*

* Art. 114.

Ayant couppé dans un cercle quelconque qui a pour centre le point *o*, un arc *dcf* capable de l'angle *DCF* fait par les asymptotes; on menera par le point de milieu *e*, de la corde *df*, la ligne *ec* qui fasse avec cette corde de part ou d'autre l'angle *dec* ou *fec* égal à l'angle donné; & par le point *c*, où elle rencontre l'arc *dcf*, les droites *cd*, *cf*. Cela fait, on prendra sur les asymptotes les parties *CD*, *CF*, égales aux cordes *cd*, *cf*; & ayant tiré *DF*, l'on menera le second diametre *Bb* parallele à cette ligne, & le premier diametre *Aa* qui passe par son milieu *E*. Je dis que ces deux diametres *Aa*, *Bb*, font entr'eux un angle égal à l'angle donné, & qu'ils sont conjugués l'un à l'autre.

Car par la construction l'angle *dcf* est égal à l'angle *DCF* fait par les asymptotes; & par consequent les triangles *DCF*, *dcf*, & *DCE*, *dce*, sont égaux & semblables. L'angle *BCa*, que font entr'eux les deux diametres *A a*, *Bb*, sera donc égal à l'angle *DEC* ou *dec*

qui a été fait égal à l'angle donné. De plus, si l'on mene par le point *A*, que je suppose être l'une des extremités du premier diametre *Aa*, une parallele à *DF*; il est clair qu'elle sera couppée également par ce point, puisque *DF* l'est au point *E*; & qu'ainsi * elle sera tangente en *A*; d'où il suit * que les diametres *Aa*, *Bb*, sont conjugués. * *Art.* 109. * *Def.* 13.

Maintenant pour déterminer la grandeur de ces deux diametres, on tirera par le point donné *M*, une parallele *MKL* au premier diametre *Aa*, laquelle rencontre l'asymptote *CD* au point *K*, & l'autre asymptote *CF*, prolongée au delà du centre *C*, au point *L*: & ayant pris *CA* moyenne proportionnelle entre *KM*, *ML*; il est clair * que le point *A* sera l'une des extremités du premier diametre *Aa*; & qu'ainsi menant les lignes *AB*, *ab*, paralleles aux asymptotes *CF*, *CD*, elles * determineront par leurs points de rencontre *B*, *b*, la grandeur du second diametre *Bb*. * *Art.* 94. * *Def.* 13.

Comme l'on peut mener deux differentes lignes *ec*, *ec*, qui fassent avec la corde *df*, de part & d'autre des angles *dec*, *fec*, égaux à l'angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit; il s'ensuit qu'on pourra toûjours trouver alors deux differens diametres conjugués *Aa*, *Bb*, qui satisferont également, comme l'on voit dans les figures 54. & 55. Mais il est à remarquer que les diametres conjugués *Aa*, *Bb*, de la fig. 55. ont une position semblable par rapport à l'asymptote *CF*, à ceux de la figure 54. par rapport à l'autre asymptote *CD*; & que leur grandeur demeure la même dans ces deux differentes positions. Car,

1°. Menant du centre *o* au point *e*, milieu de la corde *df*, la ligne *oe*, elle sera perpendiculaire à cette corde, & par consequent les angles *oec*, *oec*, seront égaux; c'est pourquoi tirant les rayons *oc*, *oc*, les triangles *oec*, *oec*, qui ont le côté *oe* commun, les angles *oec*, *oec*, & les côtés *oc*, *oc*, égaux entr'eux, auront aussi leur troisiémes côtés *ec*, *ec*, égaux. Les triangles *fec*, *dec*, qui ont les côtés *ef*, *ed*, & *ec*, *ec*, & les

angles *fec*, *dec*, égaux, ſeront donc égaux & ſemblables; d'où l'on voit que l'angle *ecf*, ou *ECF*, de la figure 55. eſt égal à l'angle *ecd*, ou *ECD*, de la fig. 54. & qu'ainſi la poſition du diametre *Aa*, de la fig. 55. par rapport à l'aſymptote *CF*, eſt ſemblable à celle du diametre *Aa*, de la figure 54. par rapport à l'autre aſymptote *CD*.

2°. Si l'on mene dans la figure 55. la ligne *Ml*, qui faſſe avec l'aſymptote *CF*, prolongée du côté du centre *C*, l'angle *MlC* égal à l'angle *MLC* ou *ECF*, de la figure 54: il eſt clair que les lignes *Ml*, *Mk*, de la figure 55. ſeront égales aux lignes *ML*, *MK*, de la figure 54; puiſqu'on ſuppoſe que la poſition du point *M* par rapport aux aſymptotes, eſt la même dans ces deux figures. Or l'angle *MlL*, complement à deux droits de l'angle *MlC*, de la figure 55. ou de *ECF* de la figure 54, eſt égal à l'angle *MKk*, complement à deux droits de l'angle *ECD* de la figure 55. ou de *ECF* de la fig. 54; Et par conſequent dans fig. 55. les deux triangles *LMl*, *kMK*, qui ont l'angle en *M* commun, & les angles aux points *l*, *K*, égaux, ſeront ſemblables: ce qui donne $LM.\ Ml :: kM.\ MK$. Et partant $LM \times MK = lM \times Mk$ ou
*Art. 94. $LM \times MK$ de la figure 54. D'où l'on voit * que les premiers demi-diametres *CA*, *CA*, des figures 54 & 55, ſont égaux. Il en eſt de même du diametre *Bb*; puiſque ſa poſition & ſa grandeur dépendent de celles du premier diametre *Aa*, auquel il eſt conjugué.

Comme l'on ne peut mener qu'une ſeule ligne *ec*, qui faſſe avec la corde *df* de part ou d'autre, un angle égal
FIG. 56. & 57. à l'angle donné, lorſque cet angle eſt droit; il s'enſuit qu'il n'y a que deux diametres conjugués *Aa*, *Bb*, qui
*Art. 111. faſſent entr'eux un angle droit; & qu'ainſi * ils ſeront les deux axes. Mais le triangle *dcf* ou *DCF*, étant alors iſoſcelle, le premier axe *Aa* diviſera par le milieu l'angle *DCF* fait par les aſymptotes; d'où l'on voit que pour trouver de poſition les deux axes, il n'y a qu'à tirer deux lignes droites *Aa*, *Bb*, perpendiculaires entr'elles, dont l'une d'elles *Aa*, diviſe par le milieu l'angle *DCF*,



*DCF*, fait par les asymptotes : aprés quoi l'on en déterminera la grandeur, comme on vient de l'enseigner pour les diametres conjugués.

On peut encore trouver les deux axes de cette autre maniere. Soit menée par le point donné *M* une parallele *MH* à l'une des asymptotes *CF*, & terminée par l'autre *CD* au point *H*. Soit prise sur l'asymptote *CD*, la partie *CG* égale à la moyenne proportionnelle entre *CH*, *HM* : & soit tirée par le point *G* une parallele *AB* à *CF*, telle que chacune de ses parties *GA*, *GB*, soit égale à *CG*. Il est évident que les lignes *CA*, *CB*, * seront les deux demi-axes de position & de grandeur. * *Art.* 101. & 88.

## COROLLAIRE.

129. Il est donc évident, 1°. Qu'il n'y a que deux diametres conjugués qui fassent entr'eux un angle droit ; & qu'ainsi il ne peut y avoir que deux axes. 2°. Qu'on peut toûjours trouver deux differens diametres conjugués qui fassent entr'eux un angle égal à un angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit ; que les deux premiers ont une position semblable par rapport à une asymptote, à celle des deux autres par rapport à l'autre asymptote ; d'où il suit qu'ils sont semblablement posés de part & d'autre des deux axes, puisque les deux axes divisent par le milieu les angles faits par les asymptotes ; & qu'enfin leur grandeur demeure la même dans ces deux differentes positions.

## PROPOSITION XIV.

### Problême.

130. Deux *diametres conjugués quelconques étant donnés, & sçachant lequel des deux est le premier ; ou ce qui est la même chose * les asymptotes de deux Hyperboles opposées étant données avec un de leurs points quelconque : décrire ces Hyperboles par un mouvement continu.* * *Art.* 114.

PREMIERE MANIERE.

On cherchera les deux axes, comme l'on vient d'enseigner dans la Proposition précedente; & l'on décrira ensuite les Hyperboles opposées, selon l'article 76.

SECONDE MANIERE.

FIG. 58. Soient *Aa*, *Bb*, les diametres conjugués donnés, entre lesquels le diametre *Aa* est le premier; ou bien *CG*, *Cg*, les asymptotes données, avec le point *A*, un de ceux des Hyperboles opposées. Ayant mené par le point donné *A* une parallele *AG*, à l'une des asymptotes *Cg*, & terminée par l'autre en *G*, on fera glisser le long de l'asymptote *CG*, indéfiniment prolongée de part & d'autre du centre *C*, une droite *HK* égale à *CG*, qui entraînera par son extremité *H* une parallele *HM* à l'asymptote *Cg*, & par son autre extremité *K*, une droite *KA* mobile autour du point fixe *A*. Je dis que l'intersection continuelle *M* des droites *AK*, *HM*, décrira dans ce mouvement les deux Hyperboles opposées qu'on demande.

Car à cause des triangles semblables *KHM*, *KGA*, on aura toûjours *KH* ou *CG*. *HM* :: *KG* ou *CH*. *GA*. Et partant $CH \times HM = CG \times GA$. Le point *M* sera

*Art. 101. donc * un des points de l'Hyperbole qui passe par le point donné *A*, & qui a pour asymptotes les droites données *CG*, *Cg*; ou de l'Hyperbole opposée.

## PROPOSITION XV.

### Problême.

131. LES *mêmes choses étant données que dans la Proposition précédente; décrire les Hyperboles opposées par plusieurs points.*

PREMIERE MANIERE.

FIG. 59. Soient *CD*, *CE*, les asymptotes données, & *A* le

point donné. Ayant mené par ce point *A* autant de lignes *DE*, *DE*, *DE*, &c. qu'on voudra, terminées par les asymptotes ; & ayant pris sur ces lignes droites les parties *EM*, *EM*, *EM*, &c. égales à *AD*, *AD*, *AD*, &c ; sçavoir chacune à sa correspondante : il est clair * 1°. Que les points *M*, *M*, *M*, &c, seront à l'Hyperbole qui passe par le point *A*, lorsque les points *E*, *E*, *E*, &c, tombent au dessous du centre. 2°. Que ces Hyperboles ont pour asymptotes les droites *CD*, *CE*. Faisant donc passer par tous les points *M*, *M*, *M*, &c. qui tombent dans l'angle fait par les asymptotes, une ligne courbe, & par les autres points *M*, *M*, *M*, &c. qui tombent dans l'angle opposé au sommet à celui-ci, une autre ligne courbe ; ces deux lignes seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande. *Art. 106.

SECONDE MANIERE.

Soient les lignes *Aa*, *Bb*, les deux diametres conjugués donnés, entre lesquels *Aa* est le second. Ayant pris sur le premier demi-diametre *CB* prolongé indéfiniment du côté de *B*, de petites parties *CE*, *EE*, *EE*, &c. égales entr'elles, autant & de telle grandeur qu'on voudra ; on menera par celui des points *E*, qui est le plus proche du centre *C*, la ligne *EP* parallele à *BA* ; & on prendra sur le second diametre *Aa* de part & d'autre du centre *C*, autant de petites parties *CP*, *PP*, *PP*, &c, toutes égales à *CP*, qu'il y a de petites parties *CE*, *EE*, *EE*, &c. Ayant tiré *CD* perpendiculaire & égale à *CB*, on menera par tous les points *P*, *P*, *P*, &c, des paralleles *MPM*, *MPM*, *MPM*, &c, au premier diametre *Bb*, sur chacune desquelles on prendra de part & d'autre du point *P*, des parties *PM*, *PM*, égales chacune à sa correspondante *ED*. Je dis que les deux lignes courbes qui passent par tous les points *M* ainsi trouvés, seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande. FIG. 60.

Car nommant les données *CA*, *t* ; *CB* ou *CD*, *c* ; &

les indéterminées *CP*, $x$; *PM*, $y$; les triangles semblables *CAB*, *CPE*, donneront cette proportion $CA(t).CB(c)::CP(x).CE=\frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle *ECD* rectangle en *C*, (en imaginant chaque hypothenuse *ED* qu'on a omise de peur de confusion dans la figure) le quarré $\overline{ED}^2$ ou $\overline{PM}^2 (yy) = \overline{CE}^2 (\frac{ccxx}{tt})$

*Art. 81. & 118. $+\overline{CD}^2 (cc)$. La ligne *PM* sera donc * une ordonnée au second diametre *Aa*, qui a pour conjugué le premier *Bb*; & comme cette démonstration convient à toutes les lignes *PM*, puisque chaque *CP* est toûjours à la correspondante *CE*, en la raison de *CA* à *CB*: il s'ensuit &c.

FIG. 61. * Def. 16. Lorsque les diametres conjugués *Aa*, *Bb*, sont égaux entr'eux, c'est à dire *, lorsque les Hyperboles qu'on demande sont équilateres; la construction devient beaucoup plus aisée. Car ayant mené *CD* perpendiculaire & égale à *CA*, & tiré par un point quelconque *P* du diametre *Aa*, une parallele *MPM* au premier diametre *Bb*; il n'y aura qu'à prendre sur cette ligne de part & d'autre du point *P*, les parties *PM*, *PM*, égales chacune à *PD*, pour avoir deux points des Hyperboles opposées. Car à cause du triangle *PCD* réctangle en *C* (en imaginant chaque hypothenuse *CD*) on aura toûjours $\overline{PD}^2$ ou $\overline{PM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CD}^2$ ou $\overline{CA}^2$; Et partant la ligne *PM* sera * une ordonnée au second diametre *Aa*, qui a pour conjugué le premier *Bb* qui lui est égal.

*Art. 117.

## DÉFINITION.

### 17.

FIG. 62. Soient deux Hyperboles opposées *AM*, *am*, qui ayent pour premier axe la ligne *Aa*, & pour second axe la ligne *Bb*; & soient deux autres Hyperboles opposées *BS*, *bs*, qui ayent au contraire pour premier axe la ligne *Bb*, & pour second axe la ligne *Aa*: ces deux nouvelles Hyperboles *BS*, *bs*, sont appellées *Conjuguées*

aux deux premieres *AM*, *am*; & les quatre ensemble sont appellées Hyperboles *conjuguées*.

## COROLLAIRE.

132. Il est clair que les lignes *Ba*, *Ab*, sont paralleles; puisque les droites *Aa*, *Bb*, terminées par ces lignes, s'entrecoupent * en deux également au point *C*. D'où il suit, selon la définition 11^e. que l'Hyperbole *BS* conjuguée à *AM*, a pour l'une de ses asymptotes la ligne *CG* asymptote de l'Hyperbole *AM*; & pour l'autre, la ligne *Cg* autre asymptote de l'Hyperbole *AM* indéfiniment prolongée du côté de *C*: puisque ces deux lignes passent par le centre *C*, & sont paralleles aux deux droites *Ba*, *BA*, menées de l'extremité *B* du premier axe *Bb* de l'Hyperbole *BS* aux deux extremités *A*, *a*, du second. Il est donc évident que les deux droites *CG*, *Cg*, paralleles à *Ab*, *AB*, indéfiniment prolongées de part & d'autre du centre *C*, sont non seulement les asymptotes des Hyperboles opposées *AM*, *am*; mais aussi des deux autres *BS*, *bs*, qui leur sont conjuguées.

* Def. 4. & 5.

## PROPOSITION XVI.

### Theorême.

133. S*i l'on mene par un point quelconque* H *d'une asymptote* CG *commune aux deux Hyperboles* AM, BS, *une parallele* MS *à l'autre asymptote* Cg; *je dis qu'elle rencontrera ces deux Hyperboles en des points* M, S, *qui seront également éloignés de part & d'autre du point* H.

Car, 1°. La ligne *MS* rencontrera * chacune des Hyperboles *AM*, *BS*, en un point. 2°. A cause de l'Hyperbole *AM*, le rectangle * $CH \times HM = CG \times GA$; & à cause de l'Hyperbole *BS*, le rectangle $CH \times HS = CG \times GB$. Donc, puisque * $GB = GA$, il s'ensuit que $CH \times HS = CH \times HM$; Et qu'ainsi $HS = HM$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 104.
* Art. 101.
* Art. 88.

## COROLLAIRE I.

134. SI l'on mene des points *M, S*, des deux Hyperboles *AM, BS*, les diametres *MCm, SCs*, terminés par les deux autres Hyperboles *am, bs*; il est clair * que le diametre *Ss* sera le second diametre conjugué au premier *Mm* des deux Hyperboles opposées *AM, am*; & réciproquement que le diametre *Mm* sera le second diametre conjugué au premier *Ss* des deux Hyperboles opposées *BS, bs*. D'où l'on voit que deux diametres conjugués quelconques *Mm, Ss*, de deux Hyperboles opposées *AM, am*, sont aussi deux diametres conjugués des deux autres Hyperboles *BS, bs*, qui leur sont conjuguées; avec cette difference que le premier diametre *Mm* devient le second, & qu'au contraire le second *Ss* devient le premier.

* Art. 114.

## COROLLAIRE II.

135. DE-LA il est manifeste que les Hyperboles conjuguées *BS, bs*, aux deux *AM, am*, passent par les extremités *S, s*, de tous les seconds diametres *SCs* de ces Hyperboles: & réciproquement que les Hyperboles *AM, am*, passent par les extremités *M, m*, de tous les seconds diametres *MCm* des deux Hyperboles *BS, bs*, qui leur sont conjuguées.



# QUATRIE'ME LIVRE.

## *Des trois Sections Coniques.*

### DE'FINITION.

On entend par le terme general de *Section Conique*, chacune des trois lignes Courbes dont l'on vient de parler dans les Livres précédens ; sçavoir, la *Parabole*, l'*Ellipse*, l'*Hyperbole* ou les *Hyperboles opposées*.

### PROPOSITION I.

### Theorême.

136. Si *par l'extremité* A *d'un diametre quelconque* Aa *d'une Ellipse, ou d'un premier diametre* Aa *d'une Hyperbole, l'on mene une parallele* AG *à ses ordonnées* PM, *qui soit égale à son parametre ; & qu'on tire de l'autre extremité* a, *la droite* aG, *qui coupe en* O *une ordonnée quelconque* PM *prolongée s'il est necessaire : je dis que le quarré de l'ordonnée* PM *est égal au rectangle de* AP *par* PO. Fig. 63. & 64.

*Il faut prouver que* $\overline{PM}^2 = AP \times PO$.

Selon les articles 41 & 55. du second Livre, 81 & 118. du troisiéme, on aura $Aa . AG :: AP \times Pa . \overline{PM}^2$. Or à cause des triangles semblables $aAG$, $aPO$, il vient $Aa . AG :: Pa . PO :: AP \times Pa . AP \times PO$. Donc $\overline{PM}^2 = AP \times PO$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

### COROLLAIRE I.

137. De-là il est évident que le quarré d'une ordonnée quelconque $PM$ à un diametre $Aa$, est toûjours moindre dans l'Ellipse, & toûjours plus grand dans l'Hyperbole, que le rectangle fait du parametre $AG$

par la partie $AP$ de ce diametre, prise entre son origine ou extremité $A$, & la rencontre $P$ de l'ordonnée ; au lieu que dans la Parabole * ils sont égaux. Or c'est à cause de cette proprieté, que Apollonius, surnommé le *Grand Geometre*, a imposé aux Sections Coniques les noms qne nous avons marqués : car il a voulu donner à entendre par celui de *Parabole*, la justesse ou exactitude ; par celui d'*Ellipse*, le deffaut ou manquement ; & par celui d'*Hyperbole*, l'excés qui se trouve dans la comparaison des quarrés des ordonnées $PM$, avec les réctangles correspondans $AP \times AG$.

* Art. 7. & 20.

FIG. 65.

## PROPOSITION II.

### Theorême.

FIG. 66. & 67.

138. DANS *une Ellipse tout diametre* Aa, *& dans les Hyperboles opposées tout premier diametre* Aa *est divisé en deux également par le centre* C, *& ne rencontre la Section qu'en deux points.*

On a démontré cette Proposition dans les articles 50 du second Livre ; 96 & 103 du troisiéme.

## PROPOSITION III.

### Theorême.

139. IL *ne peut y avoir qu'une seule tangente* LAL *qui passe par un point donné* A *sur une Section Conique.*

Cette Proposition se trouve démontrée dans les articles 21 du Livre premier ; 56 du Livre second ; & 107 du troisiéme.

## PROPOSITION IV.

### Theorême.

140. LES *tangentes* LAL, lal, *qui passent par les extremités* A, a, *d'un diametre quelconque d'une Ellipse, ou de deux*

*deux Hyperboles opposées; sont paralleles entr'elles.*

Ceci a été démontré dans les articles 44 & 55 du Livre second, & 110 du Livre troisiéme.

## PROPOSITION V.

### Theorême.

141. UN *diametre quelconque étant donné dans l'Ellipse ou dans les Hyperboles opposées; je dis que la position du diametre qui lui est conjugué, est déterminée, de maniere qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.*

Car 1°. Si la Section est une Ellipse, ou qu'étant les Hyperboles opposées le diametre donné *Aa* soit un premier diametre; il est clair selon l'article 56 du Livre second, & la définition 13[e] du troisiéme Livre, que son conjugué *Bb* sera parallele à la tangente *LAL*, qui passe par l'une de ses extremités *A*. Donc * &c. * *Art.* 139.

2°. Si la Section étant les deux Hyperboles opposées, le diametre donné *Bb* est un second diametre; la chose a été démontrée dans l'article 115 du troisiéme Livre.

### COROLLAIRE.

142. IL est donc évident qu'une Section Conique étant donnée avec un de ses diametres, la position des ordonnées à ce diametre, sera déterminée de maniere que chacune n'en peut avoir qu'une seule, & qu'elles sont toutes paralleles entr'elles. Car elles doivent être paralleles dans la Parabole * à la tangente qui passe par * *Art.* 21.
l'origine du diametre donné, & dans les autres * Sections * *Def.* 12, II.
au diametre conjugué au diametre donné. & 14, III.

## PROPOSITION VI.

### Theorême.

143. DANS *une Ellipse tout diametre* Aa, *& dans les Hyperboles opposées tout premier diametre* Aa *divise*

*la Section en des portions* AM, am, *qui étant prises de part & d'autre de ce diametre dans des positions contraires, sont parfaitement semblables & égales entr'elles.*

Car ayant pris sur le diametre *Aa* (prolongé lorsqu'il s'agit des Hyperboles opposées,) de part & d'autre du
* *Art.* 45. 55. 85. & 118. centre *C* deux parties quelconques *CP*, *Cp*, égales entr'elles; & mené de part & d'autre les ordonnées *PM*, *pm*, il est clair que ces ordonnées sont * égales entr'elles,
* *Art.* 142. & que les angles *CPM*, *Cpm*, sont * égaux. Si donc l'on conçoit que le plan *Cpm* separé de celui qu'on voit ici, soit placé de l'autre côté du diametre *Aa* dans une position contraire, en sorte que la droite *Cp* tombe sur *CP*, & *pm*, sur *PM*; il est visible que le point *a* tombe-
* *Art.* 138. ra * sur le point *A*, & le point *m* sur le point *M*. Et comme cela arrivera toûjours de quelque grandeur qu'on puisse prendre les parties *CP*, *Cp*; il s'ensuit que tous les points *m* de la portion *am*, tomberont exactement sur tous les points *M* de la portion *AM*; & qu'ainsi ces deux portions se confondront l'une avec l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## PROPOSITION VII.

### Theorême.

FIG. 68. 69. 70. 71. 144. SI *l'on mene par un point quelconque* P *d'un diametre* Aa *d'une Section Conique (prolongé lorsque la Section étant une Hyperbole, c'est un premier diametre) une parallele* MPM *aux ordonnées à ce diametre; je dis qu'elle rencontrera la Section en deux points* M, M, *également éloignés de part & d'autre du point* P, *& non en davantage: Et reciproquement que si une ligne* MM *terminée par une Section Conique, est coupée en deux également par un diametre* Aa *en un point* P, *autre que le centre, elle sera parallele aux ordonnées à ce diametre.*

Ceci a été démontré dans les articles 9, 11 & 10 du Livre premier; 43, 45 & 55 du Livre second; 83, 85 & 118 du Livre troisiéme.

COROLLAIRE I.

145. DE-LA il est manifeste que si une ligne quelconque *MM* terminée par une Section Conique, est coupée en deux également par un diametre *Aa* en un point *P* autre que le centre ; toutes les paralleles à cette ligne terminées par la Section, le seront aussi.

## PROPOSITION VIII.

### Problême.

146. *UNE Section Conique étant donnée, en trouver un diametre.*

Ayant mené deux droites *MM*, *NN*, paralleles entr'elles, & terminées par la Section ; on tirera par leurs points de milieu *P*, *Q*, une ligne droite *Aa* qui sera un diametre.

Car * le diametre qui passe par le point *P* milieu de *MM*, doit aussi passer par le point *Q* milieu de *NN*. * *Art.* 145.

COROLLAIRE I.

147. SI l'on mene en même sorte un autre diametre quelconque *Dd* ; il est clair que la Section conique sera une parabole * lorsque *Dd* est parallele à *Aa* ; une Ellipse * lorsque *Dd* rencontre *Aa* au dedans de la Section ; & enfin une Hyperbole * ou les Hyperboles opposées lorsque les diametres *Dd*, *Aa*, se rencontrent en un point *C* hors de la Section ; & que dans ces deux derniers cas le point de rencontre *C* est le centre. Cela est une suite des définitions des diametres de ces trois lignes courbes. * *Def.* 7. I. * *Def.* 9. II. * *Def.* 9. III.

Lorsque l'Ellipse est donnée toute entiere, il suffit pour avoir le centre de mener un diametre *Aa* ; car sa grandeur étant déterminée par la rencontre de l'Ellipse, il n'y a * qu'à le diviser par le milieu en *C*. Il en est de même lorsque * les Hyperboles opposées sont données. * *Art.* 50. * *Art.* 96.

## COROLLAIRE II.

148. DE-LA il suit qu'une Section Conique étant donnée, avec un point $O$ sur le même plan, on peut toûjours mener un diametre $Dd$ qui passe par ce point. Car il ne faut dans la Parabole que mener par le point donné, $O$ une parallele $Dd$ à un diametre quelconque $Aa$; & dans l'Ellipse, ou dans l'Hyperbole, ou dans les Hyperboles opposées, une ligne droite $Dd$ qui passe par le point donné $O$, & par le centre $C$ que l'on aura trouvé par le Corollaire précedent.

## COROLLAIRE III.

149. DE-LA il est évident qu'une ligne droite $MM$, ne peut rencontrer une Section Conique qu'en deux points $M$, $M$; & jamais en davantage. Car si l'on mene par le point de milieu $P$ de la ligne $MM$ un diametre $Aa$, il est clair selon l'article 144, qu'elle sera parallele aux ordonnées à ce diametre; d'où il suit selon le même article qu'elle ne peut rencontrer la Section qu'aux deux points $M$, $M$.

Si la ligne droite passoit par le centre $C$; on auroit recours à l'article 138. où cela a déja été démontré.

## COROLLAIRE IV.

150. UNE Ellipse ou une Hyperbole (*fig.* 69. 70.) étant donnée; trouver deux de ses diametres conjugués $Aa$, $Bb$; & de plus mener les asymptotes $CG$, $Cg$, lorsque c'est une Hyperbole.

Ayant trouvé un diametre $Aa$ par le moyen des deux paralleles $MM$, $NN$, & mené par le centre $C$ une parallele $Bb$, à ces deux lignes: il est clair * que les diametres $Aa$, $Bb$, seront conjugués, puisque les lignes $MM$, $NN$, étant coupées en deux également par le diametre $Aa$ aux points $P$, $Q$, seront * ordonnées de part & d'autre à ce diametre.

* *Def.* 12, II. & 14. III.

* *Art.* 144.

Maintenant pour mener (*fig.* 70.) les asymptotes $CG$, $Cg$; on fera $AP \times Pa . \overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2 . \overline{CB}^2$ ou $\overline{Cb}^2$. ou (ce qui est la même chose) comme la moyenne proportionnelle entre $AP$, $Pa$, est à $PM$, de même $CA$ est à $CB$ ou $Cb$. Et ayant tiré les droites $AB$, $Ab$, on leur menera par le centre $C$ les paralleles indéfinies $Cg$, $CG$, qui seront les asymptotes cherchées. Car il est clair que $Bb$ sera * la grandeur du second diametre conjugué au premier $Aa$; & le reste est évident selon les définitions 13 & 14 du troisiéme Livre. *Art. 81. & 118.

## PROPOSITION IX.

### Problême.

151. UNE *Section Conique étant donnée, avec un de ses diametres* Aa; *trouver la position des ordonnées* PM *à ce diametre.*

Ayant mené deux paralleles au diametre donné $Aa$ qui en soient également éloignées de part & d'autre, & qui rencontrent la Section en des points $M$, $M$; je dis que la ligne $MM$ qui coupe le diametre donné au point $P$, est ordonnée de part & d'autre à ce diametre, pourvû que le point $P$ ne tombe point sur le centre. Fig. 68. 69. 70. 71.

Car par la construction la ligne $MM$ sera coupée en deux également par le diametre $Aa$ au point $P$; & par consequent elle sera * ordonnée de part & d'autre à ce diametre. *Art. 144.

On peut toûjours par cette maniere trouver la position d'une ordonnée $PM$ à un diametre donné $Aa$. Car 1°. Dans la Parabole & l'Hyperbole (*fig.* 68. & 70.) lorsque le diametre donné $Aa$ est un premier diametre; il est clair qu'à quelque distance qu'on mene de part & d'autre les deux paralleles au diametre $Aa$, elles rencontreront chacune la Section en un point $M$; puisque * la Section s'éloigne toûjours de plus en plus à l'infini du diametre $Aa$. 2°. Dans l'Ellipse (*fig.* 69.), & dans les Hyperboles opposées (*fig.* 71.) lorsque le diametre donné *Art. 10. 20. 84. & 118.

*Aa* est un second diametre : il est clair qu'on peut toûjours mener deux paralleles de part & d'autre du diametre *Aa*, qui coupent la Section chacune en un point *M*, en sorte que la ligne *MM* rencontre le diametre donné *Aa* en un point *P* autre que le centre ; puisque dans l'Ellipse * les ordonnées du diametre *Aa* vont toûjours en diminuant depuis le centre *C* jusqu'en *A*, & qu'au contraire dans les Hyperboles opposées * elles vont toûjours en augmentant à mesure qu'elles s'éloignent du centre *C*.

* *Art.* 44. & 55.
* *Art.* 84. & 118.

COROLLAIRE I.

152. DE-LA on tire (*fig.* 68, 69, 70.) une nouvelle maniere de mener une tangente par un point donné *A* sur une Section Conique donnée. Car * ayant mené par ce point un diametre *Aa*, & trouvé une double ordonnée *MPM* à ce diametre ; il est clair * que si l'on mene par le point *A* une parallele à *MM*, elle sera tangente en *A*.

* *Art.* 148.
* *Art.* 10, 20, 44, 55, 84, 118. & *Def.* 9, I. 12, II. 7, III.

COROLLAIRE II.

153. DE-LA on voit encore comment une Ellipse ou les Hyperboles opposées (*fig.* 69, 70, 71.) étant données avec un de leurs diametres quelconques *Aa* ; on peut trouver le diametre *Bb* qui lui est conjugué. Car il n'y a qu'à mener par le centre *C* une parallele *Bb* aux ordonnées à ce diametre.

Ou bien ; soit *Bb* le diametre donné, & qu'il faille trouver son conjugué *Aa*. Ayant tiré *MM* parallele à *Bb* & terminée par la Section, on menera par son point de milieu *P*, & le milieu *C* de *Bb*, le diametre cherché *Aa*.

COROLLAIRE III.

154. UNE Hyperbole *MAM* (*fig.* 70.) étant donnée, avec un de ses seconds diametres *Bb* de position ; en determiner la grandeur, & trouver en même temps la position de ses ordonnées.

On cherchera le premier diametre *Aa* conjugué au second *Bb*, par le moyen de la seconde maniere du Corollaire précedent; & ayant fait $AP \times Pa . \overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2 . \overline{CB}^2$ ou $\overline{Cb}^2$. Il est clair * que *Bb* sera la grandeur du second diametre *Bb*, & que ses ordonnées seront paralleles au diametre *Aa*. *Art. 81. & 118.

## PROPOSITION X.

### Problême.

155. D'UN *point donné* T *hors une Section Conique donnée, mener deux tangentes* TM, TM, *à cette Section.* FIG. 72. 73. 74.

### POUR LA PARABOLE.

Ayant mené (*fig.* 72.) par le point donné T * un diametre qui rencontre la Parabole au point *A*, & pris sa partie *AP* égale à *AT*; on tirera par le point *P* * une parallelle aux ordonnées qui rencontrera * la Parabole en deux points *M*, *M*; par lesquels & par le point donné *T* on tirera les droites *TM*, *TM*, qui seront * les tangentes cherchées. *Art. 148. *Art. 152. *Art. 144. *Art. 22. & 23.

### POUR L'ELLIPSE.

Ayant mené (*fig.* 73.) par le point donné *T* * le diametre *Aa*, & pris *CP* troisiéme proportionnelle à *CT*, *CA*; on menera par le point *P*, une parallele aux ordonnées qui rencontrera * l'Ellipse en deux points *M*, *M*; par lesquels & par le point donné *T* on tirera les droites *TM*, *TM*, qui seront * les tangentes cherchées. *Art. 148. *Art. 144. *Art. 57. & 58.

### POUR L'HYPERBOLE & LES HYPERBOLES OPPOSE'ES.

Ayant mené (*fig.* 74.) par le point donné *T*, * le diametre *Aa*, dont on déterminera la grandeur * s'il est un second diametre; on prendra *CP* troisiéme proportion- *Art. 148. *Art. 154.

nelle à *CT*, *CA* (du même côté du point donné *T*, par rapport au centre, lorſque ce point tombe dans l'un des angles faits par les aſymptotes; & du côté oppoſé, lorſqu'il tombe dans l'un des angles à côté): & l'on menera par le point *P* une parallele aux ordonnées qui rencontrera * l'Hyperbole ou les Hyperboles oppoſées en deux points *M*, *M*; par leſquels & par le point donné *T*, on tirera les droites *TM*, *TM*, qui ſeront * les tangentes cherchées.

*Art. 144.

*Art. 121.

Si le point donné tomboit ſur le centre *C*, les deux tangentes ſeroient alors * les aſymptotes *CG*, *Cg*; & on les tireroit comme l'on a enſeigné dans l'art. 150. Et enfin ſi le point donné tomboit ſur une aſymptote comme en *S*, on tireroit par le point *H* milieu de *CS*, une parallele *HM* à l'autre aſymptote *CG*, laquelle rencontreroit * l'Hyperbole en un point *M*, par où & par le point donné *S*, on tireroit une droite *SM* qui ſeroit * une des tangentes cherchées; & l'autre ſeroit l'aſymptote même *Cg* ſur laquelle ſe trouve le point donné *S*.

*Art. 108.

*Art. 104.

*Art. 107.

## COROLLAIRE I.

156. COMME la ligne *MPM* parallele aux ordonnées rencontre toûjours * la Section en deux points *M*, *M*, également éloignés de part & d'autre du point *P*, & non en davantage; il s'enſuit qu'on ne peut mener d'un point donné *T* hors une Section Conique que les deux tangentes *TM*, *TM*. D'où il eſt évident que le diametre qui paſſe par le point de rencontre *T* de deux tangentes, coupe par le milieu en *P* la ligne *MM* qui joint les points touchans; & réciproquement que le diametre qui coupe par le milieu en *P* une ligne droite *MM* qui joint les points touchans de deux tangentes *MT*, *MT*, paſſe par leur point de rencontre *T*.

*Art. 144.

### COROLLAIRE II.

157. Toutes les tangentes de la Parabole (*fig.* 72.) se rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il est necessaire. Car si l'on joint deux points touchans quelconques *M*, *M*, par une ligne droite, & qu'aprés l'avoir coupée par le milieu en *P*, on prenne sur le diametre qui passe par ce point, & qui rencontre la Parabole en *A*, la partie *AT* égale à *AP*; il est clair que les deux tangentes *MT*, *MT*, qui passent par les points *M*, *M*, se rencontreront en ce point *T*.

### COROLLAIRE III.

158. Il est encore évident (*fig.* 74.) que toutes les tangentes d'une Hyperbole se rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il est necessaire; & toûjours au dedans de l'angle fait par les asymptotes. Car si l'on joint deux points touchans quelconques *M*, *M*, par une ligne droite, & qu'aprés l'avoir coupée par le milieu en *P*, on prenne sur le diametre qui passe par ce point & qui rencontre l'Hyperbole en *A*, la partie *CT* troisiéme proportionnelle à *CP*, *CA*; il est clair que les deux tangentes *MT*, *MT*, se rencontreront en ce point *T*, lequel sera toûjours * au dedans de l'angle fait par les asymptotes, puisque le demi-diametre *CA* tombe au dedans de cet angle. * *Art.* 103.

### COROLLAIRE IV.

159. Toutes les tangentes d'une Ellipse ou des Hyperboles opposées (*fig.* 73. 74.) se rencontrent deux à deux, lorsque la ligne qui joint les deux points touchans ne passe point par le centre; sçavoir, celles de l'Ellipse du même côté du centre par rapport à cette ligne, & celles des Hyperboles opposées de l'autre côté. Cela se prouve par le moyen de la Proposition cy-dessus,

comme l'on vient de faire voir dans les deux Corollaires précédens.

## PROPOSITION XI.

### Problême.

160. Une *Section Conique étant donnée, en trouver un diametre qui fasse de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à un angle donné.*

### POUR LA PARABOLE.

*Art. 146. Ayant trouvé * un de ses diametres *AP*, on menera
Fig. 75. 76. par son origine *A*, la ligne *AN*, qui fasse avec *AP* de part ou d'autre l'angle *PAN* égal à l'angle donné, & qui rencontre la Parabole au point *N*. Ayant divisé *AN* par le milieu en *O*, & tiré *OM* parallelle à *AP*; je dis que la ligne *MO* est le diametre qu'on cherche.

Car 1°. Tous les diametres d'une Parabole devant être paralleles entr'eux, selon la definition septiéme du premier Livre, il s'ensuit que *MO* sera un diametre; puisque *AP* en est un.

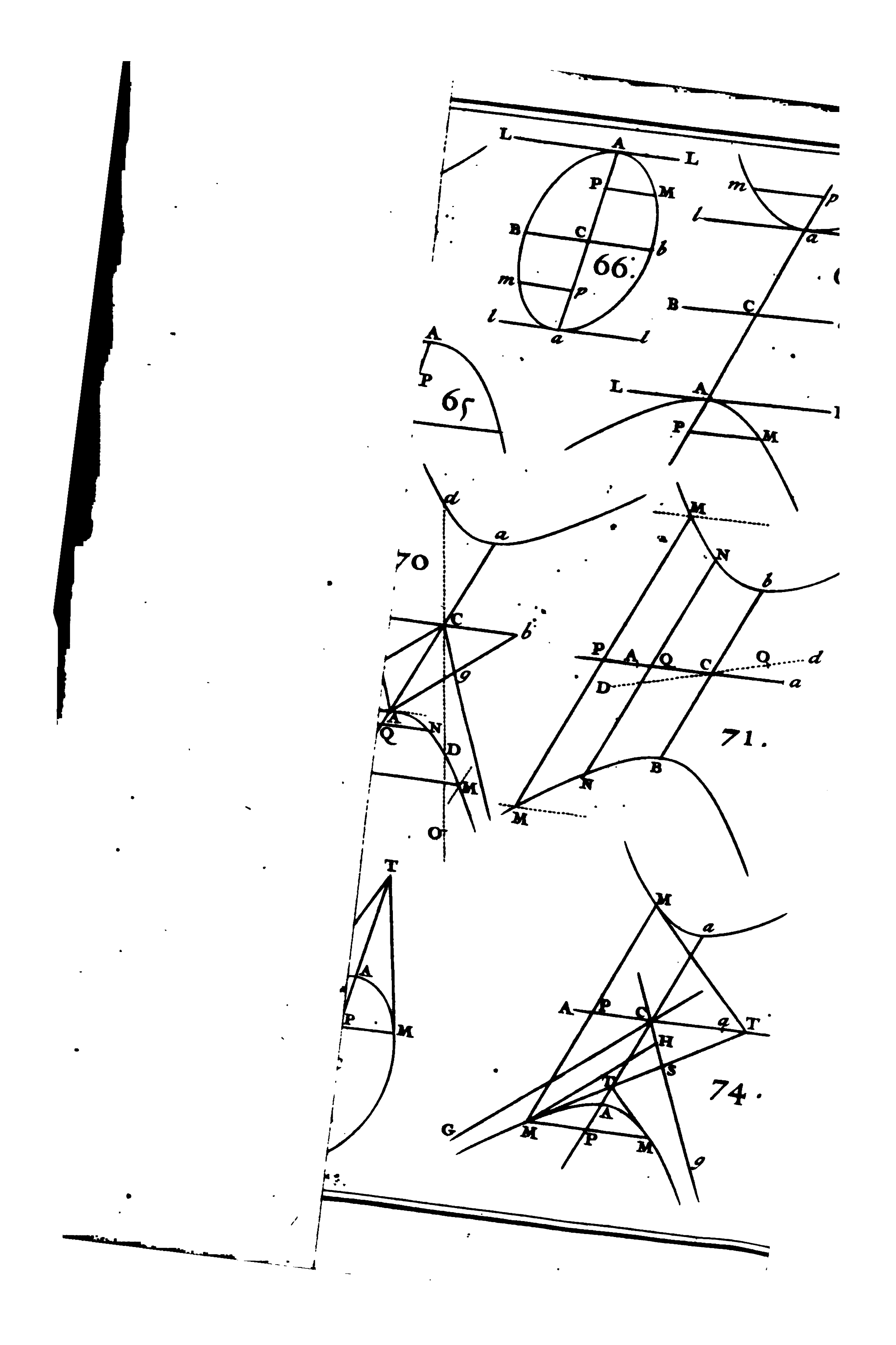
2°. La ligne *AN* terminée par la Parabole étant coupée en deux parties égales par le diametre *MO*, elle lui
*Art. 144. sera * ordonnée de part & d'autre.

3°. A cause des paralleles *MO*, *AP*, l'angle *MOA* que fait le diametre *MO* avec son ordonnée *OA*, sera égal à l'angle *PAN* qui a été fait égal à l'angle donné. Donc &c.

Si l'angle donné est droit, il est manifeste que le dia-
*Art. 23. metre *MO* qu'on trouvera par cette methode sera * l'axe de Parabole.

### POUR LES AUTRES SECTIONS.

*Art. 146. Ayant trouvé * un de leurs diametres *Aa*, & décrit
Fig. 77. 78. 79. 80. sur ce diametre de part ou d'autre un arc de cercle *ANa* capable de l'angle donné ou de son complement à deux droits; on menera du point *N* où il rencontre la Séc-



66.
65
70
71.
74.

tion, aux deux extremités $A$, $a$, du diametre $Aa$, les lignes $NA$, $Na$; par les milieux desquelles $O$, $Q$, & par le centre $C$, on tirera deux diametres $Mm$, $Ss$. Je dis que chacun de ses diametres fera de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à l'angle donné.

Car la ligne $AN$ terminée par la Section, étant coupée en deux également au point $O$ par le diametre $Mm$, elle sera * ordonnée de part & d'autre à ce diametre. Or le diametre $Mm$ est parallele à la ligne $Na$, puisqu'il divise par le milieu aux points $C$, $O$, les lignes $Aa$, $AN$; & partant l'angle $mOA$ que fait le diametre $Mm$ avec son ordonnée $AO$, sera égal à l'angle $aNA$, qui par la construction est égal à l'angle donné, ou à son complement à deux droits. On prouvera de même que le diametre $Ss$ fait avec son ordonnée $QN$ un angle égal à l'angle donné, ou à son complement à deux droits. Donc &c. *Art. 144.

Il est visible 1°. Que le diametre $Ss$ est * conjugué au diametre $Mm$; puisqu'il est parallele à son ordonnée $ON$. 2°. Que les diametres conjugués $Mm$, $Ss$, deviennent * les deux axes, lorsque l'angle donné est droit. *Def. 12, II. & 14, III. *Art. 58. & 128.

## PROPOSITION XII.

### Problême.

161. **U**N *diametre d'une Section Conique étant donné, avec son parametre, & la position de ses ordonnées, & sçachant de plus si c'est un premier ou second diametre lorsqu'il s'agit de l'Hyperbole; décrire la Section par une methode uniforme pour toutes les trois.*

PREMIERE MANIERE.

*Pour la Parabole.* Ayant trouvé * l'axe $AP$, son origine $A$, & son parametre $AG$ que l'on prendra sur l'axe prolongé du côté de son origine; on menera par le point $G$ une ligne droite indéfinie $DD$ perpendiculaire à $PG$. *Art. 27. FIG. 81.

On fera mouvoir ensuite une ligne droite indéfinie *DM* le long de *GD* toûjours parallelement à *AG*, en entraînant par son extremité *D* le côté *DA* de l'angle droit *DAM*, mobile sur son sommet *A* autour de l'origine *A* de l'axe *AP*. Je dis que l'intersection continuelle *M* de la ligne *DM* & du côté *AM*, décrira dans ce mouvement la Parabole qu'on demande.

Car menant *MP* perpendiculaire à l'axe, les triangles réctangles *AGD*, *MPA*, seront semblables; puisque chacun des angles *GAD*, *PMA*, étant joint à l'angle *PAM*, vaut un droit. On aura donc *AG*. *GD* ou *PM* :: *PM*. *AP*. D'où il suit que $\overline{PM}^2 = GA \times AP$; & qu'ainsi *PM* est une * ordonnée à l'axe *AP*.

* *Art.* 7.

On a déja donné cette construction dans le Livre premier article 29, d'une maniere qui convient à tous les diametres: On ne la repete ici, & on ne la restraint à l'axe, que pour en faire voir la liaison & le rapport qu'elle a avec celle qu'on va donner pour les autres Séctions.

*Pour les autres Séctions.* Ayant trouvé entre le diametre donné & son parametre une moyenne proportionnelle, & l'ayant placée en sorte qu'elle soit parallele aux ordonnées, & coupée en deux également par le centre; il est clair * qu'on aura deux diametres conjugués; par le moyen desquels on cherchera * les deux axes, & ensuite le parametre de celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipse, & du premier dans l'Hyperbole. Cela fait.

* *Def.* 13. II. & 15. III.
* *Art.* 64. & 128.

Fig. 82. 83. On prolongera dans l'Ellipse, & on coupera dans l'Hyperbole l'axe *Aa* en *G*; en sorte que *aG* soit à *GA*, comme l'axe *Aa* est à son parametre. Ayant tiré par le point *G* une perpendiculaire indéfinie *DD* à l'axe *Aa*, on fera mouvoir le point *D* le long de cette ligne, en entraînant avec lui la ligne droite *Da* mobile autour de l'extremité *a* de l'axe *Aa*, & le côté *DA* de l'angle droit *DAM* mobile sur son sommet *A* autour de l'autre extremité *A* de l'axe *Aa*. Je dis que l'interséction

continuelle $M$ des lignes $AM$, $aD$, décrira dans ce mouvement la Séction requise.

Car menant $MP$ perpendiculaire sur l'axe $Aa$, les triangles semblables $aPM$, $aGD$, donnent $aP. PM :: aG. GD$. Or les triangles réctangles $AGD$, $MPA$, sont semblables ; puisque chacun des angles $GAD$, $PMA$ ; étant joint à l'angle $PAM$, vaut un droit ; Et partant $AP. PM :: GD. GA$. Si donc l'on multiplie les Antecedens & les Consequens des deux premieres raisons, par ceux de ces deux dernieres ; on aura $aP \times PA. \overline{PM}^2 :: aG \times GD. GD \times GA :: aG. GA$, c'est à dire, comme l'axe $Aa$ est à son parametre. Donc * &c. * Art. 41. & 81.

Il est à remarquer que plus le point $D$ s'éloigne du point $G$ sur la ligne $DD$ ; plus l'angle $PaM$ augmente, & plus au contraire l'angle $PAM$ diminuë ; de sorte que les lignes $aM$, $AM$, deviennent paralleles dans l'Hyperbole, & se coupent ensuite de l'autre côté de la ligne $DD$, où elles décrivent par leur intersection continuelle l'Hyperbole opposée.

Si l'on conçoit dans l'Ellipse & dans l'Hyperbole, que le point $a$ s'éloigne à l'infini du point $A$, ou (ce qui est la même chose) que l'axe $Aa$ devienne infiniment grand ; les lignes $GA$, $Da$, qui ne se rencontrent que dans l'infini, peuvent être regardées comme paralleles : ainsi cette derniere construction retombe dans le cas de la précédente. C'est pourquoi l'Ellipse ou l'Hyperbole deviendroit alors une Parabole qui auroit pour parametre la ligne $AG$ ; Et par consequent on peut regarder une Parabole, comme une Ellipse ou une Hyperbole dont l'axe est infini : sçavoir, le premier dans l'Hyperbole, & celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipse.

### SECONDE MANIÉRE.

*Pour la Parabole.* Soit un triangle isoscelle $HAL$, dont l'un des côtés $AH$ soit situé sur le diametre donné $AP$ prolongé indéfiniment de part & d'autre de son FIG. 84.

origine *A*, & l'autre côté *AL* ſur la tangente indéfinie *LAL* qui paſſe par le point *A*. Soit conçûë ſa baſe *HL* ſe mouvoir toûjours parallelement à elle-même en entraînant par l'une de ſes extremités *L* la ligne indéfinie *LM* parallele à *AP*, & par l'autre extremité *H* la ligne *HF* parallele à *AL* & égale au parametre donné du diametre *AP*, laquelle entraîne auſſi par ſon extremité *F* la droite *FA* mobile autour du point fixe *A*. Je dis que l'interſéction continuelle *M* des deux droites *FA*, *LM*, décrit pendant que la ligne *HL* ſe meut dans l'angle *HAL* & ſon oppoſé ou ſommet, la Parabole *MAM* qu'on demande.

Car menant l'ordonnée *MP* au diametre *AP*, les triangles ſemblables *AHF*, *APM*, donnent *AH* ou *AL* ou *PM*. *HF* :: *AP*. *PM*, & partant $\overline{PM}^2 = AP \times HF$. Donc * &c.

*Art. 7. & 20.

On doit obſerver que le point *H* doit tomber au delà de l'origine *A* du diametre *AP*; lorſque les points *F*, *L*, tombent de part & d'autre de ce diametre.

FIG. 85. 86. *Pour les autres Sections.* La conſtruction eſt la même que pour la Parabole, à l'exception que la ligne *LM* doit tourner autour de l'autre extremité *a* du diametre donné *Aa*; au lieu que dans la Parabole elle lui eſt parallele. On ſuppoſe dans l'Hyperbole que le diametre donné eſt un premier diametre; car ſi c'étoit un ſecond, on trouveroit ſelon l'article 115 du Livre troiſiéme, le premier qui lui eſt conjugué & ſon parametre.

Car menant *MP* ordonnée au diametre *Aa*, les triangles ſemblables *aPM*, *aAL*, & *APM*, *AHF*, donnent *aP*. *PM* :: *aA*. *AL* ou *AH*. Et *AP*. *PM* :: *AH*. *HF*. Et partant, ſi l'on multiplie les Antecedens & les Conſequens des deux premieres raiſons par ceux des deux ſecondes, on aura $aP \times PA$. $\overline{PM}^2$ :: $aA \times AH$. $AH \times HF$ :: *aA*. *HF*. Donc * &c.

*Art. 41. 55. 81. & 118.

Il faut obſerver que les points *H*, *a*, doivent tomber de part & d'autre du point *A* dans l'Ellipſe, & du même côté dans l'Hyperbole, lorſque les points *F*, *L*, tom-

bent de part & d'autre du diametre *Aa*.

## COROLLAIRE I.

162. DE-LA on voit comment un diametre *Aa* étant donné avec une de ses ordonnées *PM*; on peut trouver son parametre *HF*. Car 1°. Dans la Parabole on prendra sur le diametre *AP* la partie *AH* égale à *PM*; & ayant tiré la ligne *HF* parallele à *PM*, & terminée en *F* par la ligne *AM* tirée de l'origine *A* du diametre par l'extremité *M* de l'ordonnée, il est clair que cette ligne *HF* sera le parametre du diametre *AP*. FIG. 84.

2°. Dans les autres Sections, on menera par l'une des extremités *a* du diametre donné *Aa* la ligne *aM* qui rencontre la tangente *AL*, qui passe par l'autre extremité *A*, au point *L*; & ayant pris sur le diametre *Aa* la partie *AH* égale à *AL*, on tirera *HF* parallele à *PM*, laquelle rencontrant en *F* la ligne *AM*, sera le parametre du diametre *Aa*. FIG. 85. 86.

## COROLLAIRE II.

163. ON tire de la seconde maniere qu'on vient d'expliquer, une methode uniforme & trés-exacte dans la pratique de décrire une Section Conique par plusieurs points. La voici dans l'Ellipse: & elle servira de Regle pour les autres Sections.

Ayant pris sur la tangente *AL*, qui passe par l'une des extremités *A* du diametre donné *Aa*, la partie *AG* égale à son parametre, & mené une parallele indéfinie *GE* à *Aa*; on tirera librement par le point *A* autant de lignes droites *AF*, *AF*, &c. qu'on voudra. Ayant pris sur la tangente indéfinie *AL*, les parties *AL*, *AL*, &c. égales aux correspondantes *GF*, *GF*, &c. & mené les droites *aL*, *aL*, &c; je dis que les intersections *M*, *M*, &c. des droites correspondantes *FA*, *La*, *FA*, *La*, &c. seront des points de l'Ellipse qui a pour diametre la ligne *Aa*, pour tangente la ligne *AL*, & pour parametre du FIG. 87.

diametre *Aa* la ligne *AG*. Cela est visible en menant *FH* parallele à *AG*, & tirant la ligne *HL* par le point *L* correspondant au point *F*. Car le triangle *HAL* sera isoscelle ; puisque * *AL* est égale à *GF* ou *AH*, & *HF* sera égale au parametre du diametre *Aa*: c'est pourquoi cette construction retombe dans celle de la seconde des deux maniéres précédentes.

* Hyp.

Comme les lignes *GF*, *AL*, deviennent fort grandes, lorsqu'il s'agit de trouver des points *M* qui soient proches du point *a*; on pourra se servir, pour trouver ces points, de la tangente *al* qui passe par l'autre extremité *a* du diametre *Aa*, & de la ligne *gf* parallele à *Aa*, comme l'on voit dans cette figure.

Si l'on mene les ordonnées *MP*, *MP*, &c. paralleles à la tangente *AL*, & qu'on les prolonge de l'autre côté du diametre *Aa* en *M*, *M*, &c, en sorte qu'elles soient coupées chacune en deux également par ce diametre ; il est clair * que ces nouveaux points *M*, *M*, &c, seront encore à la même Ellipse.

* Art. 43.

On pourroit se servir d'une même ouverture de compas *GF* ou *AL* pour marquer sur les lignes *GF*, *AL*, autant de points *F*, *F*, &c, *L*, *L*, &c, qu'on voudra ; car par ce moyen toutes ces petites parties étant égales entr'elles, chaque *GF* seroit égale à la correspondante *AL*; ce qui est le fondement de la démonstration.

## PROPOSITION XIII.

### Theorême.

FIG. 88. 89. 90. 91.

164. S'IL *y a deux droites* MN, AR, *terminées par une Séction Conique, lesquelles se rencontrent en un point* P, *& qui soient paralleles à deux droites données de position ; je dis que le réctangle* MP×PN *sera toûjours au réctangle* AP×PR *en raison donnée, en quelque endroit de la Séction que puissent tomber les droites* MN, AR.

POUR

## POUR LA PARABOLE.

Soient (*fig.* 88.) les tangentes $CB$, $EB$, qui se rencontrent au point $B$, paralleles aux droites $MN$, $AR$: je dis que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{CB}^2 . \overline{EB}^2$.

Car ayant mené * par le point $G$ milieu de $MN$ le diametre $CG$, & tiré par son origine $C$ la parallele $CB$ à $MN$; il est clair * qu'elle sera tangente en $C$. On menera de la même sorte la tangente $EB$ parallele à $AR$, que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre le diametre $CG$ au point $K$; & tirant par le point touchant $E$ l'ordonnée $EL$, on aura * $KC = CL$; & par consequent $KB = BE$. On tirera ensuite $AD$ ordonnée, & $AF$ parallele au diametre $CG$, & on nommera les données $KB$ ou $BE$, $m$; $BC$, $n$; $CK$, $e$; le parametre $CH$ du diametre $CG$, $p$; & les indéterminées $AP$, $x$; $PM$, $y$; $AD$, $r$; $CD$, $s$. *Art. 148. *Art. 10. & 21. *Art. 22. & 23.

Cela posé, les triangles semblables $KBC$, $APF$, donneront $PF = \frac{nx}{m}$, $AF$ ou $DG = \frac{ex}{m}$: Et par consequent $CG = \frac{ex}{m} + s$, $GM$ ou $GN = y + \frac{nx}{m} + r$, $PN$ ou $GN + GP = y + \frac{2nx}{m} + 2r$; $MP \times PN = yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry$, $\overline{GM}^2 = yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr$. Or * $CD(s) . CG(\frac{ex}{m} + s) :: \overline{AD}^2(rr) . \overline{GM}^2 = rr + \frac{err}{ms}x = rr + \frac{ep}{m}x$, puisque $\overline{AD}^2(rr) = CD \times CH(ps)$. Et comparant ensemble ces deux valeurs de $\overline{GM}^2$, on formera l'équation $yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = 0$, qui convient également à tous les points de la Parabole, lorsque la ligne $AR$ tombe au dessus du diametre $CG$, & que le point d'intersection $P$ tombe entre les points $A$, $R$. *Art. 8. & 20.

Maintenant si l'on fait dans cette équation $y = 0$, on aura (en effaçant tous les termes où $y$ se rencontre)

$\frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = 0$. D'où l'on tire $x = \frac{emp}{nn} - \frac{2mr}{n}$ $= AR$; puiſque $PM\ (y)$ devenant nulle ou zero, il eſt clair que $AP\ (x)$ devient $AR$. Donc $AP \times PR$ $= \frac{emp}{nn}x - \frac{2mr}{n}x - xx$; & par conſequent $MP \times PN$ $(yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry)$. $AP \times PR$ $(\frac{emp}{nn}x - \frac{2mr}{n}x - xx)$ :: $\overline{CB}^2\ (nn)$. $\overline{EB}^2\ (mm)$, puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on retrouve l'équation précedente. Or comme les tangentes $CB$, $BE$ demeurent toûjours les mêmes, en quelque endroit de la Parabole que tombent leurs paralleles $MN$, $AR$; il s'enſuit &c.

Il peut arriver differens cas, ſelon les differentes poſitions des droites $MN$, $AR$; mais comme la démonſtration demeure toûjours la même, & qu'il ne peut y avoir de changement que dans quelques lignes, ou dans quelques termes qui s'évanoüiſſent, je ne m'arrêterai point à les expliquer en détail. On doit obſerver la même choſe dans les deux autres Sections.

## POUR LES AUTRES SECTIONS.

Ayant mené (*fig.* 89. 90. 91.) les deux demi-diametres $CO$, $CR$, paralleles aux droites $MN$, $AR$; je dis que $MP \times PN$. $AP \times PR$ :: $\overline{CO}^2$. $\overline{CR}^2$.

Soit mené le diametre $CG$ qui ait pour double ordonnée $MN$, ſur lequel ſoient abaiſſées les droites $BE$, $AD$, paralleles à $MN$; & ayant tiré $AF$ parallele à $CG$, ſoient nommées les données $CB$, $m$; $BE$, $n$; $CE$, $e$; & le demi-diametre $CK$, $t$; ſon demi-conjugué $CO$, $c$; & les interminées $AP$, $x$; $PM$, $y$; $AD$, $r$; $CD$, $s$.

Cela poſé, les triangles ſemblables $CBE$, $APF$, donneront $PF = \frac{nx}{m}$, $AF$ ou $DG = \frac{ex}{m}$. Par conſéquent dans l'Hyperbole ou les Hyperboles oppoſées (*fig.* 90. & 91.) on aura $CG = \frac{ex}{m} \pm s$, $GM$ ou $GN = y$ $+ \frac{nx}{m} - r$, $PN$ ou $GN + GP = y + \frac{2nx}{m} - 2r$; $MP \times PN$

$yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry$, $\overline{GM}^2 = yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nn}{mm}xx - \frac{2nr}{m}x + rr$. Or * $\overline{CD}^2 \mp \overline{CK}^2 (ss \mp tt) . \overline{CG}^2 \mp \overline{CK}^2$ *Art. 82. & 118.
$\left(\frac{ccxx}{mm} \pm \frac{2csx}{m} + ss \mp tt\right) :: \overline{AD}^2 (rr) . \overline{GM}^2 = rr + \frac{ccrrxx \pm 2csmrrx}{mmss \mp mmtt} = rr + \frac{ccccxx \pm 2cccmsx}{mmtt}$, en mettant pour $\frac{rr}{ss \mp tt}$ sa * valeur $\frac{cc}{tt}$. Et comparant ensemble ces *Art. 82. & 118.
deux valeurs de $\overline{GM}^2$, on formera l'équation $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nntt - ccee}{mmtt}xx - \frac{2nrtt \mp 2cces}{mtt}x = 0$, dans laquelle mettant à la place de $nntt - ccee$ sa valeur $cctt$ (il faut imaginer l'Hyperbole conjuguée qui passe * par l'extremité $B$, lorsque $CB$ est la moitié d'un second diametre) *Art. 134.
tirée de ce que * $\overline{CE}^2 + \overline{CK}^2 (ee + tt) . \overline{EB}^2 (nn) :: \overline{CK}^2 (tt) . \overline{CO}^2 (cc)$. on aura celle-ci $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{cc}{mm}xx - \frac{2nrtt \mp 2cces}{mtt}x = 0$, qui convient à tous les points de la Section, lorsque les points $A$, $R$, tombent de part & d'autre du diametre $CG$, & que le point d'intersection $P$ tombe entre les points $A$, $R$. *Art. 81. & 118.

Maintenant si l'on fait dans cette équation $y = 0$, on aura (en effaçant tous les termes où $y$ se rencontre) $\frac{cc}{mm}xx - \frac{2nrtt \mp 2cces}{mtt}x = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{2mnrtt \pm 2ccems}{cctt} = AR$; puisque $PM$ ($y$) devenant nulle ou zero, il est clair que $AP$ ($x$) devient $AR$. Donc $AP \times PR$ $\left(\frac{2mnrtt \pm 2mcces}{cctt}x - xx\right) . MP \times PN \left(yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry\right) :: \overline{CB}^2 (mm) . \overline{CO}^2 (cc)$. Car multipliant les extrêmes & les moyens de cette proportion, on retrouve l'équation précédente. Or comme les demi-diametres $CO$, $CB$, demeurent toûjours les mêmes en quelque endroit de la Section que tombent leurs paralleles $MN$, $AR$; il s'ensuit &c.

Je ne mets point ici en particulier le calcul pour l'Ellipse, parce qu'il ne differe de celui de l'Hyperbole qu'en quelques lignes.

## COROLLAIRE I.

FIG. 92. 165. S'IL y a deux lignes droites *MN*, *AR*, terminées par une Section Conique, lesquelles se rencontrent en un point *P*; & qu'on mene par tout où l'on voudra deux autres droites *FG*, *BD*, paralleles aux deux premieres, & terminées aussi par la Section, lesquelles se rencontrent en un point *Q*: il est clair que $MP \times PN . AP \times PR :: FQ \times QG . BQ \times QD$. Car les deux droites *AR*, *BD*, étant paralleles entr'elles, seront paralleles à la même droite *CZ* donnée de position; comme aussi les deux droites *MN*, *FG*, à la même droite *CY* donnée pareillement de position.

## COROLLAIRE II.

166. S'IL y a deux paralleles *AR*, *BD*, terminées par une Section Conique, lesquelles rencontrent aux points *E*, *Q*, une ligne droite *FG* terminée par la même Section; je dis que $FE \times EG . AE \times ER :: FQ \times QG . BQ \times QD$. Car concevant dans le premier Corollaire que *MN* tombe sur *FG*, il est clair que les réctangles $MP \times PN$, $AP \times PR$, deviennent $FE \times EG$, $AE \times ER$.

## COROLLAIRE III. POUR LE CERCLE.

FIG. 93. 167. ON peut tirer de ce Theorême la proprieté du cercle qui est si connuë de tous les Geometres; sçavoir que si par un point quelconque *P* pris au dedans ou au dehors d'un cercle, on mene autant de lignes qu'on voudra *AR*, *MN*, *HL*, &c. terminées par la circonference, les réctangles $AP \times PR$, $MP \times PN$, $HP \times PL$, &c. seront tous égaux entr'eux. Car menant les demi-diametres *CB*, *CO*, *CD*, &c. paralleles à ces lignes, il est clair par le Theorême, que tous ces réctangles seront entr'eux, comme les quarrés de ces demi-diametres ou rayons, lesquels par la proprieté essentielle du cercle sont tous égaux entr'eux.

## COROLLAIRE IV. POUR LA PARABOLE.

168. S'IL y a une ligne droite $MN$ terminée par une Parabole, & qu'on mene par un des points quelconques $A$ de la Parabole un diametre $AF$ qui rencontre cette ligne au point $F$: je dis que le rectangle $MF \times FN$ est égal au rectangle de $AF$ par le parametre $CH$ du diametre $CG$, qui passe par le milieu de $MN$. FIG. 94.

Car concevant dans le Theorême que $AP$ tombe sur $AF$, il est clair que la ligne $PF$ ($\frac{n}{m}x$) devient nulle ou zero, & qu'ainsi $\frac{n}{m} = o$. C'est pourquoi effaçant dans l'équation à la Parabole $yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = o$, tous les termes ou $\frac{n}{m}$ se rencontre, on en formera celle-ci $yy + 2ry - \frac{ep}{m}x = o$. Or $AF = \frac{ex}{m}$, $CH = p$, & $MF \times FN = yy + 2ry$. Donc &c.

Ce n'est que pour faire voir la généralité du Theorême, que j'en déduis cette proprieté; car on la peut démontrer plus aisément sans y avoir recours, en cette sorte. $\overline{GM}^2 = GC \times CH$, $\overline{AD}^2$ ou $\overline{GF}^2 = DC \times CH$, & partant $\overline{GM}^2 - \overline{GF}^2$ ou $MF \times FN = \overline{GC - DC} \times CH = AF \times CH$.

## COROLLAIRE V. POUR LA PARABOLE.

169. DE-LA il est évident,

1°. Que s'il y a deux droites $MN$, $EL$, terminées par une Parabole, & paralleles entr'elles; & qu'on mene par deux points quelconques $A$, $B$, de cette Parabole, deux diametres $AF$, $BP$, qui rencontrent ces lignes aux points $F$, $P$: il est évident, dis-je, que $MF \times FN . EP \times PL :: AF . BP$. Car le diametre $CG$ qui passe par le milieu de $MN$, passe aussi par le milieu

de $EL$; & par consequent le réctangle $EP \times PL = BP \times CH$, de même que $MF \times FN = AF \times CH$.

2°. Que s'il y a une ligne droite $MN$ terminée par une Parabole, & qui rencontre deux de ses diametres $AF$, $BK$, aux points $F$, $K$; on aura $MF \times FN$. $MK \times KN :: AF. BK$.

3°. Que s'il y a deux lignes droites $MN$, $EL$, terminées par une Parabole, & paralleles entr'elles, qui rencontrent un de ses diametres quelconques $BP$ aux points $K$, $P$; on aura $MK \times KN$. $EP \times PL :: BK. BP$.

## COROLLAIRE VI. POUR LA PARABOLE.

170. DE-LA on voit comment on peut décrire une Parabole qui passe par trois points donnés $A$, $M$, $N$, & dont les diametres $AF$, $CG$, soient paralleles à une ligne droite donnée de position; & démontrer qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.

Car ayant mené une ligne $MN$ qui joigne deux des points donnés $M$, $N$; on tirera par le troisiéme $A$ un diametre $AF$ parallele à la ligne donnée de position, & qui rencontre la ligne $MN$ au point $F$, & par le point de milieu $G$ de $MN$ une parallele $GC$ à $AF$. On fera ensuite $MF \times FN$. $MG \times GN$. ou $\overline{GM}^2 :: AF. GC$. Et ayant pris $CH$ troisiéme proportionnelle à $CG$, $GM$,

*Art. 29. & 30. on décrira * du parametre $CH$, & du diametre $CG$ dont l'origine est en $C$, une Parabole dont les ordonnées soient paralleles à $MN$; elle satisfera à la question.

*Art. 7. & 20. Car 1°. Elle passera * par les points $M$, $N$; puisque par la construction $CH \times CG = \overline{GM}^2$ ou $\overline{GN}^2$. 2°. Elle passera par le point $A$; puisque $MG \times GN$. $MF \times FN :: CG. FA$. 3°. Les diametres $AF$, $CG$, seront paralleles à la droite donnée de position.

Comme la Parabole qui satisfait au Problême, a necessairement pour diametre la ligne $CG$, qui a pour origine le point $C$, & pour parametre la ligne déterminée $CH$; il s'ensuit qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.

## COROLLAIRE VII. POUR LA PARABOLE.

171. S'IL y a deux droites $AR$, $MN$, terminées par une Parabole, lesquelles se rencontrent en un point $P$; & qu'ayant fait $AP \times PR . MP \times PN :: \overline{AP}^2 . \overline{PF}^2$. on tire la ligne $AF$: je dis que cette ligne sera un diametre. Car ayant mené les tangentes $CB$, $EB$, paralleles aux droites $MN$, $AR$, & par le point touchant $C$ le diametre $CG$ qui rencontre $EB$ prolongée en $K$; on aura $\overline{EB}^2$ ou $\overline{KB}^2 . \overline{BC}^2 :: AP \times PR . MP \times PN :: \overline{AP}^2 . \overline{PF}^2$, & par consequent $KB . CB :: AP . PF$. Les triangles $KBC$, $APF$ seront donc semblables, & leurs côtés $AF$, $KC$, paralleles entr'eux : d'où il suit que la ligne $AF$ qui se trouve ainsi parallele au diametre $CG$, sera un diametre; puisque dans la Parabole * tous les diametres sont paralleles entr'eux. FIG. 88. * Def. 7. I.

## COROLLAIRE VIII. POUR LA PARABOLE.

172. ON tire du Corollaire précédent une maniére de décrire une Parabole qui passe par quatre points donnés $A$, $M$, $R$, $N$.

Car ayant joint ces quatre points par deux droites $AR$, $MN$, qui s'entrecoupent en un point $P$, & fait $AP \times PR . MP \times PN :: \overline{AP}^2 . \overline{PF}^2$; on tirera la ligne $AF$, & on décrira * une Parabole qui passe par les trois points $A$, $M$, $N$, & dont les diametres soient paralleles à la ligne $AF$. Elle sera celle qu'on demande; car selon le Theorême la ligne $AP$ doit rencontrer cette Parabole en un point $R$, tel que $AP \times PR . MP \times PN :: \overline{EB}^2$ ou $\overline{KB}^2 . \overline{BC}^2 :: \overline{AP}^2 . \overline{PF}^2$. * Art. 170.

Si l'on eut pris le point $F$ de l'autre côté du point $P$, on auroit décrit une autre Parabole qui auroit encore passé par les quatre points donnés. Mais l'on doit remarquer que lorsqu'un de ces points $F$ tombe sur l'un des FIG. 95.

points donnés *M* ou *N*, il ne peut y avoir qu'une Parabole qui satisfasse; & que lorsque tous les deux tombent sur les points *M*, *N*, il n'y en peut avoir aucune: puisqu'alors le diametre *AF* de la Parabole passeroit par
*Art. 10. deux de ses points, ce que l'on a démontré * être impossible.

## COROLLAIRE IX.

### POUR L'HYPERBOLE OU LES HYPERBOLES OPPOSÉES.

FIG. 96, 97. 173. S'IL y a une ligne droite *MN* terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, laquelle rencontre une asymptote *CB* au point *Q*, & qui soit parallele à une ligne donnée de position; & qu'on tire par un point quelconque *A* de la Section une droite *AP* parallele à cette asymptote, & qui rencontre au point *P* la ligne *MN*: je dis que le rectangle $MP \times PN$ sera toûjours au rectangle $2AP \times PQ$ en raison donnée, en quelque endroit de la Section que tombent les droites *MN*, *AP*.

Car concevant dans le Theorême (*fig.* 90. 91.) que le demi-diametre *CB* devienne une asymptote, il est
*Art. 102. clair * qu'alors les trois côtés du triangle *CBE* deviennent chacun infini. C'est pourquoi menant (*fig.* 96. 97.) par l'extremité *K* du diametre *LK* qui passe par le milieu de *MN*, une parallele *KS* à *MN*, qui rencontre l'asymptote *CB* en *S*, on formera un triangle *CKS* dont tous les côtés seront finis, & qui sera semblable au trian-
*Art. 113. gle *CBE*; & partant on aura *CK* ($t$). *KS* ou * *CO* ($c$) :: *CE* ($e$). *EB* ($n$). Ce qui donne $ce = nt$. Si l'on met à la place de $ce$ sa valeur $nt$ dans l'équation à l'Hyperbole $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nntt - ccee}{mmtt}xx - \frac{2nrtt \mp 2cecs}{mtt}x = 0$ que l'on a trouvée dans le Theorême, on en formera celle-ci $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry - \frac{2nrt \mp 2ncs}{mt}x = 0$ ou $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry = \frac{2nrt \pm 2ncs}{mt}x$. Or en prolongeant *AD*, s'il est necessaire,

cessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'asymptote $CB$ en $H$, les triangles semblables $CKS$, $CDH$, donneront $CK(t). KS(c) :: CD(s). DH = \frac{cs}{t}$. Et partant $AH$ ou $PQ = \frac{rt \pm cs}{t}$. On aura donc $MP \times PN$ $(yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry)$. $2AP \times PQ$ $(\frac{2rt \pm 2cs}{t}x) :: EB(n)$. $CB(m) :: KS. CS$. Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens on retrouve l'équation précédente. Or les lignes $KS$, $CS$, demeurent toûjours les mêmes en quelque endroit de la Séction que tombent les droites $MN$, $AP$; parce que le diametre $LK$ qui passe par le milieu de $MN$, passe aussi* par le milieu de toutes les paralleles à $MN$ terminées par la Séction, en quelque endroit qu'elles se rencontrent. Donc &c. * Art. 145.

On peut démontrer ce Corollaire immediatement, & sans avoir recours au Theorême, en cette sorte. Soient les données $CK = t$, $KS$ ou $CO = c$, $CS = m$, & les indéterminées $CD = s$, $AD$ ou $DI = r$, $AP = x$, $PM = y$. Les triangles semblables $CSK$, $APF$, donnent $PF = \frac{cx}{m}$, $AF$ ou $DG = \frac{tx}{m}$; Et partant $GM$ ou $GN = y + \frac{cx}{m} - r$, $CG = \frac{tx}{m} + s$. Or à cause des triangles semblables $CKS$, $CDH$, $CGQ$, on aura $CK(t)$. $KS(c) :: CD(s). DH = \frac{cs}{t} :: CG(\frac{tx}{m} + s). GQ = \frac{cx}{m} + \frac{cs}{t}$. Et partant $MQ \times QN$ ou $\overline{GQ}^2 - \overline{GM}^2 = \frac{2ccsx}{mt} + \frac{ccss}{tt} - yy - \frac{2cxy}{m} + 2ry + \frac{2crx}{m} - rr =$ * $AH \times HI$ ou $\overline{DH}^2 - \overline{DI}^2 = \frac{ccss}{tt} - rr$; d'où l'on tire (en effaçant de part & d'autre $\frac{ccss}{tt} - rr$, & transposant d'une part tous les termes où $y$ se rencontre) cette équation $yy + \frac{2cxy}{m} - 2ry = \frac{2ccsx}{mt} + \frac{2crx}{m}$, laquelle étant reduite en proportion, donne $MP \times PN$ $(yy + \frac{2cxy}{m} - 2ry)$. $2AP \times PQ$ FIG. 96. * Art. 97.

$\left(\frac{2csx}{t} + 2rx\right) :: KS\,(c).\ CS\,(m)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

La démonſtration eſt la même pour les Hyperboles oppoſées à quelques ſignes prés.

## COROLLAIRE X.

### POUR L'HYPERBOLE OU LES HYPERBOLES OPPOSE'ES.

FIG. 98. 174. IL ſuit du Corollaire précédent,

1°. Que s'il y a deux droites paralleles entr'elles $MN$, $HG$, terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, & qui rencontrent une aſymptote $CS$ aux points $Q$, $I$; & qu'on mene par deux points quelconques $A$, $B$, de la Section deux paralleles $AP$, $BD$, à l'aſymptote $CS$, qui rencontrent ces lignes aux points $P$, $D$: les rectangles $MP \times PN$, $2AP \times PQ$ ſeront entr'eux, comme les rectangles $HD \times DG$, $2BD \times DI$; & partant on aura $MP \times PN.\ HD \times DG :: AP \times PQ.\ BD \times DI$.

2°. Que s'il y a deux droites paralleles entr'elles $MN$, $HG$, terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, & qui rencontrent une aſymptote $CS$ aux points $Q$, $I$; & qu'on mene par un point quelconque $A$ de la Section, une parallele $AO$ à $CS$, qui rencontre ces lignes aux points $P$, $O$: on aura (en concevant dans le cas précédent que $BD$ tombe ſur $AP$) cette proportion, $MP \times PN.\ HO \times OG :: AP \times PQ.\ AO \times OI :: AP.\ AO$. puiſque $PQ = OI$.

3°. Que s'il y a une ligne droite $HG$ terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, & qui rencontre une aſymptote $CS$ en $I$; & qu'on mene par deux points quelconques de la Section $A$, $B$, deux paralleles $AO$, $BD$, à $CS$, qui rencontrent cette ligne aux points $O$, $D$: on aura $HO \times OG.\ HD \times DG :: AO \times OI.\ BD \times DI$. Cela eſt encore une ſuite du premier cas, en concevant que la ligne $MN$ tombe ſur $HG$.

## COROLLAIRE XI.

175. Si l'on conçoit qu'une ligne droite *BD* qui rencontre une Séction Conique en deux points *B*, *D*, se meuve parallelement à elle-même jusqu'à ce qu'elle rase la Séction, c'est à dire, jusqu'à ce qu'elle devienne la tangente *LS*: il est clair que les deux points d'interséction *B*, *D*, se réünissent alors au point touchant *L*; & qu'ainsi on peut considerer un point touchant comme deux points d'interséction qui tombent l'un sur l'autre. Or cela posé, on voit naître des Corollaires 1, 2, 5, 10, plusieurs cas dont voici les principaux. Fig. 91.

1°. S'il y a deux tangentes *KS*, *LS*, qui se rencontrent en un point *S*, & deux autres droites *MN*, *AR*, paralleles à ces tangentes & terminées par la Séction, lesquelles se rencontrent en un point *P*; je dis que $MP \times PN. AP \times PR :: \overline{KS}^2. \overline{LS}^2$. Ceci a été démontré dans le Theorême à l'égard de la Parabole : mais pour les autres Séctions, concevant dans le premier Corollaire que *FG* tombe sur la tangente *KS*, & *BD* sur *LS*; il est clair que les deux points d'interséction *F*, *G*, se réünissent au point touchant *K*, comme aussi les deux *B*, *D*, au point touchant *L*; & qu'ainsi les réctangles $FQ \times QG$, $BQ \times QD$, deviennent les quarrez $\overline{KS}^2. \overline{LS}^2$.

2°. Si dans une Ellipse ou dans des Hyperboles opposées, l'on mene une tangente *TX* parallele à *KS*, & qui rencontre *SL* au point *X*, on prouvera comme dans le nombre précédent, que $MP \times PN. AP \times PR :: \overline{TX}^2. \overline{LX}^2$. D'où il suit que $\overline{KS}^2. \overline{LS}^2 :: \overline{TX}^2. \overline{LX}^2$. Et $KS. SL :: TX. LX$. C'est à dire, que si deux tangentes paralleles *KS*, *TX*, rencontrent une troisiéme tangente *LS* aux points *S*, *X*, on aura $KS. LS :: TX. LX$. ou $KS. TX :: LS. LX$.

3°. Si dans une Ellipse, dans une Hyperbole ou dans des Hyperboles opposées, il y a deux tangentes *KS*, *LS*, qui se rencontrent en un point *S*, & qu'on mene

aux points $R$, $F$: on aura (en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire dixiéme, que les deux Secantes $MN$, $GH$, tombent sur les deux tangentes $KR$, $LF$) 1°. Le quarré $\overline{KR}^2 . \overline{LF}^2 :: AR \times RS . BF \times FV$. 2°. Le quarré $\overline{KR}^2 . \overline{LE}^2 :: AR . AE$.

## PROPOSITION XIV.

### Problême.

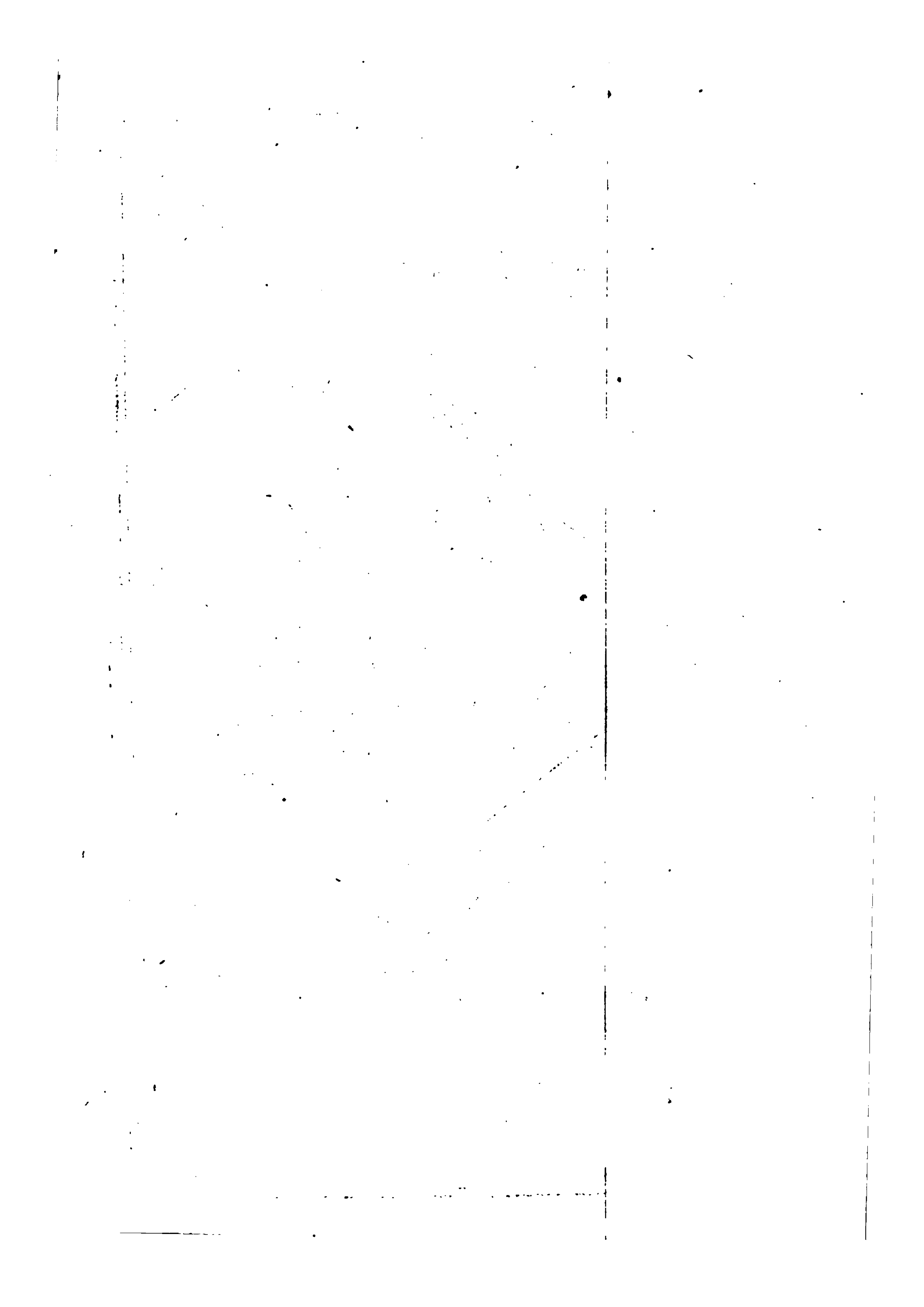
FIG. 99. 100. & 101. 176. DÉCRIRE *une Ellipse ou deux Hyperboles opposées autour d'un parallélogramme donné* FGHK, *& dont l'un de ses diametres* AB *parallele aux deux côtez* FK, GH, *soit à son conjugué* DE, *en la raison donnée de* m *à* n.

Ayant mené les lignes $AB$, $DE$, qui coupent par le milieu les côtés opposés du parallelogramme donné $FGHK$, il est clair * qu'elles seront sur deux diametres conjugués de la Séction qu'on demande, & qu'ainsi leur point d'intersection en sera le centre; puisque selon l'une des conditions du Problême, les paralleles $FG$, $KH$, doivent être terminées par la Séction, aussi-bien que les deux autres paralleles $FK$, $GH$. Or cela posé, si l'on prend $AB$, $DE$, pour ces deux diametres conjugués, & qu'on nomme (les points $L$, $O$, coupent en deux parties égales les lignes $FG$, $KH$,) les données $CL$ ou $CO$, $a$; $LF$ ou $OK$, $b$; & l'inconnuë $CA$ ou $CB$, $t$; on aura. 1°. Lorsque * la Séction est une Ellipse, $BL \times LA$ $(tt - aa)$. $\overline{LF}^2$ $(bb) :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: mm . nn$. Et partant $tt = aa + \frac{mmbb}{nn}$. 2°. Lorsque * la Séction doit être deux Hyperboles opposées, $\overline{CL}^2 \mp \overline{CA}^2$ $(aa \mp tt)$. $\overline{LE}^2$ $(bb) :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: mm . nn$, ce qui donne $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ ou $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$; sçavoir $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ lorsque la ligne $AB$ est un premier diametre, & $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$ lorsque c'est un second. D'où l'on tire la construction sui-

* Art. 146.

* Art. 41. & 55.

* Art. 81. & 118.



vante que je distingue en trois differens cas.

*Premier cas.* Lorsque la Section est une Ellipse; soit fait un triangle réctangle $VST$ dont l'un des côtés $ST = CL$, & l'autre $SV = \frac{m}{n} LF$; & soit décrit du demi diametre $CA = TV$, qui soit à son demi-conjugué $CD$, comme $m$ est à $n$ une Ellipse: Je dis qu'elle satisfera au Problême. Car 1°. Le diametre $AB$ parallele aux côtés $FK$, $GH$, est à son conjugué $DE$, en la raison donnée de $m$ à $n$. 2°. A cause du triangle $TSV$ réctangle en $S$, le quarré $\overline{TV}^2$ ou $\overline{CA}^2$ $(tt) = \overline{TS}^2$ $(aa) + \overline{SV}^2$ $(\frac{mmbb}{nn})$; & partant $BL \times LA$ $(tt - aa)$ $= \frac{mmbb}{nn}$: c'est pourquoi l'on aura $BL \times LA$ $(\frac{mmbb}{nn})$. $\overline{LF}^2$ $(bb)$ :: $mm$. $nn$ :: $\overline{AB}^2$. $\overline{DE}^2$. D'où l'on voit que $LF$ est une ordonnée au diametre $AB$; & qu'ainsi la Section passe par le point $F$. On prouvera de même que la Section passera par les points $G, H, K$; puisque $GL = LF = OK = OH$, & que $CO = CL$.

*Second cas.* Lorsque la Section doit être deux Hyperboles opposées, & que $CL$ est plus grande que $\frac{m}{n} LF$: soit formé un triangle $TSV$ réctangle en $S$, dont l'un des côtés $SV = \frac{m}{n} LF$, & l'hypothenuse $VT = CL$; & soient décrites du premier demi-diametre $CA = TS$, qui soit à son demi-conjugué $CD$, comme $m$ est à $n$, deux Hyperboles opposées.

*Troisiéme cas.* Lorsque la Section doit être deux Hyperboles opposées, & que $CL$ est plus petite que $\frac{m}{n} LF$: on formera un triangle $TSV$ réctangle en $T$ dont l'un des côtés $TS = CL$, & l'hypothenuse $SV = \frac{m}{n} LF$. On décrira ensuite du second demi-diametre $CA = TV$, qui soit à son demi-conjugué $CD$, comme $m$ est à $n$, deux Hyperboles opposées.

La démonstration de ces deux derniers cas est semblable à celle du premier; mais il faut remarquer que

lorſque $CL = \frac{m}{n} LF$, le Problême eſt impoſſible.

## COROLLAIRE I.

177. COMME la poſition des deux diametres conjugués $AB$, $DE$, eſt déterminée, auſſi-bien que leur grandeur ; puiſque ſelon les conditions du Problême ils doivent couper par le milieu les côtés oppoſés du parallelogramme, & qu'on ne trouve pour le demi-diametre $CA$ ou $CB$ qu'une ſeule valeur : il s'enſuit qu'il ne peut y avoir qu'une ſeule Séction qui ſatisfaſſe.

## COROLLAIRE II.

178. DE-LA on voit comment on peut décrire une Séction Conique autour d'un parallelogramme donné $FGHK$, & qui paſſe par un point donné $M$.

Car ayant mené les deux diametres conjugués $AB$, $DE$, qui coupent par le milieu les côtés oppoſés du parallelogramme, & du point donné $M$ l'ordonnée $MP$ au diametre $AB$, laquelle rencontre les côtés oppoſés $FK$, $GH$, aux points $R$, $Q$, & la Séction (que je ſuppoſe décrite) au point $N$ ; il eſt clair que $PN = PM$, & qu'ainſi $RN = QM$, puiſque $PR = PQ$. Le réctangle $RM \times MQ$ ſera donc égal au réctangle $RM \times RN$.

* Art. 164. Or * $FR \times RK . MR \times RN$ ou $RM \times MQ :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2$. Et par conſequent la raiſon du diametre $AB$ parallele aux côtés $FK$, $GH$, à ſon conjugué $DE$, eſt donnée ; puiſque les réctangles $FR \times RK$, $RM \times MQ$, ſont donnés. De plus la Séction ſera une Ellipſe, lorſqu'entre les deux ordonnées $MP$, $KO$, au diametre $AB$, qui tombent du même côté du centre $C$, celle qui eſt la plus proche du centre eſt plus grande que la plus éloignée ; & au contraire deux Hyperboles oppoſées, lorſqu'elle eſt plus petite. D'où l'on voit que cette queſtion ſe reduit au Problême précedent.

Si le point donné $M$ tomboit sur l'un des côtés du parallélogramme, prolongé à discrétion; il est clair que ce Problême seroit alors impossible, puisque ce côté rencontreroit la Séction en trois differens points; ce qui ne peut * être. *Art. 149.

## COROLLAIRE III.

179. DE-LA on tire encore la maniére de décrire une Séction Conique, qui ait pour diametre une ligne $AB$ donnée de position, pour centre le point donné $C$, & pour deux ordonnées à ce diametre les droites $MP$, $KO$.

Car ayant pris sur le diametre $AB$ la partie $CL$ égale à $CO$, & mené $LF$ parallele & égale à $OK$; il est clair qu'elle sera * une ordonnée au diametre $AB$, *Art. 45. 55. & qu'ainsi prolongeant $KO$ en $H$, & $FL$ en $G$, en sorte 85. & 118. te que $OH=OK$, & $LG=LF$, les droites égales & paralleles $KH$, $FG$, seront * deux doubles ordonnées *Art. 144. au diametre $AB$. D'où l'on voit que la Séction doit être décrite autour du parallélogramme $FGHK$, & passer par le point donné $M$; ce qui se fera par le moyen du Corollaire précédent.

Comme cette question se reduit à celle du Corollaire précédent, qui se reduit au Problême; & que selon le Corollaire premier, on ne peut trouver qu'une seule Séction qui y satisfasse; il s'ensuit de même qu'on ne peut décrire qu'une seule Séction qui remplisse les conditions de ce dernier Corollaire.

## PROPOSITION XV.

### Problême.

180. DE'CRIRE *une Séction Conique qui passe par cinq* FIG. 102. *points donnés* F, M, K, G, N; *& démontrer qu'il n'y en* 103. *peut avoir qu'une seule.*

Ayant joint quatre des points donnés par deux lignes droites *FG*, *MN*, qui se rencontrent au point *R*, on menera par le cinquiéme point donné *K* deux droites *KD*, *KH*, paralleles aux droites *FG*, *MN*, & qui les rencontrent aux points *E*, *Q*. On prendra sur ces deux lignes prolongées, s'il est necessaire, les points *D*, *H*, tels que $MR \times RN . GR \times RF :: ME \times EN . KE \times ED$. Et $FR \times RG . MR \times RN :: FQ \times QG . HQ \times QK$. en observant que les points *K*, *D*, ou *K*, *H*, doivent tomber de part & d'autre du point de rencontre *E*, ou *Q*, lorsque les points *M*, *N*, ou *F*, *G*, tombent aussi de part & d'autre de ce même point; & au contraire. On menera ensuite par les points de milieu des paralleles *DK*, *FG*, & *MN*, *KH*, les droites *LI*, *AB*, qui s'entre-
* *Art.* 179. coupent au point *C*. On décrira enfin * la Séction Conique qui a pour diametre la ligne *AB* donnée de position, pour centre le point donné *C*, & pour ordonnées les deux droites *MP*, *KO*. Je dis qu'elle satisfera au Problême, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.

* *Art.* 166. Car les deux points *D*, *H*, seront * à la Séction qui passe par les cinq points donnés *F*, *M*, *K*, *G*, *N*; &
* *Art.* 146. & 147. ainsi les lignes *LI*, *AB*, en seront * deux diametres, qui en détermineront par consequent le centre par leur point d'intersection *C*. Il est donc évident que la Séction Conique qui passe par les cinq points donnés, doit avoir necessairement pour diametre la ligne *AB* donnée de position, pour centre le point *C*, & pour ordonnées au diametre *AB* les droites *MP*, *KO*. Or comme il n'y a qu'une seule Séction Conique qui puisse remplir ces conditions, il s'ensuit que ce sera celle qu'on demande, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.

S'il arrive que les diametres *AB*, *LI*, soient paral-
* *Art.* 147. leles entr'eux; la Séction sera alors * une Parabole qu'on décrira par l'article 170.

# LIVRE CINQUIÉME.

## *De la comparaison des Sections Coniques entr'elles, & de leurs Segmens.*

### LEMME I.

181. S*i la difference de deux quantités diminuë continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales.*

Car si elles ne l'étoient pas, on pourroit assigner entr'elles quelque difference; ce qui est contre l'hypothese.

### LEMME II.

182. S*i la raison de deux quantités est telle que l'antecedent demeurant toûjours le même, sa difference avec son consequent diminuë continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales.*

Car par le Lemme* précédent, l'antecedent sera égal à son consequent; & ainsi les quantités dont ils expriment le rapport, seront égales. *Art. 181.

### LEMME III.

183. S*i l'on suppose sur une ligne courbe quelconque* ABG *un arc* MN *infiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucune grandeur donnée; & qu'on imagine par les extremités de cet arc les ordonnées* MP, NQ, *à l'axe ou diametre* AC, *avec les paralleles* MR, NS, *à ce diametre : je dis que les parallelogrammes* PQRM, PQNS, *peuvent être pris chacun pour l'espace* PQNM *renfermé entre les ordonnées* PM, QN, *la petite droite* PQ, *& le petit arc de la courbe* MN. FIG. 104.

Tous les points d'une ligne courbe ou s'éloignent

continuellement de plus en plus de son diametre, ou bien s'en approchent continuellement de plus en plus ; ou enfin cette ligne courbe est composée de plusieurs portions, dont les unes s'éloignent de plus en plus, & les autres s'approchent de plus en plus de son diametre. Car il est évident qu'il ne peut y avoir aucune portion dans une ligne courbe, dont tous les points soient également éloignés de son diametre ; puisqu'alors cette portion ne seroit plus courbe, mais une ligne droite parallele à ce diametre.

Supposons 1°. Que l'arc *MN* soit sur une courbe *AMB* dont tous les points s'éloignent de plus en plus de son diametre *AC*. Si l'on prend du côté du point *N* l'arc *MO* d'une grandeur finie, & qu'ayant mené l'ordonnée *OF* paralléle à *MP*, on tire les droites *OD*, *ME*, paralleles au diametre *AC* ; il est clair que l'espace curviligne *PFOM* sera plus grand que le parallelogramme inscrit *PFEM*, & moindre que le parallelogramme circonscrit *PFOD*. Or si l'on imagine que le point *O* se meuve suivant la courbe vers le point *M*, il est visible que le parallelogramme *MEOD* qui est la difference des parallelogrammes inscrits & circonscrits à l'arc *OM*, diminuëra continuellement jusqu'à ce qu'enfin il devienne nul ou zero dans l'instant que le point *O* parvient en *M*. D'où il suit que lorsque le point *O* est arrivé en *N*, c'est à dire, infiniment prés de *M*, le parallelogramme *MEOD*, qui devient *MRNS*, sera moindre qu'aucune grandeur donnée. Il est donc évident selon le Lemme * premier, que les parallelogrammes *PQRM*, *PQNS*, deviennent alors égaux entr'eux ; & par conséquent aussi égaux chacun à l'espace curviligne *PQNM*. Donc &c.

* *Art.* 181.

Supposons 2°. Que le petit arc *MN* soit sur une courbe *BMG* dont tous les points approchent de plus en plus de ceux de son diametre *CG*. Il est visible que la démonstration demeure la même que pour le premier cas, en observant simplement que le parallelogramme

circonſcrit *PQNS* devient inſcrit dans ce cas-ci.

Suppoſons 3°. Qu'une ligne courbe telle que *ABG*, ſoit compoſée de pluſieurs portions dont les unes, comme *AB*, s'éloignent de plus en plus du diametre *AG*; & les autres au contraire, comme *BG*, s'en approchent de plus en plus. Je dis que les points, comme *B*, qui ſéparent ces portions, ne peuvent tomber ſur les arcs *MN*: car ſi cela étoit le point *B* ſeroit plus prés du point *M* que n'eſt le point *N*; ce qui eſt contre la ſuppoſition. Il eſt donc évident que ce dernier cas eſt neceſſairement renfermé dans l'un ou dans l'autre des deux premiers.

## COROLLAIRE I.

184. DE-LA il ſuit que ſi l'on mene par tout où l'on voudra une ordonnée *CB* parallele à *PM*, & qu'on imagine que la portion de courbe *AB* ſoit diviſée en une multitude infinie d'arcs infiniment petits, tels que *MN*; l'eſpace *ACB* renfermé par les droites *AC*, *CB*, & par la portion de courbe *AB*, ſera égal à la ſomme de tous les parallelogrammes tels que *PQRM* ou *PQNS*. Il s'enſuit de même que l'eſpace *MPCB* renfermé par les droites *MP*, *PC*, *CB*, & par la portion de courbe *MB*, ſera égal à la ſomme de tout ce qu'il y aura de ces parallelogrammes dans cet eſpace; & de même dans toute l'étenduë de la courbe *ABG*.

## COROLLAIRE II.

185. S'IL y a une figure quelconque *CMDOC* renfermée entre deux paralleles *CE*, *DF*, & qu'on imagine par tout où l'on voudra entre ces paralleles deux droites *MO*, *NL*, infiniment proches l'une de l'autre, & qui leur ſoient auſſi paralleles; je dis que l'eſpace *OMNL* qu'elles couperont dans la figure *CMDOC*, ſera égal au réctangle d'une d'elles, comme de *MO*, par leur diſtance *MR* ou *OS*. Car menant la perpendicu- FIG. 105.

laire $AB$ ſur les paralleles $CE$, $DF$; laquelle rencontre les paralleles $MO$, $NL$, aux points $P$, $Q$; il eſt
* *Art.* 183. clair par le Lemme * que l'eſpace $PMNQ$ eſt égal au réctangle $PMRQ$, & l'eſpace $POLQ$ au réctangle $POSQ$; & par conſequent que l'eſpace $OMNL$ eſt égal au réctangle $OMRS$ ou $OM \times PQ$.

## COROLLAIRE III.

186. Il ſuit du Corollaire précédent, que s'il y a deux figures quelconques $CMDOC$, $EGFHE$ renfermées entre deux paralleles $CE$, $DF$, & qui ſoient telles qu'ayant mené entre ces paralleles par tout où l'on voudra une ligne $MH$ paralleles aux droites $CE$, $DF$; les parties $MO$, $GH$, de cette ligne compriſes dans les figures $CMDOC$, $EGFHE$, ſoient toûjours entr'elles en raiſon donnée: il ſuit, dis-je, que ces deux figures (j'entends les eſpaces qu'elles comprennent) ſont auſſi entr'elles en raiſon donnée. Car imaginant une autre parallele $NK$ infiniment proche de $MH$, & tirant une perpendiculaire $AB$ ſur les paralleles $CE$, $DF$, laquelle rencontre les paralleles $MH$, $NK$, aux
* *Art.* 185. points $P$, $Q$; il eſt clair par le Corollaire * précédent que l'eſpace $OMNL$ eſt égal au rectangle $OM \times PQ$, & de même que l'eſpace $GHKI$ eſt égal au réctangle $GH \times PQ$. Ces deux eſpaces ſeront donc entr'eux comme $MO$ eſt à $GH$; & comme cela arrive toûjours en quelque endroit qu'on mene la droite $MH$, il s'enſuit que la ſomme de tous les petits eſpaces $MNLO$, c'eſt à dire, l'eſpace $CMDOC$ ſera à la ſomme de tous les petits eſpaces $GHKI$, c'eſt à dire, à l'eſpace $EGFHE$, en la raiſon donnée.

On prouvera de même que la partie $MDO$ de la figure $CMDOC$, eſt encore à la partie correſpondante $GFH$ de l'autre figure $EGFHE$, en la raiſon donnée: comme auſſi les parties reſtantes $CMO$, $EGH$.

Il eſt viſible que ſi la raiſon donnée eſt celle d'égalité,

c'eſt à dire, que ſi les parties *MO*, *GH*, de la droite *MH*, ſont toûjours égales entr'elles; les eſpaces *CMDOC*, *EGFHE*, & leur parties correſpondantes *MDO*, *GFH*, & *CMO*, *EGH*, ſeront égales entr'elles.

## LEMME IV.

187. SI *l'on ſuppoſe ſur une ligne courbe quelconque un arc infiniment petit* MN; *& qu'on imagine les tangentes* MT, NT, *qui ſe rencontrent au point* T, *la ſoûtendante* MN, *& la droite* NS *perpendiculaire ſur* MT *prolongée: je dis qu'on peut prendre pour l'arc* MN *ſa ſoûtendante* MN, *ou la ſomme des deux tangentes* MT, NT, *ou enfin la droite* MS. FIG. 106.

Toute ligne courbe eſt néceſſairement ou toûjours concave vers un certain endroit, ou compoſée de pluſieurs portions dont les unes étant concaves vers une certaine part, les autres le ſont vers le côté oppoſé. Or les points qui ſeparent ces portions * ne peuvent point ſe trouver ſur les arcs infiniment petits *MN*: puiſqu'ils ſeroient plus prés du point *M* que n'eſt le point *N*; ce qui eſt contre la ſuppoſition. On peut donc toûjours ſuppoſer que l'arc *MN* fait partie d'une courbe ou portion de courbe qui eſt toûjours concave vers un certain côté.

* *Art.* 183. *n.* 3.

Maintenant ſi l'on prend ſur la courbe du côté du point *N*, l'arc *MO* d'une grandeur finie, & qu'on tire la ſoûtendante *OM*, la tangente *OG*, & la parallele *OD* à *NS*: il eſt clair 1°. A cauſe du triangle *MDO* réctangle en *D*, que la tangente *MD* eſt moindre que la ſoûtendante *MO*, & à plus forte raiſon moindre que l'arc *MNO*; de ſorte que l'arc *MNO* & ſa ſoûtendante *MO* ſont plus grands chacun que *MD*, & chacun moindre que la ſomme des deux tangentes *MG*, *OG*. 2°. A cauſe de la concavité de l'arc *MNO* vers le même côté, ſi l'on mene par un point quelconque *N* de l'arc *MO* une tangente *TR*, les points *T*, *R*, où elle rencontre les tangentes *MG*, *OG*, ſeront ſituez entre les points *M*, *G*, & *O*, *G*; ainſi

l'angle $OGD$, qui est externe au triangle $TGR$, est plus grand que l'angle $RTG$ ou $NTS$.

Ceci supposé, si l'on mene les droites $ME$, $MF$, paralleles aux tangentes $OG$, $NT$, & qui rencontrent la droite $DO$ aux points $E$, $F$; & qu'on imagine que le point $O$ se meuve suivant la courbe vers le point $M$: il est visible que l'angle $OGD$, ou son égal $EMD$, diminuera continuellement jusqu'à ce qu'il s'évanoüisse dans l'instant que le point $O$ parvient en $M$; puisqu'alors la tangente $OG$ se confond avec la tangente $MD$: d'où il suit que la ligne $ME$ diminuë continuellement, jusqu'à ce qu'enfin elle devienne égale à $MD$ dans cet instant. Donc lorsque le point $O$ est arrivé en $N$, c'est à dire, infiniment prés du point $M$, la ligne $ME$, alors en $MF$, ne sera pour lors differente de la tangente $MD$, que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée; & par consequent * les lignes $TN$, $TS$, dont elles expriment le rapport, seront égales entr'elles. Les deux tangentes $MT$, $TN$, prises ensemble, seront donc égales à la droite $MS$, comme aussi à l'arc $MN$, & à la soûtendante $MN$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 182.

COROLLAIRE I.

188. Puisque l'angle $FMD$, ou son égal $NTS$, est infiniment petit dans la supposition que le point $N$ soit infiniment prés du point $M$, il s'ensuit que dans le triangle $MTN$, l'angle interne $NMT$, qui est moindre que l'exterieur $NTS$, sera aussi infiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucun angle donné; & qu'ainsi on ne pourra mener par le point $M$ aucune ligne droite qui tombe dans l'angle $TMN$. D'où l'on voit que ces deux lignes $MT$, $NM$, se confondent entr'elles, & qu'ainsi on peut regarder une tangente comme une ligne droite qui passe par deux points d'une ligne courbe infiniment proches l'un de l'autre.

COROLLAIRE II.

189. Si l'on imagine qu'une ligne courbe quelconque soit divisée en une multitude infinie d'arcs infiniment petits tels que *MN*; il est clair qu'en prenant au lieu de ces arcs leurs soûtendantes, on verra naître un Polygone d'une infinité de côtés, chacun infiniment petit, que l'on pourra prendre pour la ligne courbe: puisqu'elle * n'en differera en aucune maniere. De plus les petits côtés de ce Polygone étant prolongés de part & d'autre, seront les tangentes de cette courbe; puisqu'ils passent chacun par deux de ses points infiniment proches l'un de l'autre. * Art. 187.

REMARQUE.

190. On doit faire ici attention que l'idée ou notion qu'on a donnée des tangentes des Sections Coniques, ne convient qu'aux lignes courbes qui sont toûjours concaves dans toute leur étenduë vers le même côté, comme sont * ces Sections: au lieu que cette derniere notion est generale pour toutes sortes de lignes courbes. Aussi est-ce elle qui sert de fondement à la methode des tangentes que j'ai expliquées, dans mon Livre des *Infiniment petits*, & que j'ose assûrer être la plus simple & la plus generale qu'on puisse souhaiter. On en verra un foible échantillon à la fin de ce Livre. * Art. 26. 61. 124.

DÉFINITIONS.

I.

Deux segmens de lignes courbes quelconques *BAD*, *bad*, sont appellés *Semblables*; lorsqu'ayant inscrit dans l'un d'eux une figure réctiligne quelconque *BMNOD*, on peut toûjours inscrire dans l'autre une figure réctiligne semblable *bmnod*. FIG. 107. 108. 109.

2.

Deux Sections Coniques sont appellées *Semblables*; lorsqu'ayant pris dans l'une d'elles un segment quelcon-

que $BAD$, on peut toûjours assigner dans l'autre un segment semblable $bad$.

3.

On appelle diametres *Semblables* $AP$, $ap$, dans differentes Sections Coniques, ceux qui font avec leurs ordonnées $PM$, $pm$, les mêmes angles $APM$, $apm$.

## COROLLAIRE.

191. Plus chacun des côtés $BM$, $MN$, &c. $bm$, $mn$, &c. devient petit; plus leur nombre augmente, & plus aussi les figures rectilignes semblables $BMNOD$, $bmnod$, approchent des segmens $BAD$, $bad$, ausquels elles sont inscrites; de sorte qu'elles leur deviennent enfin égales * lorsque chacun des côtés est infiniment petit, & que leur nombre par consequent est infini. D'où il suit que les segmens semblables $BAD$, $bad$, sont entr'eux comme les quarrés de leurs soûtendantes $BD$, $bd$, qui sont des côtés homologues; & les portions des courbes $BAD$, $bad$; comme ces soûtendantes.

* Art. 189.

## PROPOSITION I.

### Theorême.

FIG. 107. 192. Soient *deux Paraboles* AM, am, *qui ayent deux diametres semblables* AL, aL, *situés sur la même droite, en sorte que leurs ordonnées* PM, pm, *soient paralleles entr'elles; & soit marqué sur cette droite au dedans des Paraboles un point fixe* L, *tel que* LA *soit à* La, *comme le parametre* AG *du diametre* AL *de la Parabole* AM, *est au parametre* ag *du diametre* aL *de la Parabole* am. *Je dis que si l'on mene du point fixe* L *à un point quelconque* M *de la Parabole* AM, *une ligne droite* LM; *elle rencontrera l'autre Parabole* am *en un point* m *tel que* LM. Lm :: LA. La.

Ayant mené l'ordonnée $MP$, & nommé les données $LA$, $a$; $La$, $b$; $AG$, $p$; & les indéterminées $AP$, $x$;

$PM$, $y$; on aura $LA$ ($a$). $La$, ($b$) :: $AG$ ($p$). $ag = \frac{bp}{a}$. Or si l'on prend sur le diametre $aL$ de la Parabole $am$, la partie $ap = \frac{bx}{a}$, & qu'on mene l'ordonnée $pm$; il est clair * que $\overline{pm}^2 = pa \times ag$ ($\frac{bbpx}{aa}$) $= \frac{bbyy}{aa}$ en mettant pour $px$ * sa valeur $yy$; & qu'ainsi $pm = \frac{by}{a}$. Donc $PM$ ($y$). $pm$ ($\frac{by}{a}$) :: $LP$ ($a - x$). $Lp$ ($b - \frac{bx}{a}$). Et par consequent la ligne $LM$ passera par le point $m$ extremité de l'ordonnée $pm$, c'est à dire, qu'elle coupera la Parabole $am$ en ce point. Donc à cause des triangles semblables $LPM$, $Lpm$, on aura $LM$. $Lm$ :: $PM$ ($y$). $pm$ ($\frac{by}{a}$) :: $LA$ ($a$). $La$ ($b$). *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 6. & 20.
* Ibid.

COROLLAIRE I.

193. Si l'on prend dans la Parabole $AM$ un segment quelconque $BAD$; & qu'ayant mené les droites $LB$, $LD$, qui rencontrent l'autre Parabole $am$ aux points $b$, $d$, on tire la soûtendante $bd$: je dis que le segment $bad$ de la Parabole $am$, est semblable au segment $BAD$ de la Parabole $AM$. Car ayant inscrit dans le segment $BAD$ une figure rectiligne quelconque $BMNOD$, il est clair que si l'on mene les droites $LM$, $LN$, $LO$, qui rencontrent l'autre Parabole aux points $m$, $n$, $o$; les triangles $LBM$, $Lbm$; $LMN$, $Lmn$; $LNO$, $Lno$; $LOD$, $Lod$; $LBD$, $Lbd$, seront semblables; & qu'ainsi les côtés $BM$, $bm$; $MN$, $mn$; $NO$, $no$; $OD$, $od$; $BD$, $bd$; seront paralleles, & toûjours en même raison chacun à son correspondant; puisque toutes les droites $LB$, $LM$, $LN$, $LO$, $LD$, sont coupées en même raison aux points $b$, $m$, $n$, $o$, $d$. D'où l'on voit que les figures rectilignes $BMNOD$, $bmnod$, sont semblables. Or comme il est évident que cette démonstration subsiste toûjours, telle que puisse être la figure rectiligne inscrite dans le segment $BAD$;

*Def. 1. il s'ensuit que les segmens *BAD*, *bad*, * sont semblables; & par consequent* que les Paraboles *AM*, *am*, le sont aussi.
*Def. 2.

CORROLLAIRE II.

194. DE-LA il est évident que si l'on mene par le point *L* une double ordonnée *EF* dans la Parabole *AM*, laquelle rencontre l'autre Parabole *am* aux points *e*, *f*; les segmens *EAF*, *eaf*, des deux Paraboles *AM*, *am*, seront semblables entr'eux.

CORROLLAIRE III.

195. TOUTES les Paraboles sont semblables entr'elles; car si l'on prend sur deux diametres semblables de deux differentes Paraboles, les parties *AL*, *aL*, qui soient entr'elles comme les parametres *AG*, *ag*; & si l'on conçoit que le diametre *La* soit situé sur le diametre *LA*, en sorte que les points *L*, *L*, tombent l'un sur l'autre, & que leurs ordonnées *PM*, *pm*, soient paralleles entr'elles: il est clair qu'ayant mené du point fixe *L* à un point quelconque *M* de la Parabole *AM*, une ligne droite *LM*; elle rencontrera toûjours l'autre Parabole *am* en un point *m* tel que *LM*. *Lm* :: *LA*. *La*.
*Art. 193. Donc * &c.

CORROLLAIRE IV.

196. DE-LA il suit que si l'on prend sur deux diametres semblables de deux differentes Paraboles, les parties *AL*, *aL*, qui soient entr'elles comme les parametres de ces diametres, & qu'on tire par les points *L*, *L*, les doubles ordonnées *EF*, *ef*: les segmens *EAF*, *eaf*, des deux Paraboles *AM*, *am*, seront semblables entr'eux.

CORROLLAIRE V.

197. SI deux segmens *BAD*, *bad*, sont semblables entr'eux, & que l'un d'eux *BAD*, soit le segment d'une

Parabole ; je dis que l'autre *bad* sera le segment d'une autre Parabole ; & qu'ainsi il n'y a entre toutes les courbes imaginables que des Paraboles qui puissent être semblables à une Parabole donnée. Car si l'on place le petit segment *bad* au dedans du grand *BAD*, en sorte que les soûtendantes *bd*, *BD*, soient paralleles ; & qu'on inscrive dans l'un & l'autre deux figures réctilignes quelconques semblables *BMNOD*, *bmnod* : il est clair que les côtés homologues *BM*, *bm* ; *MN*, *mn* ; &c. de ces deux figures seront paralleles : puisque les angles *DBM*, *dbm* ; *BMN*, *bmn* ; &c. sont égaux entr'eux. Or menant *LM*, *LN*, *LO*, par le point de concours *L* des deux droites *Bb*, *Dd*, qui joignent les extremités des soûtendantes paralleles *BD*, *bd*, qui sont les deux côtés homologues donnés ; ces droites *LM*, *LN*, *LO*, passeront par les points correspondans *m*, *n*, *o*, où elles seront divisées en même raison que *LB* l'est en *b*, ou *LD* en *d* ; puisque *BD*. *bd* : : *LB*. *Lb* : : *BM*. *bm* : : *LM*. *Lm* : : *MN*. *Mn* : : *LN*. *Ln* : : *NO*. *no* : : *LO*. *Lo* : : *OD*. *od*.

Maintenant si l'on mene par le point *L* le diametre *LA* de la Parabole *AM* ; qu'on le divise en *a*, en la même raison que *LB* l'est en *b*, ou *LD* en *d* ; & qu'on décrive * du diametre *aL*, & du parametre *ag* qui soit au parametre *AG* du diametre *AL* de la Parabole *AM*, comme *La* est à *LA*, une Parabole *am* dont les ordonnées *pm* soient paralleles aux ordonnées *PM* de l'autre Parabole : il est évident * qu'elle passera par tous les points *b*, *m*, *n*, *o*, *d*, qui divisent dans la raison donnée de *BD* à *bd* toutes les droites *LB*, *LM*, *LN*, *LO*, *LD*. Or comme ce raisonnement subsiste toûjours tel que puisse être le nombre des côtés des figures réctilignes semblables *BMNOD*, *bmnod*, & de telle grandeur qu'ils puissent être ; il s'ensuit que la Parabole *am* passe par tout par où le segment *bad* passe, & qu'ainsi ce segment en est une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 162.
* *Art.* 192.

## PROPOSITION II.

### Theorême.

FIG. 108. 109. 198. SOIT *une Ellipse ou Hyperbole* AM *qui ait pour un de ses premiers diametres la ligne* AH, *& pour parametre de ce diametre la ligne* AG; *& ayant pris sur ce diametre (prolongé dans l'Hyperbole) un point fixe* L, *& divisé en même raison aux points* a, h, *ses parties* LA, LH. *Soit une autre Ellipse ou Hyperbole* am *qui ait pour premier diametre la ligne* ah, *pour parametre de ce diametre la ligne* ag *qui soit à* AG *comme* ah *est à* AH, *& dont les ordonnées* pm *soient paralleles aux ordonnées* PM *de l'autre Section* AM. *Je dis que si l'on mene du point fixe* L *à un point quelconque* M *de la Section* AM, *une ligne droite quelconque* LM; *elle rencontrera l'autre Section* am, *en un point* m *tel que* LM. Lm :: LA. La; *c'est à dire que toutes les droites tirées du point fixe* L *aux points de la Section* AM, *sont divisées en même raison par la Section* am.

*Il faut prouver que* LM. Lm :: LA. La.

Ayant mené l'ordonnée $MP$, & nommé les données $LA$, $a$; $La$, $b$; $AH$, $2t$; & les indéterminées $AP$, $x$; $PM$, $y$; on aura $LA\ (a).\ La\ (b) :: LH.\ Lh :: LH \pm LA$ ou $AH\ (2t).\ Lh \pm La$ ou $ah = \frac{2bt}{a}$. Or si l'on prend sur le diametre $ah$ de la Section $am$ la partie $ap = \frac{bx}{a}$, & qu'on mene l'ordonnée $pm$; il est clair * que $AP \times PH\ (2tx \mp xx).\ \overline{PM}^2\ (yy) :: AH.\ AG :: ah.\ ag :: ap \times ph\ \left(\frac{2bbtx \mp bbxx}{aa}\right).\ \overline{pm}^2 = \frac{bbyy}{aa}$, & qu'ainsi $pm = \frac{by}{a}$. Donc $PM\ (y).\ pm\ (\frac{by}{a}) :: LP\ (a-x).\ Lp\ (b-\frac{bx}{a})$. Et par consequent la ligne $LM$ passera par le point $m$ extremité de l'ordonnée $pm$, c'est à dire qu'elle coupera la Section $am$ en ce point. Donc à cause des triangles semblables $LPM$, $Lpm$, on aura

* Art. 42. 55. 81. & 118.

*LM.Lm* :: *PM*($y$). *pm*($\frac{by}{a}$) :: *LA* ($a$). *La* ($b$). *Ce qu'il falloit démontrer.*

### COROLLAIRE I.

199. SI l'on prend dans la Section *AM* un segment quelconque *BAD*, & qu'ayant mené les droites *LB*, *LD*, qui rencontrent l'autre Section *am* aux points *b*, *d*, on tire la soûtendante *bd*; je dis que le segment *bad* de la Section *am* est semblable au segment *BAD* de la Section *AM*; & partant que si l'on mene par le point *L* une double ordonnée *EF* dans la Section *AM*, laquelle rencontre l'autre Section aux points *e*, *f*; les segmens *EAF*, *eaf*, des deux Ellipses ou des deux Hyperboles *AM*, *am*, seront semblables entr'eux. Cela se prouve de même que pour la Parabole dans les articles 193. & 194.

### COROLLAIRE II.

200. TOUTES les Ellipses ou Hyperboles *AM*, *am*, qui ont deux diametres semblables *AH*, *ab*, en même raison avec leurs parametres *AG*, *ag*, sont semblables entr'elles. Car si l'on prend les parties *AL*, *aL*, qui soient entr'elles comme les diametres *AH*, *ab*; & que l'on conçoive que le diametre *ab* soit situé sur le diametre *AH*, en sorte que les points *L*, *L*, tombent l'un sur l'autre, & que les ordonnées *pm*, *PM*, soient paralleles entr'elles: il est clair qu'ayant mené du point fixe *L* à un point quelconque *M* de la Section *AM* une ligne droite *LM*, elle rencontrera toûjours l'autre Section *am*, en un point *m* tel que *LM*. *Lm* :: *LA*. *La*. Donc * &c.

* Art. 199.

### COROLLAIRE III.

201. DE-LA il est évident que s'il y a deux Ellipses ou deux Hyperboles *AM*, *am*, dont deux diametres semblables *AH*, *ab*, soient en même raison avec leurs parametres *AG*, *ag*; & qu'ayant pris les parties *AL*, *aL*,

qui soient entr'elles comme les diametres *AH*, *ab*, on tire par les points *L*, *L*, les doubles ordonnées *EF*, *ef*: il est évident, dis-je, que les segmens *EAF*, *eaf*, des deux Sections *AM*, *am*, sont semblables entr'eux.

## COROLLAIRE IV.

202. Si deux segmens *BAD*, *bad*, sont semblables entr'eux; & que l'un d'eux soit le segment d'une Ellipse ou d'une Hyperbole *AM*, qui ait pour un de ses diametres quelconques la ligne *AH* dont le parametre est *AG*; Je dis que l'autre *bad* sera le segment d'une autre Ellipse ou d'une autre Hyperbole *am*, qui aura pour l'un de ses diametres semblables à *AH*, la ligne *ab* qui sera en même raison avec son parametre *ag*, que *AH* avec le sien *AG*. Car ayant placé le segment *bad*, au dedans du segment *BAD*, en sorte que la soûtendante *bd* soit parallele à la soûtendante *BD*, & que les lignes *Bb*, *Dd*, concourent en un point *L* du diametre *AH* (ce qui est toujours possible), & inscrit dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques semblables; on prouvera comme dans la Parabole article 197. que les droites *LM*, *LN*, *LO*, passeront par les points correspondans *m*, *n*, *o*, où elles seront divisées en même raison que *LB* l'est en *b*, ou *LD* en *d*.

Maintenant si l'on divise les parties *LA*, *LH*, du diametre *AH* aux points *a*, *h*, en même raison que *LB* l'est en *b*; & qu'on décrive * du diametre *ab* & du parametre *ag* qui soit au parametre *AG* du diametre *AH*, comme *La* est à *LA*, ou *ab* à *AH*, une Ellipse ou une Hyperbole *am*, dont les ordonnées *pm* soient paralleles aux ordonnées *PM* de l'autre Ellipse ou Hyperbole *AM*: il est éviden* t qu'elle passera par tous les points *b*, *m*, *n*, *o*, *d*, qui divisent dans la raison donnée de *bd* à *BD* toutes les droites *LB*, *LM*, *LN*, *LO*, *LD*. Or comme ce raisonnement subsiste toujours tel que puisse être le nombre des côtés des figures rectilignes semblables

* Art. 161.

* Art. 198.

K
B
D
R
F
O
E
G
D
F

ſemblables *BMNOD*, *bmnod*, & de telle grandeur qu'ils puiſſent être; il s'enſuit que l'Ellipſe ou l'Hyperbole *am* paſſe par tous les mêmes points par leſquels paſſe le ſegment *bd*, & qu'ainſi ce ſegment en eſt une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## COROLLAIRE V.

203. Il eſt donc évident que ſi deux Ellipſes ou deux Hyperboles *AM*, *am*, ſont ſemblables, & qu'on prenne dans la Séction *AM* un de ſes diametres quelconques *AH*; il y aura toûjours dans l'autre Séction *am* un diametre *ah* ſemblable à *AH*, qui aura avec ſon parametre *ag* la même raiſon que *AH* avec le ſien *AG*: & qu'ainſi les diametres ſemblables *AH*, *ah*, ſeront en même raiſon avec leurs diametres conjugués. Or comme dans une Ellipſe ou Hyperbole il ne peut y avoir * que deux differens diametres conjugués qui faſſent entr'eux les mêmes angles, & que ces diametres ne different que par leur poſition, leur grandeur demeurant la même; il s'enſuit que dans les Ellipſes ou les Hyperboles ſemblables tous les diametres conjugués qui feront les mêmes angles, ſeront entr'eux en même raiſon; en obſervant de prendre pour les antécédens de ces deux raiſons les plus grands de ces deux diametres conjugués, & pour conſéquens les moindres.

* *Art.* 66. & 128.

## PROPOSITION III.

### Theorême.

204. Si *l'on mene dans une Séction Conique deux paralleles quelconques* BD, EF, *terminées par la Séction; & qu'on joigne leurs extremités par deux droites* BE, DF: *je dis que les ſegmens* BMEB, DMFD, *compris par des portions de la Séction, & par les droites qui joignent les extremités des paralleles, ſeront égaux entr'eux.* FIG. 100. 111.

Car ayant prolongé les soûtendantes *BE*, *DF*, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en un point *G*, & ayant mené par ce point & par le point de milieu *H* de la ligne *BD*, la droite *GH*; il est clair qu'elle divisera par le milieu en *K* la parallele *EF* à *BD*, comme aussi par le milieu en *P* un autre parallele quelconque *OO* à la même ligne *BD*. Donc la ligne *HK* sera un diametre

* Art. 146. * qui aura pour ordonnées de part & d'autres les paralleles *BD*, *EF*; & partant si l'on mene par un de ses points quelconques *P* une parallele à ces lignes, elle

* Art. 144. rencontrera * la Séction en deux points *M*, *M*, également éloignés du point *P*; d'où l'on voit que les parties *MO*, *OM*, de la même parallele *MM* à *BD*, comprises dans les segmens *BMEB*, *DMFD*, sont toûjours égales entr'elles, en quelque endroit que puisse tomber cette parallele entre les lignes *BD*, *EF*. Il est donc

* Art. 186. évident * que ces deux segmens seront égaux entr'eux.

Si les soûtendantes *BE*, *DF*, étoient paralleles entr'elles, il faudroit mener par le point de milieu *H* de la ligne *BD* une droite *HK* parallele à ces soûtendantes, & la démonstration demeureroit toûjours la même.

### COROLLAIRE I.

FIG. 110. 205. PUISQUE *PM* est toûjours égale à *PM*; il s'ensuit 1°. Que les Trapeses Coniques *KHBE*, *KHDF*, sont égaux entr'eux. 2°. (Lorsque la ligne *BD* au lieu de rencontrer la Séction en deux points la touche en un point *A*) que les Trilignes Coniques *AKE*, *AKF*, sont égaux; & qu'ainsi les segmens *AEMA*, *AFMA*, le sont aussi; puisque le triangle *AEF* est divisé en deux parties égales par le diametre *AK* qui passe par le milieu de *EF*.

### COROLLAIRE II.

FIG. 110. 206. SI la Séction étant une Parabole, une Ellipse, ou une Hyperbole, l'on mene par les extremités des paralleles

*BD*, *EF*, les droites *BF*, *DE*, qui s'entrecoupent entre ces paralleles ; les ſegmens *BFDAB*, *DEBAD*, ſeront égaux entr'eux. Car les triangles *BFD*, *BED*, qui ſont entre les mêmes paralleles *BD*, *EF*, & qui ont la même baſe *BD*, ſont égaux entr'eux ; & partant ſi l'on ajoûte d'une part le ſegment *DMFD* plus le ſegment *BADB*, & de l'autre *BMEB* égal au ſegment *DMFD*, plus auſſi le même ſegment *BADB* ; les touts *BFDAB*, *DEBAD*, ſeront égaux entr'eux.

## COROLLAIRE III.

207. DE-LA on voit comment on peut couper par un point donné *D* ſur une Section Conique, deux ſegmens *DGED*, *DFBD*, égaux chacun à un ſegment donné *BEDB*. Car ayant tiré les droites *BD*, *DE*, & mené *BG* parallele à *DE*, & *EF* parallele à *BD*, leſquelles rencontrent la Section aux points *G*, *F* ; il eſt clair *en joignant la droite *DF*, que le ſegment *DFBD* eſt égal au ſegment *BEDB*, à cauſe des paralleles *DB*, *EF* ; & de même en joignant *DG*, que le ſegment *DGED* eſt égal au ſegment *BEDB*, à cauſe des paralleles *BG*, *DE*. FIG. 112. * *Art.* 206.

Si le point donné tomboit ſur l'une des extremités du ſegment donné que je ſuppoſe être à preſent *DGED*, il faudroit mener par l'autre extremité *G*, une parallele *GF* à la tangente qui paſſe par le point *D* ; & tirant par le point *F* où cette parallele rencontre la Section, & par le point donné *D*, la ſoûtendante *DF*, il eſt clair que le ſegment *DFBD* ſera égal au ſegment donné *DGED*.

Il eſt viſible qu'il ne peut y avoir dans ce dernier cas que le ſeul ſegment *DFBD* qui ſoit égal au ſegment donné *DGED* ; puiſque tout autre ſegment qui aura pour l'une de ſes extremités le point donné *D*, ſera plus grand ou moindre que le ſegment *DFBD*, ſelon que ſon autre extremité ſera plus proche ou plus éloignée du point *D* que n'eſt le point *F*. D'où il ſuit que ſi deux ſegmens *DGED*, *DFBD*, qui ont une extremité commune *D*, ſont égaux

entr'eux; & que si l'on mene par le point *D* une parallele à la droite *GF* qui joint leurs autres extremités, elle sera tangente en *D*.

## COROLLAIRE IV.

208. ON tire du Corollaire précédent une maniere toute nouvelle & fort aisée de mener une Tangente par un point donné *D* sur une Séction Conique donnée.

Car ayant tiré par ce point deux droites quelconques *DB*, *BE*, qui rencontrent la Séction aux points *B*, *E*, on menera par le point *B* une parallele *BG* à *DE*, & par le point *E* une parallele *EF* à *BD*, lesquelles rencontrent la Séction aux points *G*, *F*, que l'on joindra par une ligne droite *GF*, à laquelle on tirera par le point *D* une parallele qui sera la tangente cherchée; puisque les segmens *DGED*, *DFBD*, étant égaux chacun au même segment *BEDB*, le seront entr'eux.

## PROPOSITION IV.

### Theorême.

FIG. 113. 114. 115. 209. S'IL *y a dans une Ellipse, dans une Hyperbole; ou dans les Hyperboles opposées deux lignes droites* BD, EF, *paralleles entr'elles & terminées par la Séction; & qu'on tire du centre* C *les demi-diametres* CB, CE, CD, CF; *les Séčteurs Elliptiques ou Hyperboliques* CBE, CDF, *seront égaux entr'eux.*

Car menant par les points de milieu *H*, *K*, des droites *BD*, *EF*, le diametre *CK*, les triangles *CHB*, *CHD*, & *CKE*, *CKF*, seront égaux entr'eux; puisqu'ils ont le même sommet *C*, & que leurs bases *HB*, *HD*, & *KE*, *KF*, sont égales. Par consequent (*fig.* 114.) $KHBE + CBE = CKE - CHB = CKF - CHD = KHDF + CDF$; & (*fig.* 113. 115.) $KHBE - CBE = \pm CHB \mp CKE = \pm CHD \mp CKF = KHDF - CDF$. Donc puisque les Trapeses Coniques *KHBE*,

*KHDF*, sont * égaux, il s'ensuit que les Secteurs Elliptiques ou Hyperboliques *CBE*, *CDF*, le seront aussi. * *Art.* 205.

## COROLLAIRE I.

210. SI la Section est une Ellipse, ou une Hyperbole; & que la ligne *BD* parallele à *EF*, devienne tangente en *A*; il est clair que les Secteurs *CAE*, *CAF*, seront égaux entr'eux. Car prolongeant le demi-diametre *CA* jusqu'à ce qu'il rencontre la ligne *EF* au point *K*, cette ligne sera coupée en deux également en ce point; & par consequent les triangles *CKE*, *CKF*, seront égaux. Or les trilignes Coniques *AKE*, *AKF*, le sont * aussi. Donc &c. FIG. 113. 114. * *Art.* 205.

## COROLLAIRE II.

211. DE-LA on voit que pour diviser en deux parties égales un Secteur Elliptique ou Hyperbolique quelconque *CEF*; il n'y a qu'à mener le demi-diametre *CA* qui divise par le milieu en *K* la soûtendante *EF* de ce Secteur. Ce qui donne encore les Secteurs *CBE*, *CDF*, égaux entr'eux, en supposant *BD* parallele à *EF*. Car ayant de cette maniere les Secteurs *CAE*, *CAF*, & *CAB*, *CAD*, égaux entr'eux, les Secteurs *CBE*, *CDF*, qui en sont les differences, doivent aussi être égaux entr'eux.

## PROPOSITION V.

### Theorême.

212. SOIT *un demi-cercle* ADH, *qui ait pour diametre le premier ou grand axe* AH *d'une demi-Ellipse* ABH; *soit menée par un point quelconque* P *de l'axe* AH, *une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipse au point* M; *&* *le cercle au point* N; *par où & par le centre* C *soient tirées les droites* CM, CN. *Je dis que le Secteur Elliptique* FIG. 116.

CAM *est au Sécteur circulaire* CAN, *comme la moitié* CB *du petit axe de l'Ellipse, est à la moitié* CA *ou* CD *du grand.*

*Art. 42. & 55. Car par la proprieté * de l'Ellipse $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: AP \times PH . AC \times CH$ ou $\overline{CA}^2$, & par la proprieté du cercle, $\overline{PN}^2 . \overline{CD}^2 :: AP \times PH . AC \times CH$ ou $\overline{CA}^2$. Donc $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: \overline{PN}^2 . \overline{CD}^2$. ou $\overline{PM}^2 . \overline{PN}^2 :: \overline{CB}^2 . \overline{CD}^2$. Et en tirant les racines quarrées, $PM . PN :: CB . CD$ ou $CA$. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit que tombe la perpendiculaire $PMN$, il

*Art. 186. s'ensuit * que l'espace Elliptique entier $ABHA$ est au demi-cercle $ADHA$, & la portion $APM$ de cet espace à la portion $APN$ du demi-cercle, comme $CB$ est à $CD$ ou à $CA$. Mais le triangle réctangle $CPM$ est au triangle réctangle $CPN$ qui a la même hauteur, comme la base $PM$ est à la base $PN$, c'est à dire, comme $CB$ est à $CD$ ou à $CA$; & par consequent l'espace Elliptique $APM$ plus ou moins le triangle $CPM$ ( plus lorsque $AP$ est moindre que $AC$, & moins lorsqu'elle est plus grande ) c'est à dire, le Sécteur Elliptique $CAM$ sera à l'espace circulaire $APN$ plus ou moins le triangle $CPN$, c'est à dire, au Sécteur circulaire $CAN$, comme $CB$ est à $CD$ ou à $CA$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

### COROLLAIRE I.

213. COMME le Sécteur de cercle $CAN$ est égal au réctangle de l'arc $AN$ par la moitié du rayon $CA$ ou $CD$; il s'ensuit que le Sécteur Elliptique $CAM$ est aussi égal au réctangle de ce même arc $AN$ par la moitié de $CB$.

### COROLLAIRE II.

214. SI l'on mene par un point quelconque $G$ du grand axe $AH$ autre que le point $P$, une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipse au point $E$, & le

cercle au point *F*; je dis que les Sécteurs Elliptiques *ACE*, *ACM*, sont entr'eux, comme les Sécteurs circulaires *ACF*, *ACN*. Car *ACM*. *ACN* :: *CB*. *CD*. Et de même *ACE*. *ACF* :: *CB*. *CD*. Et partant *ACM*. *ACN* :: *ACE*. *ACF*. Et *ACM*. *ACE* :: *ACN*. *ACF*. D'où l'on voit que pour trouver un Sécteur Elliptique *ACM*, qui soit au Sécteur Elliptique *ACE* en raison donnée; il n'est question que de trouver un Sécteur circulaire *ACN* qui soit en raison donnée au Sécteur *ACF*, ou ce qui est la même chose, de diviser en raison donnée l'arc *ANF* ou l'angle *ACF*.

## PROPOSITION VI.

### Theorême.

215. *S'il y a deux demi-Hyperboles* AM, AN, *ou* BM, DN, *qui ayent pour centres le même point* C, *pour un de leurs demi-diametres la même droite* CA, *& pour les deux demi-diametres conjugués au demi-diametres* CA, *deux droites quelconques* CB, CD, *situées sur la même ligne; & qu'on mene par un point quelconque* P *du demi-diametre* CA (*prolongé s'il est necessaire*) *une droite parallele à* CD, *laquelle rencontre les Hyperboles aux points* M, N; *par lesquels & par le centre* C, *soient tirées les droites* CM, CN: *je dis que les Sécteurs Hyperboliques* CAM, CAN, *ou* CBM, CDN, *seront entr'eux, comme les demi-diametres conjugués* CB. CD. FIG. 117. 118.

On aura par la proprieté * des deux Hyperboles *AM*, *AN*, ou *BM*, *DN*, ces deux proportions $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 . \overline{CA}^2 :: \overline{PN}^2 . \overline{CD}^2$. Et par conséquent $\overline{PM}^2 . \overline{PN}^2 :: \overline{CB}^2 . \overline{CD}^2$. Et en prenant les racines quarrées, *PM*. *PN* :: *CB*. *CD*. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit que tombe la parallele *PMN*, il s'ensuit* que les espaces Hyperboliques *APM*, *APN*, ou *CPMB*, *CPND*, sont entr'eux comme *CB* est à *CD*. Mais les triangles *CPM*, *CPN*, sont en-

*Art. 81. & 118.

*Art. 186.

tr'eux, comme leurs bases *PM*, *PN*, ( puisqu'ils sont situés entre les mêmes paralleles *CD*, *PN*), ou comme les demi-diametres conjugués *CB*, *CD*. Et par conséquent (*fig.* 117.) *CB. CD* :: *CPM* — *APM. CPN* — *APN* :: *CAM. CAN*. Ou bien (*fig.* 118.) *CB. CD* :: *CPMB* — *CPM. CPND* — *CPN* :: *CBM. CDN*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## COROLLAIRE.

216. Si les deux demi-diametres conjugués *CA*, *CD*, sont égaux entr'eux, l'Hyperbole *AN* ou *DN* sera équilatere. Et si l'on avoit trouvé le moyen de quarrer les Sécteurs Hyperboliques *CAN*, ou *CDN*, on auroit aussi la quadrature des Secteurs *CAM*, ou *CBM*, qui ont pour bases des portions *AM*, ou *BM* d'une autre Hyperbole, dont le demi-diametre conjugué *CB* peut être pris de telle grandeur qu'on veut; puisque le rapport des Sécteurs Hyperboliques *CAM*, *CAN*, ou *CDN*, *CBM*, étant exprimé par les droites *CD*, *CB*, est donné. D'où l'on voit que si l'on avoit la quadrature de l'Hyperbole équilatere, on auroit aussi celle de toutes les autres Hyperboles: de même qu'ayant * la quadrature du Cercle, on auroit celle de toutes les Ellipses.

* Art. 212.

## PROPOSITION VII.

### Theorême.

FIG. 119.

217. Si *l'on prend sur une asymptote* CN *d'une Hyperbole* EBDF, *deux parties* CK, CL, *qui soient entr'elles en même raison que deux autres parties quelconques* CG, CH, *de la même asymptote; & qu'ayant mené les paralleles* GF, HD, KB, LE, *à l'autre asymptote* CP, *lesquelles rencontrent l'Hyperbole aux points* F, D, B, E, *on tire les demi-diametres* CF, CD, CB, CE: *je dis que les deux*

*Sécteurs*

*Sécteurs Hyperboliques* CBE, CDF, *seront égaux entr'eux.*

Ayant mené les deux droites *BD*, *EF*, qui rencontrent les asymptotes aux points *M*, *O*, *N*, *P*; les paralleles *KB*, *HD*, donneront cette proportion, *MB*. *MK* :: *DO*. *CH*. Les paralleles *LE*, *GF*, donneront aussi cette autre proportion, *NE*. *NL* :: *FP*. *CG*. Et partant puisque * *MB*=*DO*, & *NE*=*FP*, il s'ensuit que *MK*=*CH*, & *NL*=*CG*. Or par la supposition *CG* ou *LN*. *CH* ou *KM* :: *CK*. *CL* :: * *LE*. *KB*. Et partant *LN*. *LE* :: *KM*. *KB*. Donc les lignes *NE*, *MB*, c'est à dire, les deux droites *EF*, *BD*, dont elles sont parties, seront paralleles entr'elles. Donc * les Sécteurs Hyperboliques *CBE*, *CDF*, sont égaux entr'eux. *Ce qu'il fal. &c.*

* *Art.* 95.
* *Art.* 100.
* *Art.* 209.

## COROLLAIRE I.

218. Si les parties *CK*, *CL*, de l'asymptote *CN*, sont en même raison que deux parties quelconques *CS*, *CT* de l'autre asymptote *CP*; & qu'on mene les paralleles *KB*, *LE*, à l'asymptote *CP*, & les paralleles *SD*, *TF*, à l'autre asymptote *CN*; il est clair que les Secteurs Hyperboliques *CDF*, *CBE*, seront aussi égaux entr'eux. Car ayant mené les paralleles *FG*, *DH*, à l'asymptote *CP*, on aura * *CG*. *CH* :: *HD* ou *CS*. *GF* ou *CT* * :: *CK*. *CL*. Donc &c.

* *Art.* 100.
* *Hyp.*

## COROLLAIRE II.

219. Si l'on prend sur la même asymptote la partie *CK* troisiéme proportionnelle à deux parties quelconques *CG*, *CH*; on prouvera par un raisonnement semblable à celui du Theorême que la ligne *BF* est parallele à la tangente qui passe par le point *D*; & qu'ainsi * les Sécteurs Hyperboliques *CFD*, *CDB*, sont égaux entr'eux. D'où il suit que si l'on prend sur une asymptote autant de parties qu'on voudra *CG*, *CH*, *CK*, *CL*, &c. en progression geometrique continuë, d'où partent les paralleles *GF*, *HD*, *KB*, *LE*, &c. à l'au-

* *Art.* 210.

tre asymptote, les Sécteurs Hyperboliques *CFD*, *CDB*, *CBE*, &c. seront tous égaux entr'eux.

## COROLLAIRE III.

220. DE-LA on voit que si *CH* est la premiere de deux moyennes geometriquement proportionnelles entre les extrêmes *CG*, *CL*; & qu'on tire les droites *GF*, *HD*, *LE*, paralleles à l'autre asymptote; le Sécteur *CDF*, sera au Sécteur *CFE*, comme 1 est à 3. De même, si *CH* est la premiere de trois moyennes proportionnelles entre *CG*, *CL*; le Sécteur *CDF* sera au Sécteur *CFE*, comme 1 est à 4. Et en général, si la lettre *m* marque un nombre entier quelconque, & que *CH* soit la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre les extrêmes *CG*, *CL*, que le nombre $m-1$ contient d'unités; le Sécteur *CDF*, sera au Sécteur *CFE*, comme 1 est au nombre *m*.

## REMARQUE.

221. ON peut ici donner une idée fort éxacte de ce qu'on appelle *Logarithmes* dans l'Arithmetique, & de l'extrême facilité qu'ils apportent au calcul, lorsqu'il s'agit d'operer sur de forts grands nombres. Voici comment:

Si l'on suppose que *CG*, exprime l'unité, & que *CL* étant decuple de *CG*, c'est à dire, 10, le Sécteur Hyperbolique *CFE*, soit divisé en 10000000000 parties égales. Et si l'on compose une table divisée en deux colomnes, dont la premiere renferme de suite tous les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & l'autre des nombres artificiels, placés vis-à-vis, & qui soient tels que *CH*, exprimant un nombre quelconque naturel, le nombre artificiel placé vis-à-vis, exprime le nombre des parties que le Sécteur Hyperbolique *CDF* contient par rapport au nombre des parties que contient le Sécteur

*CFE*: les nombres artificiels seront appellés les *Logarithmes* des nombres naturels ausquels ils répondent. Cela posé,

1°. Si l'on propose de multiplier deux nombres naturels quelconques *CH*, *CK*, l'un par l'autre, il n'y aura qu'à prendre dans la table leurs Logarithmes qui expriment les Secteurs *CFD*, *CFB*, & ajoûtant ensemble ces deux Logarithmes, on aura le Logarithme qui exprime le Secteur *CFE*, vis-à-vis duquel sera placé le nombre naturel *CL* produit de la multiplication des deux nombres *CH*, *CK*.

2°. Si l'on propose de diviser le nombre *CL* par le nombre *CK*, il n'y aura qu'à retrancher le Logarithme *CFB* du Diviseur *CK*, du Logarithme *CFE* du nombre à diviser *CL*, pour avoir le Logarithme *CBE* ou *CFD* du quotient *CH*.

3°. Si l'on propose d'extraire une racine quelconque du nombre *CL*, par exemple la cubique, il n'y aura qu'à diviser son Logarithme *CFE* en trois parties égales, pour avoir le Logarithme *CFD* vis-à-vis duquel est placé le nombre *CH*, qui est la racine cubique cherchée.

Tout cela est une suite de ce que les Sécteurs Hyperboliques *CFD*, *CBE*, sont égaux entr'eux, lorsque *CG*. *CH* :: *CK*. *CL*. Et que les Sécteurs *CFD*, *CDB*, *CBE*, &c. sont aussi égaux entr'eux, lorsque *CG*. *CH* :: *CH*. *CK* :: *CK*. *CL* :: &c. Il est donc évident que par le moyen de cette table, on pourra abreger extrêmement les operations de l'Arithmetique, lorsqu'il s'agit d'operer sur de grands nombres, comme dans les calculs Astronomiques.

Comme l'on n'a pû jusqu'à present trouver en nombres exacts, le rapport des Sécteurs Hyperboliques *CFD*, *CFB*, &c. au Sécteur *CFE*, on s'est contenté d'exprimer ce raport en nombres fort approchans; & par le moyen de ces nombres qu'on appelle *Artificiels*, & des nombres naturels qu'on a pla-

cés vis-à-vis, on a composé la Table des Logarithmes qui a les proprietés qu'on vient d'expliquer. Or dans la supposition que le Séćteur *CFE* Logarithme de *CL* (10) contient 10000000000 parties égales, on trouvera que le parallelogramme *CGFT* contient plus de 4342944818 de ces parties, & moins de 4342944819. D'où l'on voit qu'un Secteur Hyperbolique quelconque *CBF*, est au parallelogramme *CGFT* à peu prés comme le Logarithme du nombre *CL* trouvé dans la Table, est au nombre 4342944819, & cela en prenant les Logarithmes de dix caractéres outre la caractéristique.

## PROPOSITION VIII.

### Theorême.

FIG. 120. 222. S'IL *y a sur chaque asymptote deux parties* CG, CL, *&* CR, CS, *qui soient telles que* $\sqrt[m]{CG}$. $\sqrt[m]{CL}$ :: $\sqrt[n]{CR}$. $\sqrt[n]{CS}$; *& qu'on tire les droites* GF, LE, RT, SV, *paralleles aux asymptotes: je dis que le Séćteur* CFE, *sera au Secteur* CTV, *comme* m *est à* n. *Les lettres* m *&* n *marquent des nombres entiers quelconques.*

Car si l'on fait $\sqrt[m]{CG}$. $\sqrt[m]{CL}$ :: *CG. CH*. Et $\sqrt[n]{CR}$. $\sqrt[n]{CS}$ :: *CR. CQ*. Et qu'on tire les droites *HD*, *QN*, paralleles aux asymptotes; il est clair que les Secteurs
* *Art.* 218. Hyperboliques *CFD*, *CTN*, seront égaux * entr'eux,
* *Hyp.* puisque * *CG. CH* :: *CR. CQ*. Or selon la nature des Progressions geometriques, la ligne *CH* sera la premiére d'autant de moyennes proportionnelles entre *CG* & *CL* que le nombre $m-1$ contient d'unités, & de même la ligne *CQ* sera la premiére d'autant de moyennes proportionnelles entre *CR* & *CS* que le nombre $n-1$ contient d'unités. Donc * *CFE. CFD* :: *m. 1*. Et *CTN*
* *Art.* 220. ou *CFD. CTV* :: *1. n*. Et par conséquent le Séćteur *CFE* est au Séćteur *CTV* en raison composée de *m* à *1*, & de *1* à *n*, c'est à dire, comme le nombre *m* est au nombre *n*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

### COROLLAIRE.

223. DE-LA on voit qu'un Séčteur Hyperbolique *CFE* étant donné avec un point quelconque *T* de l'Hyperbole, il ne faut pour trouver un autre point *V* de la même Hyperbole, tel que le Séčteur *CFE* soit au Séčteur *CTV*, comme *m* est à *n*, que prendre *CS* en sorte que $\sqrt[m]{CG} . \sqrt[m]{CL} :: \sqrt[n]{CR} . \sqrt[n]{CS}$, ou (ce qui revient au même) $\sqrt[m]{\overline{CG}^n} . \sqrt[m]{\overline{CL}^n} :: CR . CS$. C'est à dire, qu'il faut prendre $CS = CR \times \sqrt[m]{\frac{\overline{CL}^n}{\overline{CG}^n}}$.

## PROPOSITION IX.

### Theorême.

224. SI *l'on mene par les extremités* B, F, *d'un Séčteur Hyperbolique quelconque* CBF, *les droites* BK, FG, *paralleles à une asymptote* CS, *& terminées par l'autre* CL; *je dis que le Séčteur Hyperbolique* CBF *est égal à l'espace hyperbolique* BKGF *compris entre les paralleles* BK, FG, *à une asymptote* CS, *la partie* GK *de l'autre asymptote* CL, *& la portion* BF *de l'Hyperbole.* FIG. 121.

Car si l'on retranche des triangles égaux * *CKB*, *CGF*, le même triangle *CGA* (le point *A* est le point d'intersection des deux droites *FG*, *CB*) & qu'on ajoûte aux deux restes *BKGA*, *CAF*, le même espace hyperbolique *BAF*, on formera d'une part l'espace *BKGF*, & de l'autre le Séčteur *CBF* qui seront égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 99.

### COROLLAIRE I.

225. SI l'on eût mené les lignes *BQ*, *FO*, paralleles à l'asymptote *CL*, & terminées par l'asymptote *CS*, on auroit prouvé de même que le Séčteur Hyperbolique

*CBF* eſt égal à l'eſpace hyperbolique *BQOF*; d'où l'on voit que les eſpaces ou Trapeſes hyperboliques *BKGF*, *BQOF*, ſont égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

226. DE-LA il eſt évident que tout ce qu'on vient de démontrer dans les articles 217, 218, 219, 220, 221, 222, & 223, des Secteurs Hyperboliques, ſe doit auſſi entendre de ces ſortes de Trapeſes; puiſqu'ils leurs ſont égaux.

## PROPOSITION X.

### Theorême.

FIG. 122. 227. SOIENT *deux differentes Hyperboles* BMF, HND, *qui ayent les mêmes aſymptotes* CL, CS, *& ſoient menées par deux points quelconques* G, K, *d'une aſymptote deux paralleles* GDF, KHB, *à l'autre. Je dis que l'eſpace hyperbolique* HKGD *eſt à l'eſpace hyperbolique* BKGF, *comme la puiſſance de l'Hyperbole* HND, *eſt à la puiſſance de l'Hyperbole* BMF.

Car ayant mené par un point quelconque *P* de la partie *GK*, une parallele aux deux droites *GD*, *KH*, laquelle rencontre l'Hyperbole *BMF* au point *M*, & l'Hyperbole *HND* au point *N*; & nommé la puiſſance de l'Hyperbole *HND*, *aa*; celle de l'Hyperbole *BMF*, *bb*; & l'indéterminée *CP*, *x*; on aura
* Art. 101. * $PN = \frac{aa}{x}$, & $PM = \frac{bb}{x}$; & partant $PN . PM :: aa . bb$.
Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la
* Art. 186. partie *GK* que tombe le point *P*; il s'enſuit * que l'eſpace hyperbolique *HKGD . BKGF :: aa . bb*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

228. LORSQUE les puiſſances des Hyperboles *HND*, *BMF*, ſont entr'elles, comme le nombre *m* eſt au nom-

bre $n$; on pourra toûjours trouver dans l'Hyperbole *HND* un Trapeſe hyperbolique *RSVT* égal à un Trapeſe hyperbolique *GKBF* de l'autre *BMF*, les droites *CG*, *CK*, *CR*, étant données. Car il eſt clair * que le Trapeſe *GKHD* eſt au Trapeſe *GKBF*, comme $m$ eſt à $n$; & qu'ainſi toute la difficulté ſe reduit à trouver dans la même Hyperbole *HND*, le Trapeſe *RSVT*, qui ſoit au Trapeſe *GKHD*, comme le nombre $n$ eſt au nombre $m$: & c'eſt ce qui ſe fera * en prenant *CS*, telle que $\sqrt[n]{CG}.\sqrt[m]{CK} :: CR.CS$.

* Art. 222. & 225.

* Art. 223. & 226.

## DÉFINITIONS.

4.

Soit une ligne droite indéfinie *AC*, qui ait pour origine le point fixe *A*; & ſoit une ligne courbe *AMB* telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques *M* une droite *MP* qui faſſe avec *AC* un angle donné *APM*, & ayant nommé les indéterminées *AP*, $x$; *PM*, $y$; on ait toûjours $ax = yy$ (la lettre $a$ marque une ligne donnée): il eſt clair * dans cette ſuppoſition que la ligne courbe *AMB* eſt une Parabole qui a pour diametre la ligne *AC*, pour une ordonnée à ce diametre la droite *PM*, & pour parametre de ce diametre la donnée $a$. Mais ſi l'on ſuppoſe à preſent que la nature de la courbe *AMB* ſoit exprimée par l'équation $y^3 = aax$, ou par cette autre $y^3 = axx$; cette ligne courbe ſera nommée *Parabole cubique* ou *du troiſiéme degré*; parce que celle des deux indéterminées $x$ ou $y$, dont la puiſſance eſt la plus élevée, monte au troiſiéme degré. De même ſi l'équation eſt $y^4 = a^3x$, ou $y^4 = ax^3$; la ligne courbe *AMB* eſt appellée *Parabole du quatriéme degré*; parce que l'indéterminée $y$ dont la puiſſance eſt la plus haute, monte au quatriéme degré. Il en eſt ainſi de toutes les autres à l'infini.

FIG. 123. · * Art. 19.

5.

Soit comme dans la définition précédente une ligne droite *AC* qui ait pour origine le point fixe *A*; & ſoit FIG. 124

une ligne courbe $BM$, telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques $M$ la droite $MP$ qui fasse avec $AC$ un angle donné $APM$, & ayant nommé $AP$, $x$; $PM$, $y$; on ait toûjours $xy = aa$ ( la lettre $a$ marque une ligne donnée ): il est clair* que cette ligne courbe sera une Hyperbole, qui aura pour l'une de ses asymptotes la ligne $AC$, & pour l'autre, la ligne $AD$ parallele à $PM$, & dont la puissance sera le quarré $aa$. Mais si l'équation qui exprime la nature de la courbe $BM$ est $xxy = a^3$; cette ligne courbe sera nommée *Hyperbole cubique* ou *du troisiéme degré*, parce que le produit $xxy$ des deux indéterminées $x$ & $y$, a trois dimensions. De même, si l'équation étoit $x^3y = a^4$; la ligne courbe $BM$ seroit une *Hyperbole du quatriéme degré*; parceque le produit $x^3y$ à quatre dimensions. Il en est ainsi de toutes les autres à l'infini.

*Art. 101.

COROLLAIRE.

FIG. 123. 124.

229. Si l'on suppose que la lettre $m$ marque un nombre entier quelconque qui soit l'exposant de la puissance de l'indéterminée $AP$ ( $x$ ); & de même que la lettre $n$ marque l'exposant de la puissance de l'autre indéterminée $PM$ ( $y$ ); il est clair que l'équation $y^n = x^m \times a^{n-m}$ ( ou simplement $y^n = x^m$, en faisant pour abreger la donnée $a = 1$ ) exprimera la nature des Paraboles de tous les degrés à l'infini. On voit de même que l'équation $x^m y^n = a^{m+n}$ ( ou simplement $x^m y^n = 1$, en faisant $a = 1$ ) exprime en general la nature des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.

COROLLAIRE II.

230. Si l'on mene par l'origine fixe $A$ de la ligne $AC$ une ligne droite indéfinie $AD$ parallele à $PM$; & qu'ayant tiré $MK$ parallele à $AC$, qui rencontre $AD$ au point $K$, on nomme les indéterminées $AK$, $x$; $KM$, $y$;

il

il est clair que l'indéterminée $x$ qui exprimoit auparavant la ligne $AP$ ou $MK$, devient à present $y$; & qu'au contraire $y$ qui exprimoit $PM$ ou $AK$, devient à present $x$. D'où il suit.

1°. Que si la courbe $AMB$ est une Parabole ordinaire, elle aura pour équation $yy = ax$ ou $xx = ay$, selon qu'on rapportera ses points à ceux de la ligne $AC$ ou $AD$; & de même que la Parabole cubique qui a pour équation $y^3 = aax$ lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne $AC$, aura pour équation $x^3 = aay$ lorsqu'on les rapporte à ceux de la ligne $AD$; & en general que si la ligne courbe $AMB$ a pour équation $y^n = x^m a^{n-m}$ étant rapportée à la ligne droite $AC$, cette même courbe aura pour équation $x^n = y^m a^{n-m}$ (l'on suppose que $n$ surpasse $m$) étant rapportée à la ligne $AD$. FIG. 123.

2°. Que l'Hyperbole ordinaire a toûjours la même équation $xy = aa$, soit qu'on la rapporte à la ligne $AC$ ou à la ligne $AD$; que l'Hyperbole cubique qui a pour équation $xxy = a^3$ étant rapportée à $AC$, aura pour équation $xyy = a^3$ étant rapportée à l'autre ligne $AD$; & en general que l'Hyperbole qui a pour équation $x^m y^n = a^{m+n}$ lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne $AC$, aura pour équation $x^n y^m = a^{m+n}$ lorsqu'on les rapporte à ceux de la ligne $AD$. FIG. 124.

## COROLLAIRE III.

231. DE-LA il est évident qu'il y a deux Paraboles cubiques dont l'une a pour équation $y^3 = aax$ ou $x^3 = aay$, & l'autre $y^3 = axx$ ou $x^3 = ayy$; au lieu qu'il n'y a qu'une seule Hyperbole cubique $xxy = a^3$ ou $xyy = a^3$. Car les indéterminées $x$ & $y$ ne peuvent être combinées que des quatre premieres manieres pour exprimer les Paraboles cubiques ou du troisiéme degré; & des deux secondes pour exprimer les Hyperboles cubiques. Or comme les quatre premieres égalités appartiennent à deux differentes courbes, & lesdeux secondes à la même; il s'ensuit, &c. On peut trouver par

la même voïe le nombre des Paraboles ou des Hyperboles du quatriéme, cinquiéme degré, &c.

## COROLLAIRE IV.

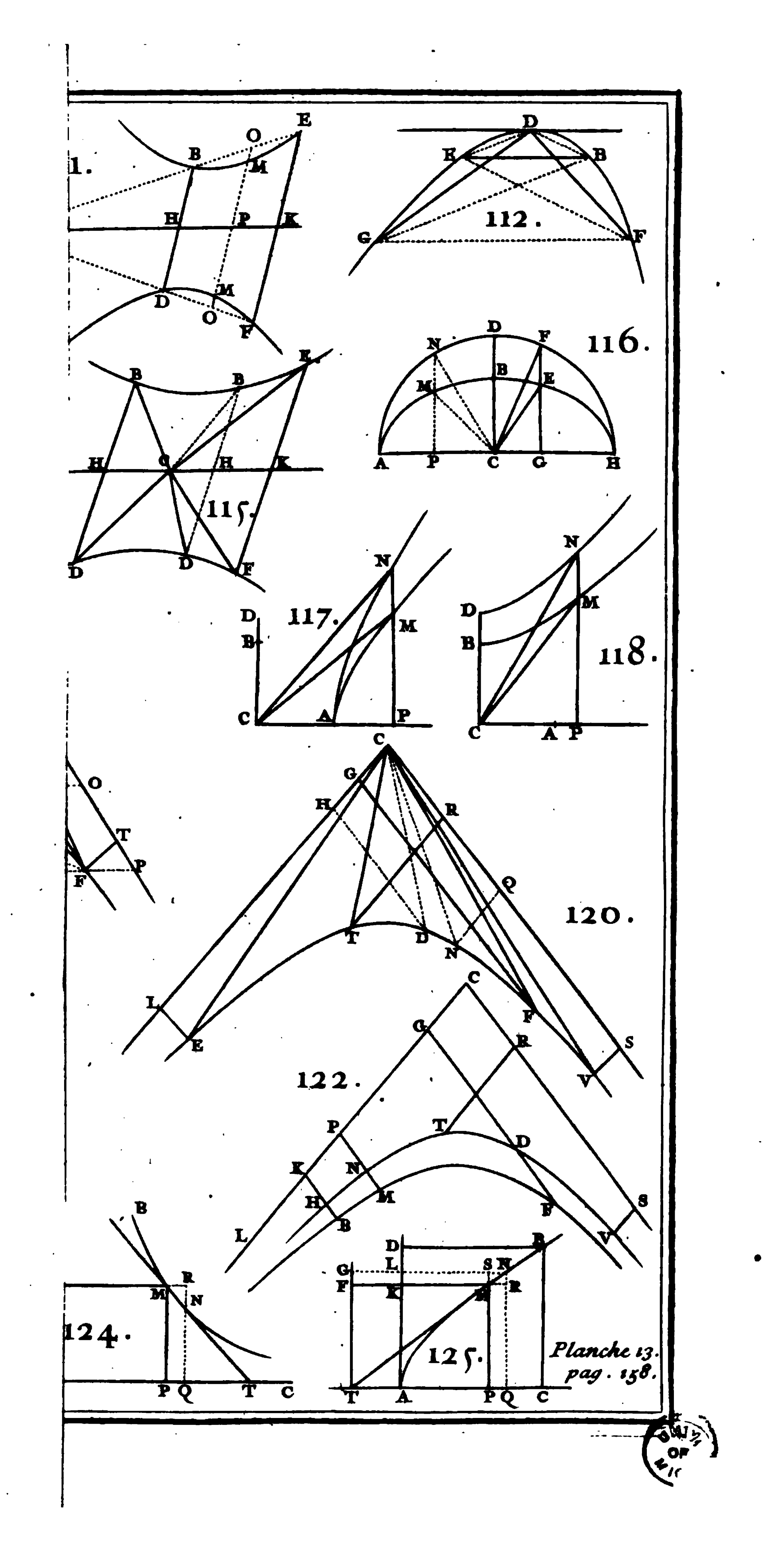
FIG. 124. 232. NON-SEULEMENT l'Hyperbole ordinaire a pour asymptotes les lignes droites indéfinies *AC*, *AD*; mais encore celle de tous les degrés à l'infini. Car soit l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ ou $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$ ($AP = x$, $PM = y$) qui exprime la nature de telle Hyperbole qu'on voudra, lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne *AC*; il est manifeste que plus *AP* ($x$) augmente, plus au contraire $y^n$, & par consequent *PM* ($y$) diminuë; de sorte que $x$ étant infiniment grande, *PM* ($y$) devient nulle ou zero: c'est à dire que l'Hyperbole *BM* & la ligne *AC*, étant prolongées l'une & l'autre à l'infini, s'approchent toûjours de plus en plus jusqu'à ce qu'enfin elles se joignent dans l'infini même; ce qui constituë l'essence d'une asymptote. Maintenant si l'on rapporte les points de la même Hyperbole à ceux de la ligne *AD*, on aura $x^n y^m = a^{m+n}$ ou $y^m = \frac{a^{m+n}}{x^n}$ ($AK = x$, $KM = y$); d'où il suit que plus *AK* ($x$) devient grande, plus au contraire *KM* ($y$) devient petite, & cela à l'infini; & qu'ainsi la ligne *AD* est encore une asymptote de la même Hyperbole.

## PROPOSITION XI.

### Problême.

FIG. 123. 233. SOIT *proposé de mener d'un point donné* M *sur la seconde Parabole cubique* AMB, *dont la nature est exprimée par l'équation* $y^3 = axx$, *la tangente* MT.

Ayant supposé l'arc *MN* infiniment petit, & mené *NQ* parallele à *PM*, & *MR* parallele à *AC*: le petit triangle *MRN* sera semblable au grand *TPM*; puisque le



1.
112.
115.
116.
117.
118.
120.
122.
124.
125.
Planche 13.
pag. 158.

petit arc $MN$ peut être regardé * comme la prolongation de la tangente $TM$. Cela posé, on nommera la soutangente cherchée $TP$, $s$; & la petite droite $PQ$ ou $MR$, $e$; ce qui donnera $RN = \frac{ey}{s}$, à cause des triangles semblables $TPM$, $MRN$. Or si l'on met le cube de $QN$ $(y + \frac{ey}{s})$ à la place de $y^3$ dans l'équation $y^3 = axx$ qui exprime la nature de la courbe $AMB$; & à la place de $xx$, le quarré de $AQ$ $(x + e)$: il est évident qu'on formera une équation $y^3 + \frac{3ey^3}{s} + \frac{3eey^3}{ss} + \frac{e^3y^3}{s^3} = axx + 2eax + eea$ qui exprimera le rapport de $AQ$ à $QN$. Et si l'on retranche par ordre des deux membres de cette derniere équation ceux de la premiere, & qu'on divise ensuite par $e$, on trouvera $\frac{3y^3}{s} + \frac{3ey^3}{ss} + \frac{eey^3}{s^3} = 2ax + ea$; dans laquelle effaçant tous les termes où $e$ se rencontre, parce que $PQ$ $(e)$ étant infiniment petite ou nulle, ces termes sont nuls par rapport aux autres; il vient enfin $\frac{3y^3}{s} = 2ax$; & partant $PT$ $(s) = \frac{3y^3}{2ax} = \frac{3}{2}x$ en mettant pour $y^3$ sa valeur $axx$. *Ce qu'il falloit trouver.* * Art. 189.

## REMARQUE.

234. Si l'on fait attention sur le calcul précédent, on verra avec évidence qu'en substituant à la place de la puissance de $y$, une pareille puissance de $y + \frac{ey}{s}$, on n'a besoin que des deux premiers termes de cette puissance. Car tous les autres étant multipliés par les puissances de $e$, ils renferment chacun $e$, ou des puissances de $e$, dans la derniere équation que l'on trouve à la fin de l'operation; & doivent par conséquent être effacés. Il en est de même lorsqu'on substitue à la place de la puissance de $x$, une pareille puissance de $x + e$. Mais si l'on forme de suite

toutes les puissances du binome $x+e$, on aura pour les deux premiers termes de la seconde puissance $x^2+2ex$; de la troisiéme $x^3+3exx$; de la quatriéme $x^4+4ex^3$; de la cinquiéme $x^5+5ex^4$; & ainsi de suite à l'infini. De sorte que les deux premiers termes d'une puissance quelconque $m$ de $x+e$, seront $x^m+mex^{m-1}$. On trouvera de même que les deux premiers termes d'une puissance quelconque $n$ du binome $y+\frac{ey}{s}$, seront $y^n+\frac{ney^n}{s}$.

COROLLAIRE.

235. DE-LA on voit que pour trouver une expression generale de la soutangente $PT$ ($s$) des Paraboles de tous les degrés à l'infini; il n'y aura qu'à se servir de l'équation generale $y^n=x^m a^{n-m}$, ou (prenant $a$ pour l'unité) $y^n=x^m$ qui exprime la nature de toutes ces Paraboles. Voici comment.

On mettra dans l'équation generale $y^n=x^m$ à la place de $y^n$, les deux premiers termes de la puissance $n$ de $y+\frac{ey}{s}$, c'est à dire, $y^n+\frac{ney^n}{s}$; & de même à la place de $x^m$, les deux premiers termes de la puissance $m$ de $x+e$, c'est à dire, $x^m+mex^{m-1}$: ce qui donnera $y^n+\frac{ney^n}{s}=x^m+mex^{m-1}$. Et retranchant par ordre les membres de la premiere équation de ceux de celle-ci, & divisant ensuite par $e$, l'on aura $\frac{ny^n}{s}=mx^{m-1}$; & partant $s=\frac{ny^n}{mx^{m-1}}=\frac{n}{m}x$ en mettant pour $y^n$ sa valeur $x^m$.

PROPOSITION XII.

Problême.

FIG. 124. 236. MENER *les tangentes des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.*

La même préparation étant faite que dans la propo-

sition précédente, on mettra dans l'équation générale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime le rapport de $AP$ $(x)$ à $PM$ $(y)$, à la place de $x^m$ les deux premiers termes de la puissance $m$ de $AQ$ $(x+e)$ c'est à dire, $x^m + mex^{m-1}$; & de même à la place de $y^n$ les deux premiers termes de la puissance $n$ de $QN$ $(y - \frac{ey}{s})$ c'est à dire $y^n - \frac{ney^n}{s}$ : ce qui par la multiplication donne cette autre équation $x^m y^n + mey^n x^{m-1} - \frac{ney^n x^m}{s} - \frac{mneey^n x^{m-1}}{s} = a^{m+n}$ qui exprimera le rapport de $AQ$ à $QN$. Et retranchant par ordre des deux membres de cette derniere équation, ceux de la premiere; & divisant ensuite par $ey^n$; il vient $mx^{m-1} - \frac{nx^m}{s} - \frac{mnex^{m-1}}{s} = o$; dans laquelle équation effaçant le terme $-\frac{mnex^{m-1}}{s}$ qui est nul par rapport aux deux autres, parce qu'il renferme dans son expression la ligne infiniment petite ou nulle $PQ$ $(e)$, on trouve en transposant à l'ordinaire $PT$ $(s) = \frac{nx^m}{mx^{m-1}}$ $= \frac{n}{m}x$.

## COROLLAIRE.

237. IL est donc évident que pour mener la Tangente $MT$ d'un point donné $M$ sur une Parabole ou une Hyperbole de tel degré qu'on voudra; dont l'équation est pour la Parabole $y^n = x^m a^{n-m}$, & pour l'Hyperbole $x^m y^n = a^{m+n}$: il ne faut que prendre la soutangente $PT = \frac{n}{m} AP$ du même côté du point $A$ par rapport au point $P$, lorsque c'est une Parabole; & du côté opposé, lorsque c'est une Hyperbole. FIG. 123. 124.

## PROPOSITION XIII.

### Theorême.

238. SOIT *comme dans la définition quatrième, une* FIG. 125. *Parabole* AMB *de tel degré qu'on voudra, dont la nature est exprimée par l'equation* $y^n = x^m a^{n-m}$: *soit menée d'un de ses points quelconques* B *la droite* BC *qui fasse avec* AC *l'angle donné* ACB, *& soit achevé le parallelogramme* ACBD. *Je dis que le parallelogramme circonscrit* ACBD *est à l'espace Parabolique* ACBMA *compris par les droites* AC, CB, *& par la portion de Parabole* AMB; *comme* m + n *est à* n.

*Il faut prouver que* ACBD. ACBMA :: m+n. n.

Ayant supposé sur la portion de Parabole *AMB* l'arc *MN* infiniment petit, où si l'on aime mieux, indéfiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucune portion donnée de la Parabole, si petite qu'elle puisse être; & mené les droites *MP*, *NQ*, paralleles à *BC*; & *MK*, *NL*, paralleles à *AC*; lesquelles forment par leurs rencontres le petit parallelogramme *MRNS*: on tirera la tangente *MT* qui rencontre le diametre *AC* au point *T*, par où l'on menera une parallele à *CB*, qui rencontre les lignes *MK*, *NL*, aux points *F*, *G*. Cela fait, * Art. 189. on regardera * le petit arc *MN* comme l'un des petits côtés du Polygone qui compose la portion de Parabole *AMB*, & la tangente *MT* comme le prolongement de ce petit côté; de sorte que l'on a deux triangles réctilignes *NRM*, *MPT*, qui sont semblables: c'est pourquoi *NR* ou *MS*. *RM* :: *MP*. *PT* ou *MF*. Et partant le parallelogramme *PMRQ* est égal au parallelogramme *FMSG*; puisque les angles *PMR*, *FMS*, sont égaux, & que les côtés autour de ces angles sont réciproquement proportionnels.

* Art. 137. Or * *MF* ou $PT = \frac{n}{m} AP$ ou $\frac{n}{m} MK$. Donc aussi le parallelogramme *FMSG* ou son égal $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$. Et comme cela arrive toûjours en quel-

que endroit de la portion de Parabole *AMB* que tombe le petit arc *MN*; il s'ensuit que la somme de tous les petits parallelogrammes *PMRQ*, c'est à dire, * le Triligne parabolique $ACBMA = \frac{n}{m} ADBMA$ somme de tous les petits parallelogrammes $\frac{n}{m}$ *KMSL*. On aura donc *ADBMA*. *ACBMA* :: *m*. *n*. Et par conséquent *ADBMA* + *ACBMA* ou *ACBD*. *ACBMA* :: *m* + *n*. *n*. *Ce qu'il falloit démontrer.* *Art. 184.

## COROLLAIRE.

239. De-la il est évident que le Triligne parabolique *APM* est au parallelogramme circonscrit *APMK*, comme *n* est à *m* + *n*: & qu'ainsi le Trapese parabolique $MPCB = \frac{n}{m+n} ABCD - \frac{n}{m+n} APMK$; puisque $ACBMA = \frac{n}{m+n} ACBD$, & $APM = \frac{n}{m+n} APMK$.

## PROPOSITION XIV.

### Theorême.

240. Soit *comme l'on a expliqué dans la définition cinquiéme, une Hyperbole* BMO *de tel degré qu'on voudra, dont la nature est exprimée par l'équation* $x^m y^n = a^{m+n}$: *soit menée d'un de ses points quelconques* B *la ligne* BC *parallele à l'une des asymptotes* AD, *& terminée par l'autre en* C; *& soit achevé le parallelogramme* ACBD. *Je dis que ce parallelogramme inscrit* ACBD *est à l'espace hyperbolique* ECBMO *renfermé par la droite déterminée* BC, *par la ligne* CE *prolongée à l'infini du côté de* E, *& par la portion d'Hyperbole* BMO, *prolongée aussi à l'infini du côté de* O; *comme* m − n *est à* n. FIG. 126.

*Il faut prouver que* ACBD. ECBMO :: m−n. n.

La même préparation étant faite que dans la proposition précédente, on prouvera de la même maniere que le petit parallelogramme $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$.

Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la portion d'Hyperbole *BMO* que tombe le petit arc *MN*; il s'ensuit que la somme de tous les petits parallelogrammes *PMRQ*, c'est à dire,* l'espace *ECBMO* $= \frac{n}{m}$ *EADBMO* somme de tous les petits parallelogrammes $\frac{n}{m}$ *KMSL*. On aura donc *EADBMO*. *ECBMO* :: *m*. *n*; & partant *EADBMO*—*ECBMO*, ou *ACBD*. *ECBMO* :: *m*—*n*. *n*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 184.

## COROLLAIRE I.

241. DE-LA il est évident que le Trapese hyperbolique $CPMB = \frac{n}{m-n} ACBD - \frac{n}{m-n} APMK$; puisque $ECBMO = \frac{n}{m-n} ACBD$, & que par la même raison l'espace $EPMO = \frac{n}{m-n} APMK$.

## COROLLAIRE II.

242. DE-LA il suit:

1°. Que lorsque *m* surpasse *n*; le rapport du parallelogramme inscrit *ACBD* à l'espace *ECBMO* indéfiniment étendu du côté de *E*, sera toûjours exprimé par des nombres positifs; & qu'ainsi on aura toûjours dans ce cas la quadrature absoluë de cet espace.

2°. Que lorsque $m = n$, ce qui arrive dans l'Hyperbole ordinaire; on trouve que le parallelogramme *ACBD* est à l'espace hyperbolique *ECBMO*, comme zero est à l'unité: c'est à dire que cet espace est infini par rapport au parallelogramme inscrit *ACBD*.

3°. Que lorsque *m* est moindre que *n*; le parallelogramme inscrit *ACBD* sera à l'espace hyperbolique *ECBMO* comme un nombre negatif à un nombre positif: ce qui fait voir alors que la raison de cet espace au parallelogramme *ACBD*, est pour ainsi dire plus qu'infinie. Mais on doit remarquer dans ce dernier cas, que

que l'eſpace hyperbolique renfermé par la droite *DB*, par l'aſymptote *AD* prolongé à l'infini du côté de *D*, & par l'Hyperbole *OMB* auſſi prolongée à l'infini du côté de *B*, ſera au parallelogramme inſcrit *ACBD*, comme *m* eſt à *n—m*, c'eſt à dire, que cet eſpace ſera quarrable; car prenant les indéterminées (*x*) ſur l'aſymptote *AD*, au lieu qu'on les avoit priſes ſur l'aſymptote *AC*, l'équation à l'Hyperbole deviendra * $x^n y^m = a^{m+n}$. * *Art.* 230.

## PROPOSITION XV.

### Theorême.

243. SOIT *dans l'angle droit* CAD *une ligne courbe quelconque* AMB, *dont l'on ſçache mener les tangentes* MT; *& ſoit dans l'angle* DAH *qui eſt à côté de celui ci, une autre ligne courbe* HFE, *telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques* F *la ligne* FM *parallele à* AC, *qui rencontre en* K *la ligne* AD, *& en* M *la premiere courbe* AMB, *& ayant tiré la tangente* MT *qui rencontre* AC *au point* T: *on ait toûjours comme* AK *eſt à* MT, *ainſi une ligne conſtante* a *qui demeure toûjours la même en quelque endroit que tombe le point* F, *eſt à* KF. *Je dis que ſi par un point quelconque* D *de la ligne* AD *l'on mene une ligne droite* EB *parallele à* AC *& terminée par les deux courbes; l'eſpace* ADEFH *ſera égal au réctangle de la courbe* AMB *par la conſtante* a. FIG. 127.

*Il faut prouver que* ADEFH $=$ AMB $\times$ a.

Ayant ſuppoſé par tout où l'on voudra ſur la courbe *AMB* l'arc *MN* infiniment petit, & mené les droites *MF*, *NG*, paralleles à *AC*, & qui rencontrent la droite *AD* aux points *K*, *L*, & la courbe *HFE* aux points *F*, *G*, on tirera les droites *FS*, *MR*, paralleles à *AD*, & on prolongera *RM* juſqu'à ce qu'elle rencontre *AC* en *P*. Cela poſé, les deux triangles réctangles ſemblables *MPT*, *MRN*, donnent *MR*. *MN* :: *MP* ou *AK*. *MT* :: *a*. *KF*. Et partant *KF* $\times$ *MR*, c'eſt à dire,

le petit réctangle $FKLS = MN \times a$. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la Courbe $AMB$ qu'on prenne le petit arc $MN$, il s'ensuit que la somme de tous les petits réctangles $KLSF$, c'est à * dire, l'espace $ADEFH$ sera égal à la somme de tous les petits réctangles $MN \times a$, c'est à dire, au rectangle de la courbe $AMB$ par la constante $a$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Art. 184.

## COROLLAIRE I.

244. De-là il est évident que le réctangle de la portion $AM$ par la constante $a$, est égal à l'espace $AKFH$; & de même que le réctangle de la portion $MB$ par la même ligne $a$, est égal à l'espace $KDEF$.

## COROLLAIRE II.

245. Si l'on suppose que la Courbe $AMB$ soit la seconde Parabole cubique, qui ait pour équation $y^3 = axx$ ($AP = x$, $PM = y$); on aura * $PT = \frac{3}{2}x$; & à cause du triangle réctangle $MPT$, l'hypothenuse $MT = \sqrt{yy + \frac{9}{4}xx}$. Mais par la proprieté de la Courbe $HFE$, il faut que $MP(y)$. $MT(\sqrt{yy + \frac{9}{4}xx})$ :: $a$. $KF$. Ce qui donne $\overline{KF}^2 = aa + \frac{9aaxx}{4yy} = aa + \frac{9}{4}ay$, en mettant pour $axx$ sa valeur $y^3$. D'où l'on voit que la Courbe $HFE$ est dans ce cas une Parabole, qui a pour axe la ligne $AD$, dont l'origine est au point $O$, pris de l'autre côté du point $D$ par rapport au point $A$, en sorte que $AO = \frac{4}{9}a$, & dont le parametre $= \frac{9}{4}a$: car par la proprieté de cette Parabole * le quarré de l'ordonnée $KF$ sera égal au réctangle de $KO$ par le parametre $\frac{9}{4}a$, c'est à dire en termes analytiques, $\overline{KF}^2 = aa + \frac{9}{4}ay$. Or comme les Trapeses paraboliques $ADEH$, $AKFH$, sont * quarrables, il s'ensuit qu'on a la réctification tant de la Courbe $AMB$, que d'une

* Art. 233.
* Art. 19.
* Art. 239.

de ses portions quelconques $AM$.

Si l'on veut exprimer au juste la valeur de la portion $AM$, on remarquera que $AH$ est $=a$; puisque $\overline{AH}^2 = AO \times \frac{3}{4}a = aa$. Ainsi ayant nommé la tangente $MT$, $t$; la ligne $AK$ ou $MP$, $y$; on aura $KF = \frac{at}{y}$, & le Trapese parabolique $BKAH$ ou* $\frac{2}{3}FK \times KO - \frac{2}{3}HA \times AO$ *Art. 239.
$= \frac{2}{3}at + \frac{8aat}{27y} - \frac{8}{27}aa = AM \times a$. C'est à dire en divisant par $a$, que la portion cherchée $AM = \frac{2}{3}t + \frac{8at}{27y} - \frac{8}{27}a$. Ce qui donne cette construction.

Ayant mené du point donné $M$ sur la seconde Parabole cubique $AMB$, la tangente $MT$ qui rencontre en $Q$ la ligne $AK$ menée par l'origine $A$ de l'axe $AC$ perpendiculairement à cet axe, on prendra sur cette ligne la partie $AV = \frac{8}{27}a$; & ayant tiré $VC$ parallele à $MT$ qui rencontre l'axe en $C$, on décrira du centre $V$ & du rayon $VA$ un arc de cercle qui coupe $VC$ en $X$. Je dis que la portion $AM$ de la seconde Parabole cubique $AMB$ sera égale à la somme des deux droites $MQ$, $CX$.

Car à cause des triangles semblables $TPM$, $TAQ$; il est clair que $MQ = \frac{2}{3}MT(t)$, puisque $AP = \frac{2}{3}PT$; & à cause des triangles semblables $MPT$, $VAC$, il vient $MP(y) . MT(t) :: AV(\frac{8}{27}a) . VC = \frac{8at}{27y}$, & partant $CX = \frac{8at}{27y} - \frac{8}{27}a$. Donc &c.

## PROPOSITION XVI.

### Theorême.

246. SOIT *une Hyperbole équilatere* EAF, *qui ait pour centre le point* C, *& pour la moitié de son premier axe la* FIG. 128.

*droite* CA; *avec une Parabole* NCS *qui ait pour axe la ligne* AC *prolongée du côté de* C *qui en sera l'origine, & pour parametre de l'axe une ligne double de* CA. *Si l'on mene par un point quelconque* N *de la Parabole* NCS, *une parallele* NE *à* CA, *qui rencontre l'Hyperbole* EAF *au point* E, *& son second axe* CL *au point* L; *je dis que l'espace hyperbolique* CLEA *renfermé entre les droites* AC, CL, LE, *& la portion* EA *de l'Hyperbole, est égal au réctangle de la portion* CN *de la Parabole par la droite* AC.

Ayant mené par un point quelconque $M$ de la portion $CN$ de la Parabole, une perpendiculaire $MG$ à la tangente $MT$ qui passe par ce point, terminées l'une & l'autre par l'axe aux points $G$, $T$; & une parallele $MB$ à $CA$, qui rencontre l'Hyperbole en $B$, & son second axe $CL$ en $H$: les lignes $MG$, $HB$, seront égales entr'elles. Car menant l'ordonnée $MP$ à l'axe on
* *Art.* 24. aura * $PG = CA$; & à cause du triangle réctangle $MPG$, le quarré $\overline{MG}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PG}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CA}^2$
* *Art.* 127. $=$ * $\overline{HB}^2$, à cause de l'Hyperbole équilatere $EAF$; & partant $MG = HB$. Or les triangles réctangles semblables $TPM$, $MPG$, donnent $MP$ ou $CH$. $MT$ ::
* *Art.* 143. $PG$ ou $CA$. $MG$ ou $HB$. Donc * &c.

## COROLLAIRE I.

247. **D**E-LA il est évident que le Trapese hyperbolique $HLEB$ est égal au réctangle de la portion de Parabole $MN$ par la moitié $CA$ du parametre de son axe.

## COROLLAIRE II.

248. **S**I l'on mene dans l'Hyperbole équilatere $EAF$ deux paralleles quelconques $BD$, $EF$; & qu'on tire par leurs extremités des lignes droites $BM$, $EN$, $DR$, $FS$, paralleles à $AC$, lesquelles rencontrent le second axe de l'Hyperbole aux points $H$, $L$, $K$, $O$; la difference des réctangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, sera

égale (en tirant les droites *BE*, *DF*,) à la difference des Trapeſes réctilignes *HLEB*, *KOFD*.

Car le réctangle $AC \times MN$ eſt égal * au Trapeſe hyperbolique *HLEB*; & par conſéquent le réctangle $AC \times MN$ plus le ſegment hyperbolique *BE* ſera égal au Trapeſe réctiligne *HLEB*: de même le réctangle $AC \times RS$ plus le ſegment hyperbolique *DF* ſera égal au Trapeſe réctiligne *KOFD*. Donc puiſque les deux ſegmens hyperboliques *EB*, *DF*, ſont * égaux entr'eux, la difference des réctangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, ſera égale à la difference des Trapeſes réctilignes *HLEB*, *KOFD*. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 247. * *Art.* 204.

## COROLLAIRE III.

249. Les mêmes choſes étant poſées que dans le Corollaire précédent; ſi l'on fait $2AC. LH :: BH + LE. m.$ il eſt clair que le réctangle $AC \times m = \frac{1}{2} LH \times \overline{BH + LE}$, c'eſt à dire, égal au Trapeſe réctiligne *HLEB*. De même ſi l'on fait $2AC. KO :: KD + FO. n.$ il eſt clair que $AC \times n$ eſt égal au Trapeſe réctiligne *KOFD*. Par conſéquent * la différence des réctangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, ſera égale à la difference des réctangles $AC \times m$, $AC \times n$; c'eſt à dire, en diviſant par *AC*, que la difference des arcs paraboliques *MN*, *RS*, ſera égale à la difference des droites *m*, *n*. D'où l'on voit qu'on peut trouver des lignes droites égales à la difference d'une infinité d'arcs Paraboliques tels que *MN*, *RS*. * *Art.* 248.

# LIVRE SIXIE'ME.

## *Des Séctions Coniques considerées dans le Solide.*

## CHAPITRE PREMIER.

## *Des trois Séctions Coniques en général.*

### DE'FINITIONS.

1.

FIG. 129. SI par un point fixe *S* élevé au dessus du plan d'un cercle *VXY*, on fait mouvoir une ligne droite *SZ* indéfiniment prolongée de part & d'autre du point *S*, autour de la circonference du cercle, en sorte qu'elle fasse un tour entier; les deux surfaces convexes produites par la ligne droite indéfinie *SZ* dans ce mouvement, sont appellées chacune separément *Surface Conique*, & toutes deux ensemble *Surfaces Coniques opposées*.

2.

Le point fixe *S* qui est commun à l'une & à l'autre Surface Conique, est nommé *Sommet*.

3.

Le Cercle *VXY*, *Base*.

4.

Le Solide compris par la base *VXY*, & par la portion de la Surface Conique que cette base coupe depuis le Sommet *S*, est appellé *Cone*.

5.

La ligne *SX* menée du Sommet *S* à un point quelconque *X* de sa base, en est un des *Côtés*.

6.

La ligne *SO* menée du Sommet *S* du Cone par le centre *O* de la base, en est l'*Axe*.

8.

On dit qu'un Cone est *droit*, lorsque son axe est per-

pendiculaire sur le plan de sa base ; & au contraire qu'il est *scalene*, lorsque son axe est oblique sur ce plan.

8.

Si l'on coupe une Surface Conique par un plan *FAG* qui ne passe point par le Sommet *S*, & qui ne soit point parallele au plan de la base *VXY* ; la ligne courbe *FAG* formée par la rencontre de ce plan avec la Surface Conique, est appellée *Section Conique*. FIG. 130. 131. 132.

9.

Si l'on mene par le Sommet *S* d'un Cone, un plan *SDE* parallele au plan d'une Section Conique ; la droite indéfinie *DE* formée par la rencontre de ce plan avec celui de la base du Cone, s'appellera *Directrice*.

10.

Une Section Conique *FAG* est appellée *Parabole*, lorsque la Directrice *DE* touche le cercle qui est la base du Cone : *Ellipse*, lorsqu'elle tombe toute entiere au dehors : & *Hyperbole*, lorsqu'elle le traverse.

Mais dans ce dernier cas, si l'on prolonge le plan de la Section, il est visible qu'il rencontrera la Surface Conique opposée ; & la ligne courbe *KMH* formée par cette rencontre, sera nommée *Hyperbole opposée* à la premiere *FAG* ; & les deux ensemble, *Hyperboles ou Sections opposées*. FIG. 132.

11.

Si dans le plan d'une Section Conique il y a une ligne droite qui ne la rencontre qu'en un seul point, & qui étant prolongée indéfiniment de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe toute entiere au dehors ; cette ligne sera nommée *Tangente*, & le point où elle rencontre la Section, point d'*Attouchement*. FIG. 130. 131. 132.

## COROLLAIRE I.

250. DANS la Parabole tous les côtés du Cone étant prolongés indéfiniment rencontreront necessairement son plan, excepté le seul côté *SD* tiré du Sommet *S* FIG. 130.

par le point *D* où la Diréctrice *DE* touche la baſe; puiſqu'il n'y a que ce côté qui ſoit dans le plan *SDE* parallele à celui de la Séction, & que tous les autres le coupent dans le point *S*. D'où il eſt clair que la Parabole s'étend à l'infini, & ne rentre point en elle-même.

### COROLLAIRE II.

FIG. 131. 251. DANS l'Ellipſe tous les côtés du Cone étant prolonges, s'il eſt neceſſaire, rencontrent ſon plan; puiſque le plan *SDE* qui lui eſt parallele, eſt rencontré par tous dans le point *S*. D'où l'on voit qu'elle renferme un eſpace en rentrant en elle-même.

### COROLLAIRE III.

FIG. 132. 252. DANS les Hyperboles oppoſées tous les côtés du Cone excepté les deux *SD*, *SE*, tirés du Sommet *S* aux points *D*, *E*, où la Diréctrice coupe la baſe, étant prolongés indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S*, rencontrent neceſſairement leur plan; puiſqu'il n'y a que ces deux côtés qui tombent dans le plan *SDE* parallele au plan de ces deux Hyperboles, & que tous les autres le coupent dans le point *S*. Les côtés de la portion *SDVE* forment les points de l'Hyperbole *FAG*, & ceux de la portion *SDYE* étant prolongés de l'autre côté du Sommet *S*, forment les points de ſon oppoſée *KMH*. D'où l'on voit que les Hyperboles oppoſées s'étendent chacun à l'infini, & ne rentrent point en elles-mêmes, non plus que la Parabole.

## PROPOSITION I.

### Theorême.

FIG. 132. 253. S*I l'on coupe deux ſurfaces Coniques oppoſées, par un plan* Sam *qui, paſſant par leur Sommet* S, *entre au dedans;*
*ſe*

*je dis qu'il formera par sa rencontre avec ces deux Surfaces, deux lignes droites* Sa, Sm, *indéfiniment prolongées de part & d'autre du point S.*

Car soit *am* la commune Séction du plan coupant, & du plan de la base: il est clair qu'elle rencontrera cette base en deux points *a, m*; puisque par la supposition le plan *Sam* entre au dedans de la surface Conique. Or si l'on mene les côtés *Sa, Sm*, indéfiniment prolongés de part & d'autre du Sommet *S*; il est évident par la génération des Surfaces Coniques opposées que ces côtés seront les deux communes Séctions de ces deux Surfaces, avec le plan coupant *Sam*. *C'est ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

254. COMME la partie de la ligne *am* qui joint les deux points *a, m*, de la circonférence, tombe au dedans de la base, & que tout le reste de cette ligne tombe au dehors; il s'ensuit que si l'on conçoit que le plan *Sam* soit indéfiniment étendu tout autour du Sommet *S*, la partie de ce plan qui sera renfermée dans l'angle *aSm*, & dans son opposé au Sommet, tombera au dedans des deux Surfaces Coniques opposées, & que tout le reste de ce plan tombera entre ou (ce qui est la même chose) au dehors de ces deux Surfaces.

COROLLAIRE II.

255. DE-LA il suit que si l'on joint deux points quelconques *A, M*, d'une Séction Conique par une ligne droite, elle sera renfermée au dedans de la Séction; & qu'étant prolongée indéfiniment de part & d'autre, elle tombera toute entiere au dehors. Car menant du Sommet *S* par les points *A, M*, les côtés *Sa, Sm*, & faisant passer un plan par ces côtés; il est clair que la ligne *AM* tombe dans la partie de ce plan qui est renfermée dans l'angle *aSm*, & que tout le reste FIG. 130.

de cette ligne se trouve dans la partie de ce plan qui tombe dans les angles à côté.

## COROLLAIRE III.

256. Si l'on mene par le Sommet *S* du cone une ligne parallele à une ligne *AM* terminée par une Séction Conique; il est clair par le Corollaire précédent que cette ligne *SH*, tombera dans l'un des angles à côté de l'angle *aSm*, c'est à dire au dehors de la surface Conique; & qu'ainsi elle ira rencontrer le plan de la base en quelque point hors la circonference du cercle, ou bien qu'elle lui sera parallele.

## COROLLAIRE IV.

FIG. 132. 257. Il suit encore du Corollaire premier que si l'on joint deux points quelconques *A*, *M*, de deux Hyperboles opposées par une ligne droite, elle sera renfermée entre ces Hyperboles; & qu'étant indéfiniment prolongée de part & d'autre, elle entrera au dedans. Car menant par le Sommet *S* les côtés *Sa*, *Sm*, qui passent par les points *A*, *M*, & faisant passer par ces côtés un plan indéfiniment étendu tout autour du point *S*; il est clair que la partie de ce plan qui est renfermée dans l'angle *ASM* où tombe la ligne *AM*, est comprise entre ces deux Surfaces, & que la partie du même plan qui est renfermée entre les deux angles à côté où se trouvent les prolongemens de la ligne *AM*, tombent au dedans de ces deux Surfaces. Or comme la ligne *AM* est la commune Séction du plan *Sam* avec celui des deux Hyperboles opposées, il s'ensuit &c.

## COROLLAIRE V.

258. Il suit aussi des Corollaires deuxiéme & quatriéme, qu'une ligne droite ne peut rencontrer une

Séction Conique, ou les deux Hyperboles opposées, au plus qu'en deux points.

## PROPOSITION II.

### Theorême.

259. *Si l'on coupe l'une ou l'autre des deux Surfaces Coniques opposées, par un plan* oVXY *parallele à la base* OVXY; *je dis que la Séction qu'il forme par sa rencontre avec la Surface Conique, est un cercle qui a pour centre le point* o, *où ce plan rencontre l'axe* SO, *prolongé de l'autre côté du Sommet* S, *lorsqu'il est necessaire.* FIG. 129.

Car si l'on mene par un point quelconque *X* de la base au centre *O* le rayon *XO*, & au Sommet *S* le côté *XS* qui rencontre le plan *ovxy* au point *x*: les lignes *OX*, *ox*, seront paralleles entr'elles; puisqu'elles sont les communes Séctions de deux plans paralleles *OVXY*, *ovxy*, par le même plan *SOX* prolongé, s'il est necessaire de l'autre côté du Sommet *S*. Les triangles *OSX*, *oSx*, seront donc semblables; & par conséquent on aura toûjours *SO. OX* :: *So. ox*. Or les premiers termes de cette proportion étant par tout les mêmes, le quatriéme *ox* ne changera point de grandeur en quelque endroit que tombe le point *x*. D'où l'on voit que la ligne courbe *vxy* est la circonférence d'un cercle qui a pour centre le point *o*,

### COROLLAIRE.

260. Il suit de là qu'on peut placer la base d'un cone en tel endroit qu'on veut, selon qu'il est plus commode. C'est pourquoi lorsque la Séction est une Parabole ou une Hyperbole, on la place ordinairement en sorte qu'elle coupe la Séction; mais lorsque c'est une Ellipse on la place tantôt de maniére qu'elle la coupe, & tantôt de maniére qu'elle tombe audessous.

## PROPOSITION III.

### Theorême.

FIG. 130. 261. S*i dans le plan d'une Parabole* FAG, *l'on tire par un de ses points quelconques* A *vers le dedans du cone, une ligne droite indéfinie* AB *parallele au côté* SD *qui passe par le point* D *où la Diréctrice* DE *touche la base; je dis que cette ligne* AB *tombe toute entiere au dedans de la Séction, & qu'elle ne le rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini du côté de* B.

Car ayant mené par le Sommet *S* du cone, & par la ligne *AB* un plan *SAB*, il formera par sa rencontre avec la Surface Conique deux côtés, dont l'un sera toûjours la ligne *SD*, puisque *AB* lui est parallele; & l'autre la ligne *Sa* qui passe par le point *A*. Or le plan *DSa* renfermé entre les côtés *SD*, *Sa*, prolongés à l'infini du côté de *D* & *a*, tombe* au dedans de la Surface Conique. Par consequent la ligne *AB* qui est toûjours dans ce plan, étant parallele au côté *SD*, tombera toute entiere au dedans de la Parabole, & ne la rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini vers *B*.

* *Art.* 254.

## PROPOSITION IV.

### Theorême.

FIG. 130. 262. S*i dans le plan d'une Parabole* FAG, *l'on tire par un de ses points quelconques* A *vers le dedans du cone, une ligne droite* AM *qui ne soit point parallele au côté* SD, *qui passe par le point* D *où la Diréctrice* DE *touche la base; je dis que cette ligne étant prolongée autant qu'il sera necessaire, rencontrera la Parabole en quelque autre point* M.

Car si l'on fait passer par le Sommet *S* du cone & par cette ligne un plan *SAM*, il est clair qu'il entre au dedans de la Surface Conique, & qu'il ne passe point par

le côté *SD*; d'où il suit que ce plan forme sur la Surface Conique * deux côtés *Sa*, *Sm*, dont l'un *Sa* passe par le point *A*; & l'autre *Sm* n'est point parallele au plan de la Séction, puisqu'il n'y a (*hyp.*) que le seul côté *SD* qui lui soit parallele. Par conséquent le côté *Sm* étant prolongé (s'il est necessaire) rencontrera le plan de la Parabole en un point *M*, par où passe la ligne *AM* qui est formée par la rencontre du plan *aSm* avec celui de la Parabole. Or il est visible que ce point *M* est un des points de la Parabole *FAG*; puisqu'il se trouve en même temps dans le plan de la Séction, & sur la Surface Conique. Donc &c.

* Art. 253.

## PROPOSITION V.

### Problême.

263. MENER *d'un point donné* A *sur une Séction Conique, une Tangente* AF. FIG. 133. 134. 135.

Ayant mené par le point *A* & par le Sommet *S* du cone, une ligne droite *SA* qui rencontre le plan de la base au point *a*, on tirera à cette base par le point *a*, la Tangente *Eaf*; & la ligne *AF* formée par la rencontre du plan *SEaf* (prolongé, s'il est necessaire au delà du Sommet *S*) avec le plan de la Séction, sera la Tangente qu'on cherche.

Car puisque la Tangente *Eaf* tombe toute entiere au dehors de la base excepté le seul point *a*, il s'ensuit que le plan *SEaf* prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S* ne rencontre les Surfaces Coniques opposées que dans la ligne *Sa* aussi prolongée indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S*, & que tout le reste de ce plan tombe au dehors de ces Surfaces. Par conséquent la ligne *AF* formée par la rencontre de ce plan avec celui de la Séction, ne peut avoir de commun avec l'un ou l'autre de ces deux Surfaces que le seul point *A* où la ligne *Sa* rencontre le plan de la

Séction, & tombe toute entiere au dehors excepté ce point. Donc &c.

### COROLLAIRE I.

264. COMME l'on ne peut faire passer par le point *a* de la base du cone, qu'une seule Tangente *Eaf*; il s'ensuit aussi que d'un point donné *A* sur une Séction Conique, on ne peut mener qu'une seule Tangente *AF*.

### COROLLAIRE II.

265. DE-LA on tire la maniére de mener une Tangente *AF* parallele à une ligne droite *MN* donnée de position sur le plan d'une Séction Conique ou de deux Séctions opposées. Car ayant mené par le Sommet *S* du cone, une parallele *SE* à *MN*, elle rencontrera la Diréctrice *DE* en un point *E*, ou bien elle lui sera parallele; puisque cette ligne *SE* sera parallele au plan de la Séction, & tombera par conséquent dans le plan *SDE*. Si elle la rencontre en un point *E* qui tombe au dehors du cercle qui est la base du Cone: ayant mené du point *E* à ce cercle, la Tangente *Eaf*, il est clair que le plan *SEaf* formera par sa rencontre avec le plan de la Séction, une Tangente *AF* qui sera parallele à la ligne *MN*; puisque les deux Séctions *AF*, *SE*, des plans * paralleles *MAN SED*, coupés par le plan touchant *SEaf*, sont paralleles entr'elles aussi-bien * *SE*, *MN*.

* *Hyp.*

### COROLLAIRE III.

266. LES mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précédent.

FIG. 133. 1°. Dans la Parabole le Problême est impossible, lorsque la ligne *MN* donnée de position, devient parallele au côté *SD* qui passe par le point *D* où la Diréctrice *DE* touche la base; car alors le point *E* tombant en *D*, on ne pourra mener par ce point d'autre

Tangente que la Diréctrice *DE* : & comme le plan qui passe par le Sommet & par la Diréctrice *DE* est * parallele au plan de la Parabole, il ne pourra former par sa rencontre avec ce plan aucune Tangente. Mais lorsque la ligne donnée de position, n'est point parallele au côté *SD*, on pourra toûjours mener une Tangente *AF* parallele à cette ligne, & jamais davantage ; car alors le point *E* tombant au dehors du cercle qui est la base du cone, on en pourra toûjours mener *Eaf*, *EDL* à cette base ; dont l'une *EDL* se confondant avec la Diréctrice, ne peut servir à trouver aucune Tangente dans le plan de la Séction ; & l'autre *Eaf* étant differente de la Diréctrice, servira toûjours à trouver par la rencontre du plan *SEaf* avec le plan de la Parabole, une Tangente *AF* qui satisfera. Il en est de même lorsque la ligne *SE* est parallele à la Diréctrice, car la Tangente *Eaf* deviendra alors parallele à la Diréctrice ; & comme on n'en peut mener qu'une seule qui lui soit parallele, puisque la Diréctrice touche elle-même la base en un point *D*, il s'ensuit &c. * Def. 9.

2°. Dans l'Ellipse, on pourra toûjours mener deux Tangentes *AF*, *BG*, paralleles à la ligne *MN* donnée de position ; & par conséquent entr'elles. Car tous les points de la Diréctrice *DE* tombant au dehors de la base, on pourra toûjours mener du point *E* deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, à cette base qui ne se confondront point avec la Diréctrice, & qui serviront à former par la rencontre des plans *SEaf*, *SEbg*, avec le plan de la Séction, deux Tangentes *AF*, *BG*, qui satisferont. Il en est de même lorsque la ligne *SE* est parallele à la Diréctrice ; car au lieu des Tangentes *Eaf*, *Ebg*, qui partent d'un point *E* de cette Diréctrice, il n'y auroit qu'à lui mener deux Tangentes paralleles ; ce qui est toûjours possible. FIG. 154.

3°. Dans les Hyperboles opposées le Problême est impossible, lorsque le point *E* tombe au dedans du cercle qui est la base du cone ; puisqu'on ne peut mener FIG. 155.

alors aucune Tangente de ce point à la base. Mais lorsqu'il tombe au dehors, on pourra toûjours trouver deux Tangentes *AF*, *BG*, paralleles à la ligne *MN* donnée de position; car la Diréctrice *DE* traversant la base, on pourra toûjours mener du point *E* deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, à cette base, lesquelles tombent de part & d'autre de la Diréctrice, & qui serviront à former par la rencontre des plans *SEaf*, *SEbg*, avec le plan de la Séction deux Tangentes *AF*, *BG*, qui satisferont. Il en est de même lorsque la ligne *SE* est parallele à la Diréctrice *DE*; car au lieu des deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, il n'y aura qu'à mener deux Tangentes paralleles à la Diréctrice; ce qui est toûjours possible.

Il est à remarquer dans ce dernier cas, que les Tangentes paralleles *AF*, *BG*, appartiennent toûjours aux Hyperboles opposées, & jamais à la même; ce qui est évident, puisque les deux Tangentes *Eaf*, *Ebg*, de la base, tombent necessairement de part & d'autre de la Diréctrice *DE*.

## COROLLAIRE IV.

267. Il suit du Corollaire précédent :

1°. Que dans une Parabole ou Hyperbole, il ne peut y avoir deux Tangentes qui soient paralleles entr'elles; & qu'au contraire dans l'Ellipse & dans les Hyperboles opposées, une Tangente *AF*, étant donnée de position, ou en peut toûjours mener une autre *BG* qui lui soit parallele.

2°. Que si la ligne *MN* donnée de position, est terminée par une Séction Conique, on pourra toûjour mener dans la Parabole, une Tangente *AF* qui lui soit parallele, & dans l'Ellipse ou les Hyperboles opposées deux Tangentes *AF*, *BG*; puisque la ligne *SE* menée par le Sommet *S* parallelement à *MN* rencontrera* le plan de la base en un point *E* hors la circonference, ou bien lui sera parallele.

* Art. 256.

DEF.

## DÉFINITIONS.

12.

Dans une Parabole, si l'on mene par un de ses points quelconques *A* vers le dedans une ligne *AB* parallele au côté *SD* qui passe par le point *D* où la Diréctrice *DE* touche la base : cette ligne *AB* sera nommée *Diametre*, & le point *A* en sera *l'origine*. FIG. 133.

13.

Dans l'Ellipse ou les Hyperboles opposées, toute ligne droite *AB*, qui joint les points d'attouchement de deux tangentes paralleles *AF*, *BG*, est appellée *Diametre*; & les points *A*, *B*, en sont les extrêmités. FIG. 134. 135.

14.

Si par un point quelconque *P* de tel Diametre *AB* qu'on voudra d'une Séction Conique, l'on tire une ligne droite *MN* qui rencontre la Séction aux points *M*, *N*, & qui soit parallele à la tangente *AF* qui passe par l'origine *A* de ce Diametre dans la Parabole, & par l'une ou l'autre de ses extremités dans les autres Séctions : on dira que cette ligne *MN* est *Ordonnée* de part & d'autre au Diametre *AB*, & que chacune de ses parties *PM*, ou *PN*, est *Ordonnée* à ce Diametre. FIG. 133. 134. 135.

15.

Lorsqu'un Diametre fait avec ses Ordonnées des angles droits, on l'appelle *Axe*.

## COROLLAIRE.

268. IL suit de la Définition douziéme :

1°. Que tous les Diametres d'une Parabole sont paralleles entr'eux, puisqu'ils sont tous paralleles au même côté du cône *SD* qui passe par le point *D* où la Diréctrice *DE* touche la base.

2°. Que par un point donné sur le plan d'une Parabole, on ne peut mener qu'un seul Diametre, puisqu'on ne peut mener par ce point qu'une seule parallele au côté *SD*.

# PROPOSITION VI.

## Problême.

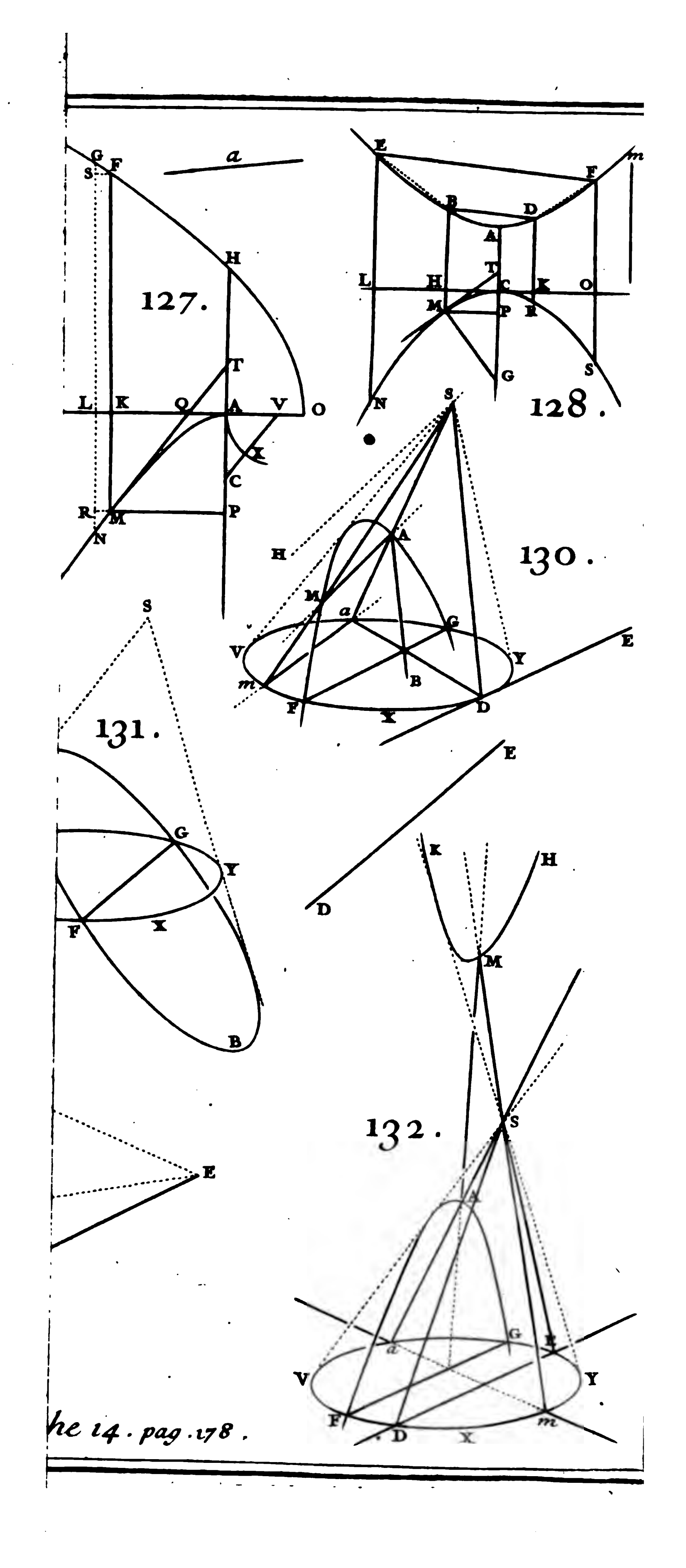
FIG. 136. 137. 138. 269. UN *diametre* AB *d'une Section Conique étant donné, avec une de ses ordonnées* PM, *décrire la Section.*

Ayant fait passer par l'ordonnée *PM* un plan quelconque autre que le plan *APM*, on menera dans ce plan par le point *P* une perpendiculaire indéfinie *Pa* à *PM*; & on décrira d'un point quelconque *C* de cette ligne, & du rayon *CM* un cercle. Cela fait,

1°. Lorsque la Section doit être une Parabole. On menera de l'un des points *a*, *D*, où le cercle coupe la perpendiculaire *Pa* (par exemple du point *a*) par l'origine *A* du diametre *AB*, la ligne *aA* qui rencontre en *S*, une ligne *DS* tirée de l'autre point *D* parallelement à *AB*. On décrira ensuite une surface Conique qui ait pour sommet le point *S*, & pour base le cercle *DMaN*. Je dis qu'elle formera par sa rencontre avec le plan *APM*, la Parabole cherchée *MAN*. Car ayant mené par les extremités du diametre *Da* les paralleles *DE*, *af*, à *PM*; il est clair qu'elles seront tangentes, puisque * *PM* est perpendiculaire sur *Da*. Or le plan *SDE* qui passe par le sommet *S* du cone & par la tangente *DE*, est parallele au plan *APM*, puisque* *SD* est parallele à *AP*, & *DE* à *PM*: d'où il suit* que la Section *MAN* faite par le plan *APM* dans la surface Conique, sera une Parabole qui aura pour diametre la ligne *AB*. De plus le plan touchant *Saf* forme dans le plan *APM* * une tangente *AF*, qui sera parallele à *PM*; puisqu'elle est la commune Section des deux plans *Saf*, *APM*, qui passent par les paralleles *af*, *PM*: & par conséquent* la ligne *PM* sera ordonnée au diametre *AB*.

(FIG. 136. — * Hyp. — * Hyp. — * Def. 10. & 12. — * Art. 263. — * Def. 14.)

FIG. 137. 138. 2°. Lorsque la Section Conique doit être une Ellipse ou une Hyperbole. On menera des points *a*, *b*, où la perpendiculaire indéfinie *Pa* coupe le cercle, par les ex-


127.
128.
130.
131.
132.
he 14 . pag . 178 .

tremités *A*, *B*, du diametre *AB*, les droites *aA*, *bB*, qui se rencontrent au point *S*. On décrira ensuite un cone qui ait pour sommet le point *S*, & pour base le cercle *aMbN*. Je dis que le plan *APM* formera dans la surface de ce cone la Séction *MAN* qu'on demande. Car menant *SD* parallele au diametre *AB* de la Séction, & qui rencontre en *D* le diametre *ab* de la base, par où & par les extremités *a*, *b*, soient tirées les paralleles *DE*, *af*, *bg*, à *PM*; il est clair que le plan *SDE* sera parallele au plan *APM*, & qu'ainsi *DE* *sera la Diréctrice. Or dans l'Ellipse le point *D* tombe sur le diametre *ab* prolongé hors le cercle; puisque le diametre *AB* de la Séction, tombe dans l'angle *aSb* fait par les côtés du cone *Sa*, *Sb*: & au contraire dans l'Hyperbole le point *D* tombe au dedans du cercle; puisqu'alors le diametre *AB* tombe dans l'angle *aSB* qui est à côté de l'angle *aSb*. D'où il suit selon la Définition 10. que la Séction *MAN* est une Ellipse dans le premier cas, & une Hyperbole dans le second. De plus la tangente *AF* qui passe par l'extremité *A* du diametre *AB*, étant la commune Séction du plan touchant *Saf* & du plan coupant *APM*, qui passent par les paralleles *af*, *PM*, sera parallele à *PM*: & de même la tangente *BG* étant la commune Séction du plan touchant *Sbg* & du plan coupant *APM*, lesquels passent par les deux paralleles *bg*, *PM*, sera aussi parallele à *PM*. D'où l'on voit que la ligne *AB* est * un diametre qui a pour ordonnée *PM*.

* *Def.* 9.

* *Def.* 13. & 14.

Il peut arriver dans l'Ellipse que les lignes *Aa*, *Bb*, soient paralleles entr'elles; mais alors il n'y aura qu'à prendre pour le centre *C* du cercle *aMbN*, tel autre point qu'on voudra de la ligne *ab*.

### DÉFINITION. 16.

Si par les deux points *D*, *E*, où la Diréctrice coupe la base, lorsque la Séction est une Hyperbole, on tire FIG. 139.

deux Tangentes *DH*, *EK*; & que par le Sommet *S* & ces Tangentes, on fasse passer deux plans *SDH*, *SEK*: les deux lignes droites indéfinies *CH*, *CK*, que ces deux plans forment par leurs rencontres avec le plan des Hyperboles, sont appellées *Asymptotes*.

COROLLAIRE I.

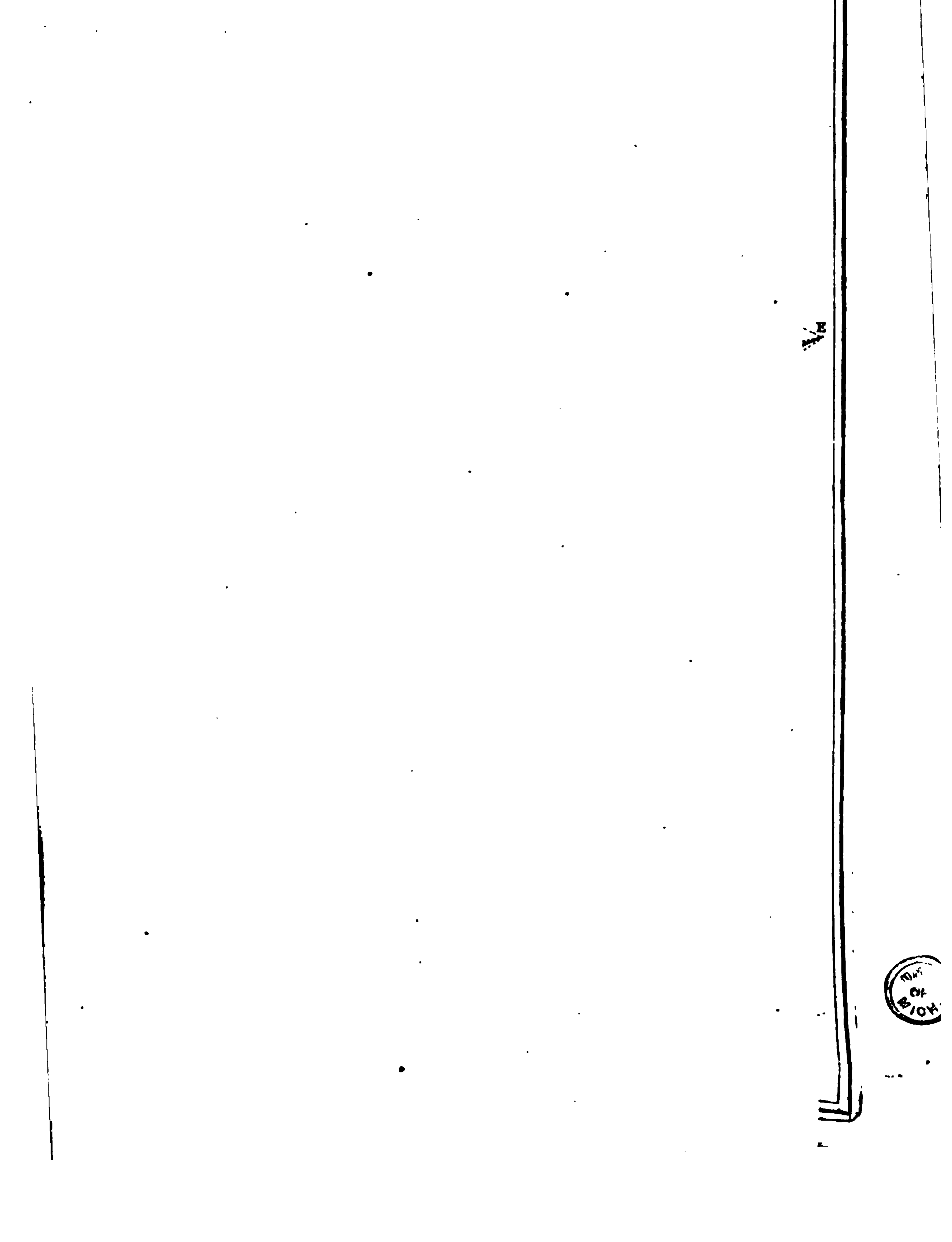
270. Si par un point d'attouchement *D*, l'on mene le côté *DS* prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S*: il est visible que le plan *SDH* ne peut avoir de commun avec les deux surfaces Coniques opposées que ce côté; puisque tous les points de la Tangente *DH* tombent hors la circonference de la base, excepté le seul point *D*. Or le plan *SDE* qui passe par le Sommet *S* & par la Directrice *DE*, étant * parallele au plan des Hyperboles opposées, les communes Sections *SD*, *CH*, de ces deux plans avec le même plan *SDH* seront paralleles entr'elles; c'est pourquoi l'Asymptote *CH* tombera toute entiere au dehors & entre les deux surfaces Coniques opposées, & laissera par conséquent les Hyperboles opposées toutes entieres de part & d'autre sans les rencontrer. On prouvera la même chose de l'autre Asymptote *CK*. Or comme les deux Asymptotes *CH*, *CK*, sont formées par les plans *SDH*, *SEK*, qui tombent de part & d'autre de la même surface Conique & de son opposée; il s'ensuit que tous les points de l'Hyperbole *FAG* sont compris dans l'angle *HCK*, & que tous les points de son opposée tombent dans l'angle qui lui est opposé au Sommet.

* Def. 9.

PROPOSITION VII.

Theorême.

FIG. 139. 271. Si *par un point quelconque* B *d'une Asymptote* CK, *l'on mene une parallele* BA *à l'autre Asymptote* CH; *je dis*



*qu'elle rencontrera l'une des Hyperboles opposées en un seul point A, & qu'étant prolongée indéfiniment, elle tombera toute entiere au dedans.*

Puisque les deux lignes *BA*, *SD*, sont paralleles à la même ligne *CH*, elles le seront entr'elles; & ainsi elles se trouveront dans un même plan, lequel entrera au dedans des deux surfaces Coniques opposées, puisqu'il passe par l'un de leurs côtés *SD*, & qu'il fait un angle avec le plan *SDH* qui la touche dans ce côté. Le plan des paralleles *BA*, *SD*, formera donc dans les deux surfaces Coniques, deux côtés, dont l'un est le côté *SD*, & l'autre le côté *Sa*, qui coupera necessairement la ligne *BA* en quelque point *A*, puisqu'il est situé dans le plan qui passe par les paralleles *SD*, *AB*, & qu'il coupe *SD* en *S*. Donc puisque le point *A* se trouve en même temps dans l'une des surfaces Coniques & dans le plan des Hyperboles, il appartiendra à l'une de ces Hyperboles. De plus puisque la ligne *BA* étant prolongée indéfiniment du côté du point *A*, tombe toute entiere dans le plan *DSa* renfermé entre les côtez *DS*, *Sa*, lorsque le point *A* appartient à l'Hyperbole *FAG*, & dans son opposé au Sommet *ASd* lorsqu'il appartient à l'Hyperbole opposée; il est visible qu'elle tombera toute entiere au dedans de l'une des deux surfaces Coniques, & par conséquent aussi au dedans de l'Hyperbole qui en est la Section. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

272. DE-LA on voit qu'entre une Hyperbole *FAG* & son Asymptote *CH*, on ne sçauroit faire passer aucune ligne parallele à cette Asymptote. Or comme la ligne *BA* separe l'Hyperbole qu'elle rencontre en deux portions indéfinies, dont l'une tombe necessairement toute entiere dans l'espace compris entre les paralleles *BA*, *CH*; il s'ensuit que plus *CB* deviendra petite, plus le point *A* avancera dans cette portion, & cela toûjours de plus en plus jusqu'à ce que *CB* devienne

plus petite qu'aucune grandeur donnée. C'est à dire, qu'une Hyperbole & son Asymptote étant l'une & l'autre continuée indéfiniment, elles s'approcheront toûjours de plus en plus, en sorte que leur distance deviendra enfin moindre qu'aucune donnée, sans pouvoir neanmoins * jamais se rencontrer.

*Art. 270.

## PROPOSITION VIII.

### Problême.

Fig. 140.

273. LES *Asymptotes* CH, CK, *d'une Hyperbole* FAG *étant données avec un de ses points quelconques* F, *décrire l'Hyperbole.*

Ayant mené par le point donné $F$, une ligne droite quelconque $HK$ terminée par les asymptotes, on fera passer par cette ligne un plan quelconque autre que le plan $HCK$, dans lequel on tirera par le point de milieu $P$ de $HK$ une perpendiculaire indéfinie $MN$ à cette ligne; & on décrira d'un de ses points quelconques $O$ comme centre, & du rayon $OF$, un cercle $FMN$. On menera des points $H$, $K$, deux Tangentes $HD$, $KE$, à ce cercle; & par les points d'attouchemens $D$, $E$, deux paralleles $DS$, $ES$, aux Asymptotes $CH$, $CK$, lesquelles se rencontreront en un point $S$; duquel comme Sommet, on décrira une surface Conique qui ait pour base le cercle $FMN$. Je dis que cette surface Conique formera par sa rencontre avec le plan $HCK$, l'Hyperbole requise $FAG$.

Il est clair par la proprieté du cercle $FMN$; 1°. Que la corde $FG$ est divisée par le milieu au point $P$, par le diametre $MN$ qui lui est * perpendiculaire; & partant, puisque par la construction $PH = PK$, il s'ensuit que $FH = GK$, $GH = FK$; & par conséquent $GH \times HF = FK \times KG$. 2°. Que $GH \times HF = \overline{HD}^2$, & $FK \times KG = \overline{KE}^2$, & qu'ainsi $HD = KE$. 3°. Que si l'on prolonge les Tangentes $HD$, $KE$, jusqu'à ce qu'elles se ren-

* Hyp.

contrent en un point *Q*, les parties *DQ*, *EQ*, seront égales entr'elles. Ce qui donne *DQ*. *EQ* :: *DH*. *EK*. D'où l'on voit que la ligne *DE* qui joint les points d'attouchemens des deux Tangentes *HD*, *KE*, sera parallele à la ligne *HK*, & le plan *SDE* au plan *CHK*: c'est pourquoi la ligne *DE* sera * la Diréctrice; & comme elle coupe la base en deux points, la Séction Conique *FAG* * sera une Hyperbole. De plus il est évident que cette Hyperbole passera par le point donné *F*, puisque ce point est commun tant à la surface Conique, qu'au plan *HCK* qui est celui de l'Hyperbole; & qu'elle aura pour Asymptotes les lignes *CH*, *CK*, puisqu'elles sont * les communes Séctions des plans touchans *SDH*, *SEK*, & du plan de l'Hyperbole.

* *Def.* 9.
* *Def.* 10.
* *Def.* 15.

S'il arrivoit que les Tangentes *DH*, *EK*, fussent paralleles entr'elles, on verroit alors tout d'un coup que les lignes *DE*, *HK*, seroient paralleles entr'elles, puisque ces Tangentes sont égales; & le reste se démontreroit de la même maniere que ci-dessus.

## PROPOSITION IX.

### Theorême.

274. S'IL *y a deux lignes droites* MN, AB, *terminées par une Séction Conique ou par les Séctions opposées*, *lesquelles se rencontrent en un point* P; *& qui soient paralleles à deux autres lignes*, SE, SD, *données de position: je dis que le réctangle* MP×PN *est au réctangle* AP×PB, *en raison donnée; c'est à dire que la raison de ces deux réctangles demeure toûjours la même, en quelque endroit que puisse tomber les deux lignes* MN, AB. FIG. 141. 142.

Ayant mené par les paralleles *SE*, *MN*, & *SD*, *AB*, deux plans, ils formeront dans le plan de la base, deux lignes droites *Enm*, *Dba*, & dans la surface Conique les côtés *SMm*, *SNn*, *SAa*, *SBb*; & leur commune interséction sera la ligne *SPp*, qui rencontre le plan de

la baſe au point $p$, où les deux droites $Em$, $Da$, s'entrecoupent ; par lequel je mene dans le plan $SMN$ la droite $HK$ parallele à $MN$, & dans le plan $SAB$ la droite $FG$ parallele à $AB$. Cela poſé.

Les triangles ſemblables $SPM$, $SpH$ ; $SPN$, $SpK$ ; $SPA$, $SpF$ ; $SPB$, $SpG$, donnent $MP \times PN . Hp \times pK :: \overline{SP}^2 . \overline{Sp}^2 :: AP \times PB . Fp \times pG$. Et partant on aura $MP \times PN . AP \times PB :: Hp \times pK . Fp \times pG$. Or la raiſon de $Hp \times pK$ à $Fp \times pG$, eſt composée des deux raiſons de $Hp \times pK$ à $mp \times pn$, & de $mp \times pn$ ou par la proprieté du cercle $ap \times pb$ à $Fp \times pG$. Mais à cauſe des triangles ſemblables $Hpm$, $SEm$, & $Kpn$, $SEn$, il vient $Hp . mp :: SE . mE$. Et $pK . pn :: SE . En$. Et en multipliant les Antecedens & les Conſéquens de ces deux raiſons, $Hp \times pK . mp \times pn :: \overline{SE}^2 . mE \times En$ : on prouvera de même à cauſe des triangles ſemblables $Fpa$, $SDa$, & $Gpb$, $SDb$, que $ap \times pb . Fp \times pG :: aD \times Db . \overline{SD}^2$. Il eſt donc évident que la raiſon de $MP \times PN$ à $AP \times PB$, eſt composée des deux raiſons de $\overline{SE}^2$ à $mE \times En$, & de $aD \times Db$ à $\overline{SD}^2$ ; leſquelles par la proprieté du cercle qui eſt la baſe du cone, demeurent toûjours les mêmes en quelque endroit que tombent les droites $MN$, $AB$, parce que les points $E$, $D$, ne changent point. Donc le réctangle $MP \times PN$ eſt au réctangle $AP \times PB$ en raiſon donnée. *Ce qu'il fal. &c.*

## COROLLAIRE.

FIG. 143. 144. 275. DE-LA on voit que ſi dans une Séction Conique, où entre les Séctions oppoſées, il y a deux lignes droites $MN$, $OR$, paralleles entr'elles & qui rencontrent aux points $P$, $Q$, une troiſiéme ligne droite $AB$ auſſi terminée par la Séction ; on aura $MP \times PN . OQ \times QR :: AP \times PB . AQ \times QB$.

PROP.

## PROPOSITION X.

### Theorême.

276. SI *par un point quelconque* A *d'une Parabole ou d'une Hyperbole* MAN, *l'on tire une ligne droite* AB *parallele au côté du cone* SD, *mené dans la Parabole par le point* D *où la Directrice touche la base, & dans l'Hyperbole par l'un des deux points où elle la rencontre; & que par un point quelconque* P *de cette ligne, l'on tire une ligne* MN *parallele à une ligne* SE *donnée de position, & terminée par la Section ou par les Sections opposées, avec une autre ligne* FG *parallele à la ligne* Da *commune Section du plan* SAB *avec celui de la base, & terminée par les côtés* Sa, SD: *je dis que la raison du rectangle* $MP \times PN$ *au rectangle* $FP \times PG$ *est donnée, c'est à dire qu'elle demeure toûjours la même, en quelque endroit de la ligne* AB *que tombe le point* P. FIG. 145.

Ayant mené par les paralleles $SE$, $MN$, un plan: il formera dans celui de la base une ligne droite $Enm$; dans la surface Conique les côtés $SMm$, $SNn$; & dans le plan $SDa$ la ligne $SPp$ qui rencontre la base au point $p$, où les lignes $Em$, $Da$, s'entrecoupent, par lequel je mene dans le plan $SMN$ la ligne $HK$ parallele à $MN$. Cela posé, les triangles semblables $SPM$, $SpH$; $SPN$, $SPK$; $SPF$, $Spa$; $SPG$, $SPD$ donneront $MP \times PN . Hp \times pK :: \overline{SP}^2 . \overline{Sp}^2 :: FP \times PG . ap \times pD$, ou par la proprieté du cercle $mp \times pn$. Et partant on aura $MP \times PN . FP \times PG :: Hp \times pK . mp \times pn$. Mais la raison de $Hp \times pK$ à $mp \times pn$, est composée des deux raisons de $Hp$ à $pm$, & de $pK$ à $pn$, c'est à dire, à cause des triangles semblables $Hpm$, $SEm$, & $Kpn$, $SEn$, des deux raisons de $SE$ à $Em$, & de $SE$ à $En$; & par conséquent $Hp \times pK . mp \times pn$, ou $MP \times PN . FP \times PG :: \overline{SE}^2 . mE \times En$. Donc puisque le point $E$ ne change point en quelque endroit que l'on prenne le point $P$, & que tous les rectangles $Em \times En$ sont égaux

par la proprieté du cercle; il s'ensuit que $MP \times PN$ est à $FP \times PG$ en raison donnée. *Ce qu'il faloit démontrer.*

## COROLLAIRE.

FIG. 146. 277. DE-LA il est évident que si par un point quelconque $A$ d'une Parabole ou d'une Hyperbole $MAN$, l'on mene dans la Parabole un diametre $AB$, & dans l'Hyperbole une parallele $AB$ à l'une de ses Asymptotes; & que par deux points quelconques $P, Q$, de la ligne $AB$, l'on tire deux paralleles $MN, OR$, terminées par la Séction ou par les Séctions opposées; on aura $MP \times PN . OQ \times QR :: AP . AQ$.

Car menant le plan $SAB$ qui forme par sa rencontre avec la surface Conique les côtés $SD, Sa$, entre lesquels le côté $SD$ passera par le point où la Diréctrice touche la base lorsque la Séction est une Parabole, & par l'un des deux points où la Diréctrice la rencontre lorsque c'est une Hyperbole; & tirant dans le plan $SDa$ par les points $P, Q$, les droites $FG, TV$, paralleles à $Da$: il est clair par la Proposition précédente que $MP \times PN . FP \times PG :: OQ \times QR . TQ \times QV$. Et qu'ainsi $MP \times PN . OQ \times QR :: FP \times PG . TQ \times QV$. Or les parties $PG, QV$, des lignes $FG, TV$, sont égales entr'elles; puisque les lignes $AB, SD$, sont paralleles. Et partant $MP \times PN . OQ \times QR :: FP . TQ :: AP . AQ$. à cause des triangles semblables $APF$, $AQT$. Donc &c.

# CHAPITRE II.

## *De l'Ellipse en particulier.*

## DÉFINITIONS.

### 17.

FIG. 147. Si une ligne droite indéfinie $SZ$ qui est hors le plan d'un cercle $VXY$, se meut par un de ses points $X$ autour de la circonference de ce cercle toûjours paralle-

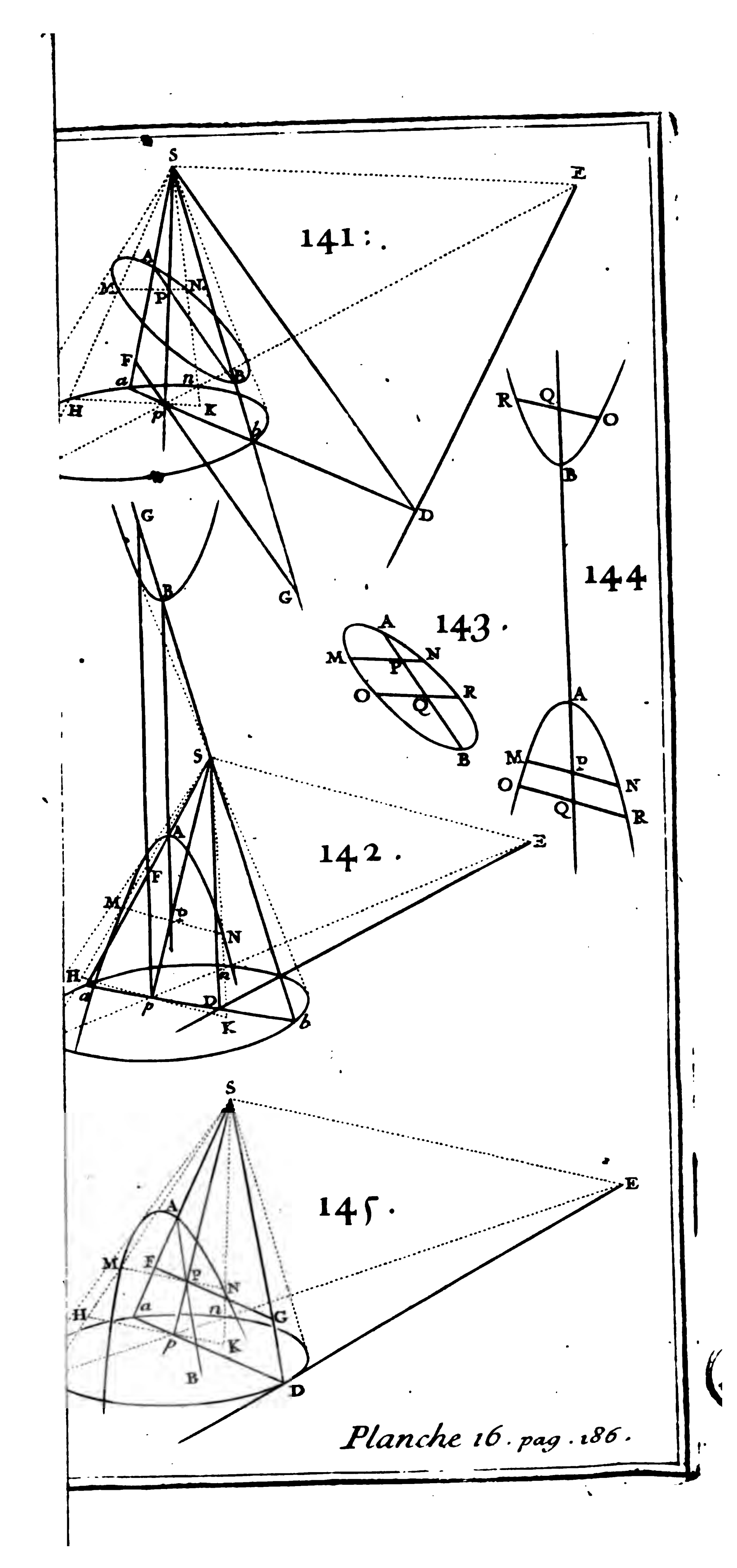



*Planche 16. pag. 186.*

lement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle soit revenuë au même point d'où elle étoit partie : la surface convexe décrite par cette ligne *SZ* dans ce mouvement, est appellée *Surface cylindrique.*

18.

Cette ligne *SZ* en chaque differente position, en est toûjours appellée le *Côté.*

19.

Le cercle *VXY*, la *Base.*

20.

La droite indéfinie *CO* menée du centre *C* de la base parallelement aux côtés, en est *l'Axe.*

21.

Le solide indéfini compris par la base *VXY* & par la Surface cylindrique, est appellé *Cylindre.*

22.

Si l'on coupe un Cylindre par un plan qui ne soit point parallele à ses côtés, ni au plan de sa base ; la ligne courbe *AMBN* formée par la rencontre de ce plan avec la Surface cylindrique, est appellée *Séction cylindrique.*

## PROPOSITION XI.

### Theorême.

278. SI *l'on coupe un cylindre par un plan* uxy *parallele au plan de la base* VXY ; *la Séction* vxy *sera un cercle qui aura pour centre le point* c *où ce plan rencontre l'axe, & pour rayon une ligne* cx *égale au rayon* CX *de la base.* FIG. 147.

Car menant par un point quelconque *x* de la Séction *vxy* un côté *xX* de la Surface cylindrique, il sera parallele * à l'axe *Cc* : c'est pourquoi on pourra faire passer un plan par ces deux lignes, qui formera par sa rencontre avec les deux plans paralleles *CVXY*, *cvxy*, deux droites *CX*, *cx*, paralleles entr'elles ; & qui seront de plus égales, puisqu'elles sont renfermées entre * *Def.* 20.

les paralleles *Cc*, *Xx*. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la Séction *vxy* qu'on prenne le point *x*, il s'ensuit que toutes les lignes *cx* menées du point *c*, aux points *x* de la Séction *vxy*, sont égales aux rayons *CX* de la base : c'est à dire que la Séction *vxy* sera la circonference d'un cercle, qui aura pour centre le point *c*, où le plan *vxy* rencontre l'axe du cylindre, & pour rayon une ligne *cx* égale au rayon *CX* de la base. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## PROPOSITION XII.

### Theorême.

FIG. 148. 279. TOUTE *Ellipse peut être regardée comme une Séction cylindrique.*

Ayant mené dans la base du cone où est produite un Ellipse quelconque, le diametre *ab* qui rencontre à angles droits au point *D* la Diréctrice *DE*, soient tirés sur la surface Conique les côtez *Sa*, *Sb*, qui rencontrent le plan de l'Ellipse aux points *A*, *B*; & dans les plans paralleles *AMB*, *SDE*, les droites *AB*, *SD*. Ayant pris *DF* moyenne proportionnelle entre *aD*, *Db*, & mené à *SF* les paralleles *AG*, *BH*, soit décrit sur le plan de la base du cone, un cercle qui ait pour diametre la ligne *GH*, & une surface cylindrique qui ait pour base ce cercle, & pour côtés les droites *AG*, *BH*. Cela posé.

Je dis que si par un point quelconque *P* de la ligne *AB*, l'on tire à la Diréctrice *DE*, une parallele qui rencontre la surface Conique en *M*, & la Cylindrique en *O*; les points *M*, *O*, se confondront l'un avec l'autre & n'en feront qu'un seul.

Car ayant fait passer par cette parallele un plan parallele au plan des deux bases tant du cone que du cylindre, il formera sur la surface Conique * un cercle *KML* dont le centre sera la commune Séction de ce

* Art. 259.

plan avec l'axe du cone, & sur la surface Cylindrique * un autre cercle $QMR$ dont le centre sera la commune Section de ce même plan avec l'axe du cylindre. Or le plan $Sab$ passe * par l'axe du cone, & le plan $AGHB$ (qui ne fait qu'un seul plan avec celui du triangle $Sab$) par l'axe * du cylindre; & par conséquent les lignes $KL$, $QR$, communes Sections de ces deux plans, avec le plan parallele (à la base) qui passe par la ligne $POM$, seront les diametres de ces deux cercles; & cette ligne $POM$ sera perpendiculaire à ces diametres, puisqu'elle est * parallele à $DE$ qui est * perpendiculaire à $ab$ & à $GH$ qui ne sont * qu'une même ligne, à laquelle les diametres $KL$ & $QR$ qui ne sont aussi qu'une même ligne, sont paralleles. De plus les lignes $AB$, $SD$, étant formées par les rencontres du même plan $Sba$ avec deux plans paralleles entr'eux; sçavoir, le plan $SDE$ & celui de l'Ellipse, seront aussi paralleles entr'elles. Ceci bien entendu,

* Art. 278.
* Def. 6.
* Def. 20.
* Hyp.
* Hyp.
* Hyp.

1°. Dans le cone, à cause du cercle $KML$, on aura $\overline{PM}^2 = KP \times PL$; & à cause des triangles semblables $APK$, $SDa$, & $PBL$, $SDb$, il vient $AP. KP :: SD. aD$. Et $PB. PL :: SD. Db$. D'où il suit que $AP \times PB. KP \times PL$ ou $\overline{PM}^2 :: \overline{SD}^2. aD \times Db$.

2°. Dans le cylindre, à cause du cercle $QOR$, on aura $\overline{PO}^2 = QP \times PR$; & à cause des triangles semblables $APQ$, $SDF$, & $PBR$, $SDF$, on formera ces deux proportions $AP. QP :: SD. DF$. Et $PB. PR :: SD. DF$. D'où il suit que $AP \times PB. QP \times QR$ ou $\overline{PO}^2 :: \overline{SD}^2. \overline{DF}^2$ ou $aD \times Db$. Donc $\overline{PM}^2 = \overline{PO}^2$, & $PM = PO$. Donc les points $M$, $O$, se confondent l'un avec l'autre, & n'en font qu'un seul. Donc, puisque cela arrive toûjours en quelque endroit de la ligne $AB$ que l'on prenne le point $P$, il s'ensuit que le plan de l'Ellipse rencontre les surfaces Coniques & Cylindriques dans les mêmes points, & qu'ainsi toute Ellipse peut toûjours être regardée comme une Section cylindrique.

AVERTISSEMENT.

Comme un Cylindre eſt moins compoſé qu'un cone, en ce que tous ſes côtés ſont paralleles entr'eux; au lieu que dans le cone ils aboutiſſent tous au même point qui en eſt le ſommet; on a pris le parti de regarder dans ce Chapitre, l'Ellipſe comme la Séction d'un cylindre. Ce qui fait qu'on peut démontrer tout à la fois les proprietés de tous ſes diametres; & que ſe ſervant enſuite dans le cone (comme l'on verra dans le Chapitre ſuivant) de plans Elliptiques au lieu de circulaires, on prouvera les mêmes choſes dans la Parabole & Hyperbole avec une extrême facilité.

## PROPOSITION XIII.

### Theorême.

FIG. 149. 280. Tous *les diametres d'une Ellipſe paſſent par un ſeul & unique point, qui eſt celui où le plan de l'Ellipſe rencontre l'axe du cylindre; & y ſont coupés en deux parties égales.*

*Et réciproquement toutes les lignes qui paſſent par ce point, & qui ſont terminées de part & d'autre par l'Ellipſe; y ſont coupées en deux également, & en ſont des diametres.*

On nomme ce point le *Centre* de l'Ellipſe.

1°. Soit $AB$ un diametre quelconque, & $C$ le point où le plan de l'Ellipſe rencontre l'axe du cylindre. Si l'on mene les lignes $Aa$, $Bb$, paralleles à l'axe $Cc$, il
*Def. 20. eſt clair * qu'elles ſeront des côtés de la ſurface cylindrique, & que les deux plans $FAa$, $GBb$, qui paſſent par ces deux lignes, & par les deux tangentes $AF$, $BG$, qui ſelon la définition des diametres, doivent être paralleles entr'elles, ſeront paralleles entr'eux, & toucheront la ſurface cylindrique dans les côtés $Aa$, $Bb$; d'où il ſuit que ces deux plans formeront dans le plan de la baſe deux lignes $af$, $bg$, paralleles entr'elles, &

qui toucheront la base aux points *a*, *b*, où les côtés *Aa*, *Bb*, la rencontrent. Or il est démontré dans les Elemens de Geometrie, que la ligne *ab* qui joint les points d'attouchement de deux tangentes paralleles *af*, *bg*, d'un cercle, passe par son centre *c*. Partant le plan *AabB* passera par l'axe *Cc* du cylindre; & la ligne *AB*, qui est la rencontre de ce plan avec celui de l'Ellipse, passera par le point *C* où cet axe rencontre le plan de l'Ellipse. De plus à cause des paralleles *Aa*, *Bb*, *Cc*; il est évident que le diametre *AB* de l'Ellipse, est divisé en deux également au point *C*; puisque le diametre *ab* du cercle l'est au point *c* qui en est le centre. *Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.*

2°. Si l'on mene par les extremités *A*, *B*, d'une ligne quelconque *AB*, qui passe par le point *C* où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe *Cc* du cylindre, les lignes *Aa*, *Bb*, paralleles à cet axe; il est clair selon la définition 17. de la surface cylindrique, qu'elles en seront des côtés, & que le plan *AabB* passera par l'axe *Cc* du cylindre. D'où l'on voit que la ligne *ab* commune Séction de ce plan & de celui de la base, passe par le centre *c* de la base; & qu'ainsi, puisqu'elle y est coupée en deux également, la ligne *AB* la sera aussi au point *C*. De plus les tangentes *af*, *bg*, qui passent par les extremités du diametre *ab* étant paralleles entr'elles; les plans touchans *faA*, *gbB*, seront paralleles entr'eux, & formeront dans le plan de l'Ellipse deux lignes paralleles *AF*, *BG*, qui la toucheront aux extremités *A*, *B*, de la ligne *AB*, qui en sera par conséquent un diametre. *C'est ce qu'il falloit démontrer en second lieu.*

## COROLLAIRE.

281. DE-LA il est évident que par un point donné sur le plan d'une Ellipse autre que le centre, on ne peut faire passer qu'un seul diametre.

# PROPOSITION XIV.

## Theorême.

FIG. 149. 282. *Toute ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *est coupée en deux également par ce diametre en un point* P.

*Et réciproquement si une ligne quelconque* MPN *terminée par une Ellipse & qui ne passe point par le centre* C, *est coupée en deux également en* P, *par un diametre* AB; *elle sera ordonnée de part & d'autre à ce diametre.*

Ayant mené par les points *A*, *B*, *M*, *N*, les côtés *Aa*, *Bb*, *Mm*, *Nn*, paralleles à l'axe *Cc* du cylindre, & qui rencontrent le plan de la base aux points *a*, *b*, *m*, *n*; la ligne *Pp* commune Section des deux plans *AabB*, *MmnN*, sera parallele aux côtés du cylindre, puisque tous les côtés sont paralleles entr'eux. De plus le plan *AabB* passera par l'axe *Cc* du cylindre, puisque le diametre *AB* passe par le point *C* où cet axe rencontre le plan de l'Ellipse; & il formera par conséquent dans le plan de la base une ligne *ab* qui passera par le centre *c*, c'est à dire, un diametre. Cela posé.

Puisque par la supposition la ligne *MPN* est ordonnée de part & d'autre au diametre *AB*, elle sera parallele aux tangentes *AF*, *BG*, qui passent par les extremités de ce diametre; & par conséquent les plans touchans *FAa*, *GBb*, seront paralleles au plan *MmnN*. Les lignes que ces trois plans forment dans le plan de la base; sçavoir les deux tangentes *af*, *bg*, & la ligne *mn*, seront donc paralleles entr'elles; & ainsi la ligne *mn* sera perpendiculaire au diametre *ab*, qui la divisera par conséquent en deux parties égales au point *p*. D'où il suit à cause des paralleles *Mm*, *Pp*, *Nn*, que la ligne *MN* sera aussi divisée en deux parties égales au point *P*.

Maintenant pour prouver la converse, on menera dans

dans le plan de l'Ellipse deux tangentes *AF*, *BG*, * paralleles à *MN*; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diametre *AB*, il est clair selon les définitions 13. & 14. que cette ligne *MN* sera ordonnée de part & d'autre à ce diametre, & par conséquent (selon ce qu'on vient de démontrer) coupée en deux également en *P* par ce même diametre. Or comme l'on ne peut mener par le point *P* * qu'un seul diametre, il s'ensuit que si une ligne *MN* terminée par une Ellipse, & qui ne passe point par le centre *C*, est coupée en deux également en *P* par un diametre *AB*, elle lui sera ordondonnée de part & d'autre.

* Art. 267.

* Art. 281.

## PROPOSITION XV.

### Theorême.

283. S'IL *y a dans une Ellipse deux diametres* AB, DE; *dont l'un d'eux* DE *soit parallele aux Tangentes* AF, BG, *qui passent par les extremités de l'autre* AB; *je dis réciproquement que le diametre* AB *sera parallele aux Tangentes qui passent par les extremités du diametre* DE. FIG. 149.

Les deux diametres *AB*, *DE*, sont appellés *Conjugués* l'un à l'autre.

Ayant mené par les points *A*, *B*, *D*, *E*, les côtés *Aa*, *Bb*, *Dd*, *Ee*, du cylindre, lesquels rencontrent le plan de la base aux points *a*, *b*, *d*, *e*; les plans *AabB*, *DdeE*, passeront par l'axe *Cc* du cylindre, puisque les lignes *AB*, *DE*, sont des diametres de l'Ellipse; & formeront par conséquent dans le plan de la base, deux diametres *ab*, *de*. Or le plan touchant *FAa* étant parallele au plan *DdeE*, formera dans le plan de la base une Tangente *af* parallele au diametre *de*, lequel diametre sera par conséquent perpendiculaire sur le diametre *ab*. Si donc l'on mene par l'une des extremités *d* du diametre *de* une Tangente *dh* au cercle, elle sera parallele au diametre *ab*, & le plan *hdD* parallele au

plan *AabB*: c'est pourquoi les communes Sections de ces deux plans avec le plan de l'Ellipse, sçavoir la Tangente *DH* & le diametre *AB*, sont paralleles entr'elles. On prouvera la même chose à l'égard de la Tangente qui passe par l'autre extremité *E* du diametre *DE*. Donc &c.

COROLLAIRE I.

284. De-là il est évident que s'il y a deux diametres conjugués *AB*, *DE*, dans une Ellipse; les deux plans qui passent par ces diametres & par l'axe *Cc* du cylindre, formeront dans le plan de la base deux diametres *ab*, *de*, qui seront perpendiculaires entr'eux: ce qui est réciproque.

COROLLAIRE II.

285. Il suit encore de cette Proposition que si par un point quelconque *P* d'un diametre *AB*, on mene une ordonnée *MPN* de part & d'autre, elle sera parallele au diametre *DE* qui lui est conjugué; & qu'ainsi
* Art. 275. on aura * $MP \times PN$ ou $\overline{PM}^2 . DC \times CE$ ou $\overline{DC}^2 ::$ $AP \times PB . AC \times CB$ ou $\overline{AC}^2$. Ce qui donne $\overline{PM}^2 . AP \times PB :: \overline{DC}^2 . \overline{AC}^2 :: 4\overline{DC}^2$ ou $\overline{DE}^2 . 4\overline{AC}^2$ ou $\overline{AB}^2$. C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque *MP* à un diametre *AB*, est au réctangle $AP \times PB$ fait des parties de ce diametre, comme le quarré du diametre *DE* qui lui est conjugué, est au quarré du diametre *AB*.

PROPOSITION XVI.

Theorême.

Fig. 150. 286. *Si par un point quelconque* M *d'une Ellipse* AMB, *l'on mene une Tangente* FMG *qui rencontre aux points* F, G, *deux autres Tangentes* AF, BG, *paralleles entr'elles: je dis que* FM. MG :: AF. BG.

Ayant mené par les points d'attouchemens *A*, *B*, *M*, les côtés *Aa*, *Bb*, *Mm*, du cylindre, & fait passer par ces côtés & par les Tangentes *AF*, *BG*, *FG*, les trois plans *FAa*, *GBb*, *FMm*, ou *GMm*; il est clair que les communes Sections *Ff*, *Gg*, des deux premiers plans avec le troisiéme, seront paralleles tant entr'elles, qu'avec les côtés du cylindre; car les deux plans *FMm*, *FAa*, passant par les côtés *Mm*, *Aa*, qui sont paralleles entr'eux, leur commune Section *Ff* sera parallele à ces côtés; & par la même raison *Gg* commune Section des deux plans *GBb*, *GMm*, sera parallele aux côtés *Bb*, *Mm*. De plus les lignes *af*, *bg*, que forment les plans touchans paralleles *FAa*, *GBb*, dans le plan de la base, en seront des Tangentes paralleles; les parties *fm*, *mg*, de la troisiéme Tangente formée dans le plan de la base par le troisiéme plan touchant *FMm*, ou *GMm*, seront égales (par la proprieté du cercle) aux Tangentes *af*, *bg*; sçavoir, *fm* à *fa*, & *mg* à *gb*. Cela posé.

A cause des lignes *Aa*, *Ff*, *Mm*, *Gg*, *Bb*; & *AF*, *BG*; & *af*, *bg*, qui sont paralleles entr'elles, on aura *FM*. *MG* :: *fm* ou *fa*. *mg* ou *gb* :: *FA*. *GB*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

287. SI l'on mene par les points d'attouchement *A*, *B*, des deux Tangentes paralleles entr'elles *AF*, *BG*, un diametre *AB* qui rencontre en *T* la Tangente *FMG*, & qu'on tire l'ordonnée *MP* à ce diametre: il est évident que *AP*. *PB* :: *FM*. *MG* :: *AF*. *BG* :: *AT*. *BT*. Et qu'ainsi *PB*—*AP*. *PB* :: *BT*—*AT* ou *AB*. *BT*.

COROLLAIRE II.

288. DE-LA on tire la maniére suivante de mener d'un point donné *M* sur une Ellipse la Tangente *MT*, un diametre *AB* étant donné avec la position de ses ordonnées.

De l'une des extremités $B$ du diametre $AB$, ſoit tirée au point donné $M$ la droite $BM$. Puis ayant mené l'ordonnée $MP$ au diametre $AB$, & pris ſur ce diametre du côté de $B$ la partie $PH$ égale à $PA$, ſoit tirée $HK$ parallele à $PM$, rencontrant la ligne $BM$ en $K$, par ou & par l'autre extremité $A$ ſoit menée $AK$. Soit enfin tirée $MT$ parallele à $AK$, elle ſera la Tangente qu'on cherche.

Car à cauſe des paralleles $MP$, $HK$, & $AK$, $MT$, l'on aura $BP. PH.$ ou $PA :: PM. MK :: BT. TA.$

## COROLLAIRE III.

289. S'il y a dans une Ellipſe deux Tangentes $MT$, $NT$, qui ſe rencontrent en un point $T$; je dis que le diametre $AB$ qui paſſe par le point $P$ milieu de la ligne $MN$ qui joint les deux points d'attouchement, paſſera auſſi par le point $T$. Car $PN$ eſt ordonnée au diametre $AB$ de même que $PM$; & par conſéquent * les Tangentes $MT$, $NT$, iront chacune rencontrer ce diametre en un point $T$, tel que $PB - AP. PB :: AB. BT$; c'eſt à dire dans le même point.

* Art. 287.

## COROLLAIRE IV.

290. Si l'on joint dans une Ellipſe les points d'attouchemens $M$, $N$, de deux Tangentes $MF$, $NL$, par une ligne droite $MN$; & qu'il y ait une troiſiéme Tangente $FAL$ parallele à $MN$: je dis que les parties $FA$, $AL$ de cette derniere Tangente, priſes entre ſon point d'attouchement $A$ & les deux premieres, ſeront égales entr'elles. Car ayant mené par le point d'attouchement $A$ le diametre $AB$, il eſt clair que la ligne $MN$ eſt ordonnée de part & d'autre à ce diametre, puiſqu'elle eſt parallele à la Tangente $FL$ qui paſſe par ſon extremité $A$; & qu'ainſi il la coupe par le milieu en $P$, & paſſe * par conſéquent par le point de rencontre

* Art. 289.

*T* des deux Tangentes *MF*, *NL*; où bien il leur sera parallele, si la ligne *MN* est * un diametre. Or il est visible en l'un & l'autre cas, que *FL* sera divisé en deux partie égales au point *A* par le diametre *AB*; puisque *MN* l'est en *P* par ce même diametre. *Art. 283.

## CHAPITRE III.

## *De la Parabole & de l'Hyperbole en particulier.*

### PROPOSITION XVII.

### Theorême.

291. DANS *une Parabole toute ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *est coupée en deux également par ce diametre au point* P: *ce qui est réciproque.* FIG. 151.

Ayant fait passer par la ligne *MN* un plan Elliptique, il formera dans le plan touchant *SDE* parallele au plan Parabolique, une Tangente *DE* parallele à *MN*. De plus le plan *SAF* mené par le Sommet *S* du cone, & par la Tangente *AF* qui passe par l'origine *A* du diametre *AB*, formera dans le plan Elliptique une Tangente *af*; & la ligne *Da* qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes *DE*, *af*, passera par le point *P*; puisque le diametre *AB* est parallele au côté touchant *SD*. Cela posé.

Puisque par la supposition * les deux lignes *AF*, *MN*, sont paralleles entr'elles; il s'ensuit que la Tangente *af*, qui est la commune Séction de deux plans qui passent par ces deux lignes, sera parallele à *MN*; & par conséquent à *DE*. D'où l'on voit * que la ligne *Da*, qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes paralleles *DE*, *af*, est un diametre de l'Ellipse; & qu'ainsi la ligne *MN* qui est parallele à ces Tangentes & terminée par l'Ellipse, sera * divisée en deux également au point *P*. *Def. 14. *Def. 15. *Art. 281.

Maintenant pour prouver la converse, on menera

* Art. 267. dans le plan de la Parabole * une Tangente $AF$ parallele à la ligne $MN$; & ayant tiré par le point d'attouchement $A$ un diametre $AB$, il aura pour ordonnée
* Def. 14. de part & d'autre * la ligne $MN$, qu'il divisera par conséquent en deux parties égales au point $P$ selon ce qu'on vient de démontrer. Or comme il n'y a qu'un seul dia-
* Art. 268. metre * qui puisse passer par le point de milieu $P$ de la ligne $MN$, il s'ensuit &c.

### COROLLAIRE.

292. DE-LA il est évident que si l'on mene par deux points quelconques $P$, $Q$, d'un diametre $AB$ deux ordonnées de part & d'autre $MPN$, $OQR$; on aura
* Art. 277. toûjours * $MP \times PN$ ou $\overline{PM}^2 . OQ \times QR$ ou $\overline{QO}^2 :: AP . AQ$. C'est à dire que les quarrés de deux ordonnées quelconques $PM$, $QO$, à un diametre $AB$, seront toûjours entr'eux, comme les parties $AP$, $AQ$, de ce diametre prises depuis son origine $A$ jusqu'à ces mêmes ordonnées.

## PROPOSITION XVIII.

### Theorême.

FIG. 151. 293. SI *par un point quelconque* M *d'une Parabole, l'on mene une ordonnée* MP *à tel de ses diametres* AB *qu'on voudra, & une Tangente* MT *qui rencontre en* T *ce diametre prolongé au delà de son origine* A : *je dis que ses parties* AP, AT, *seront égales.*

La même préparation étant faite que dans la Proposition précédente, soit de plus mené par le Sommet $S$ du cone & par la Tangente $MT$, le plan touchant $STM$ qui formera dans le plan Elliptique la Tangente $MH$, laquelle rencontrera le diametre $Da$ de l'Ellipse en un point $H$ par ou passera la ligne $ST$; & soit enfin tirée la droite $TG$ parallele à $SA$. Ceci bien en-
* Art. 287. tendu, on aura * $DH . Ha :: DP . Pa$, & (*alternando*)

*DH*. *DP* :: *Ha*. *Pa*. Mais à cause des paralleles *AB*, *SD*, & *SA*, *TG*; il est clair que *DH*. *DP* :: *SH*. *ST* :: *Ha*. *Ga*. Donc *Ha*. *Pa* :: *Ha*. *Ga*. Donc aussi *Pa* = *Ga*; & par conséquent *AP* = *AT*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## PROPOSITION XIX.

### Theorême.

294. DANS *les Hyperboles opposées tout diametre* AB *passe par le point d'intersection* C *des deux asymptotes, & y est coupé en deux également : ce qui est réciproque.* FIG. 152.

On nommera ce point, *Centre.*

Soit *HSh* une des deux communes Sections du plan parallele au plan Hyperbolique, & des deux surfaces Coniques opposées; & soit l'Asymptote *FG* formée par la rencontre du plan Hyperbolique avec celui qui touche ces deux surfaces en cette ligne *HSh*. Soient menées par les Tangentes paralleles *AF*, *BG*, qui passent par les extremités du diametre *AB*, & qui rencontrent l'Asymptote *FG* aux points *F*, *G*, deux plans Elliptiques paralleles; ils formeront dans le plan touchant qui passe par le côté *HSh*, les Tangentes paralleles *FH*, *Ghf*, & dans le plan touchant *SAF* les Tangentes paralleles *AF*, *af*.

Cela posé, les lignes paralleles *FH*, *Gh*, étant renfermées entre les deux autres paralleles *FG*, *Hh*, seront égales entr'elles; & les triangles semblables *SHF*, *Shf*, & *SFA*, *Sfa*, donneront cette proportion, *HF*. *hf* :: *SF*. *sf* :: *FA*. *fa*. Et partant *HF*. *FA* :: *hf*. *fa* ::* *hG*. *GB*. Donc puisque *HF* = *hG*, il s'ensuit que *AF* = *BG*; & à cause des triangles semblables *ACF*, *BCG*, que *AC* = *CB*: c'est à dire que l'Asymptote *FG* passe par le point de milieu *C* du diametre *AB*. On prouvera de même que l'autre Asymptote passera encore par le point de milieu *C* du diametre *AB*; d'où l'on voit que le diametre *AB* passe par le

* Art. 286.

point d'interſéction *C* des deux Aſymptotes, & y eſt coupé en deux parties égales.

Soit à preſent une ligne *AB* qui paſſant par le point d'interſéction *C* des deux Aſymptotes, rencontre les Hyperboles oppoſées aux points *A*, *B*. Si l'on mene par le point *A* la Tangente *AF*, & à l'Hyperbole op-
* *Art.* 267. poſée une Tangente *DG* * parallele à *AF*; il eſt clair parce qu'on vient de prouver que la ligne *AD* qui joint les point d'attouchemens de ces deux Tangentes étant un diametre, paſſera par le point d'interſéction *C* des Aſymptotes. Elle ſe confondra donc avec la ligne
* *Hyp.* *AB* qui paſſe auſſi * par les deux mêmes points *A*, *C*: c'eſt à dire que le point *D* tombera ſur le point *B*. C'eſt pourquoi cette ligne *AB* ſera un diametre, & partant coupée en deux parties égales au point *C*.

## COROLLAIRE.

295. DE-LA on voit que d'un point donné au dedans d'une Hyperbole, on ne peut mener qu'un ſeul diametre; puiſqu'il n'y a qu'une ſeule ligne qui puiſſe paſſer par ce point, & par le centre.

## PROPOSITION XX.

### Theorême.

FIG. 153. 296. DANS *les Hyperboles oppoſées toute ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *eſt coupée en deux également par ce diametre au point* P: *ce qui eſt reciproque.*

Ayant fait paſſer par la ligne *MN* un plan Elliptique, il formera dans les deux plans touchans *SAF*, *SBG*, deux Tangentes *af*, *bg*; & la ligne *ab* qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes, étant la commune Séction du plan Elliptique & du plan *SAB*, paſſera par le point *P*. Or puiſque par la ſuppoſition

les

les deux lignes $AF$. $MN$, sont paralleles, il s'ensuit que la ligne $af$ qui est la commune Séction de deux plans, qui passent par ces deux lignes, sera parallele à $MN$. Par la même raison la Tangente $bg$ commune Séction du plan Elliptique & du plan touchant $SBG$, lesquels passent par les deux paralleles $MN$, $BG$, sera parallele à $MN$. Les deux Tangentes $af$, $bg$, seront donc paralleles entr'elles: d'où il suit que la ligne $ab$ * est un diametre de l'Ellipse; & qu'ainsi la ligne $MN$ * est divisée en deux parties égales au point $P$. * Def. 13. * Art. 282.

Maintenant pour prouver la converse, on menera dans le plan des Hyperboles * deux Tangentes $AF$, $BG$, paralleles à la ligne $MN$ terminée par l'Hyperbole; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diametre $AB$, il est clair selon la Définition quatorziéme, que ce diametre aura pour ordonnée de part & d'autre la ligne $MN$; & qu'ainsi il la coupera selon ce qu'on le vient de démontrer, en deux parties égales au point $P$. Or comme il n'y a qu'un seul diametre * qui puisse passer par ce point, il s'ensuit que si une ligne $MN$ terminée par une Hyperbole, est coupée en deux également en $P$ par un diametre $AB$, elle sera ordonnée de part & d'autre à ce diametre. * Art. 267. * Art. 295.

### COROLLAIRE.

297. DE-LA il est évident que si l'on mene deux ordonnées de part & d'autre $MPN$, $OQR$, à un diametre $AB$, on aura toûjours * $MP \times PN$. ou $\overline{PM}^2$. $OQ \times QR$ ou $\overline{QO}^2 :: AP \times PB$. $AQ \times QB$. C'est à dire &c. * Art. 275.

## PROPOSITION XXI.

### Theorême.

298. *Si par un point quelconque* M *d'une Hyperbole, l'on mene une Tangente* MFG *qui rencontre deux autres Tangentes paralleles* AF, BG, *aux points* F, G: *je dis que* MF. MG :: AF. BG. FIG. 154.

Ayant mené deux plans Elliptiques paralleles qui passent par les Tangentes *AF*, *BG*; ils formeront dans le plan touchant *SMG* deux Tangentes *HF*, *hG*, paralleles entr'elles; & le plan Elliptique qui passe par *BG*, formera dans le plan touchant *SAF*, une Tangente *af* qui rencontrera la Tangente *hG* au point *f*, où la ligne *FS* rencontre ce plan Elliptique. Cela posé, les Tangentes *af*, *BG*, seront paralleles entr'elles; puisqu'elles le sont
* Art. 268. chacune à la Tangente *AF*: & partant * on aura *BG*. *Gh* :: *af*. *fh* (à cause des triangles semblables *Shf*, *SHF*, & *Saf*, *SAF*,) :: *AF*. *FH*. Donc *BG*. *AF* :: *Gh*. *FH* (à cause des triangles semblables *MGh*, *MFH*,) :: *MG*. *MF*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Il est visible qu'on peut tirer de cette Proposition les mêmes Corollaires, que dans l'Ellipse art. 287. 288. 289. & 290. c'est pourquoi je ne m'amuserai point à les reeter r.

## PROPOSITION XXII.

### Theorême.

Fig. 155. 299. Si *une ligne droite* FG *terminée par les Asymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point* A; *je dis que cette ligne droite y sera coupée en deux parties égales.*

Soient menés par le Sommet *S* du cone, & par les deux Asymptotes *CF*, *CG*, deux plans, lesquels toucheront
* Def. 16. * la surface Conique dans les côtés *SM*, *SN*, où le plan *MSN* parallele au plan Hyperbolique la rencontre. Soit mené un plan Elliptique qui passe par la droite *FG*; il formera dans les deux plans touchans deux Tangentes *MF*, *NG*, & dans le plan *MSN* une ligne droite *MN* parallele à *FG*, & qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes. Cela posé, il est
* Art. 290. visible que la ligne *FG* * est coupée en deux parties égales au point *A*; puisqu'elle touche dans ce point l'Ellipse, aussi-bien que l'Hyperbole.

COROLLAIRE I.

300. Comme il ne peut y avoir qu'une seule ligne *FG* qui passant par un point donné *A* au dedans d'un angle *FCG*, & étant terminée par ses côtés, soit coupée en deux également par ce point *A*; il s'ensuit que si une ligne droite *FG* terminée par les Asymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point *A* qui la divise cette droite *FG* deux parties égales, elle touchera l'Hyperbole en ce point.

COROLLAIRE II.

301. De-là on voit que pour mener d'un point donné *A* sur une Hyperbole dont les Asymptotes *CF*, *CG*, sont données, une Tangente *FAG*; il n'y a qu'à tirer la ligne *AD* parallele à l'une des Asymptotes *CG*, & terminée par l'autre; & ayant pris la partie *DF* égale à *CD*, tirer la ligne *FAG*: elle sera la Tangente cherchée. Car à cause des triangles semblables *FCG*, *FDA*, la ligne *FG* sera coupée par le milieu en *A*; puisque* *CF* l'est en *D*. * *Hyp.*

COROLLAIRE III.

302. Si l'on joint deux points quelconques *M*, *N*, d'une Hyperbole *MAN* par une ligne droite qui rencontre les Asymptotes aux points *H*, *K*; les deux parties *MH*, *NK*, de cette droite renfermées entre l'Hyperbole & les Asymptotes, seront égales entr'elles. Car ayant mené par le point *P* milieu de *MN*, le diametre *CP*; & par le point *A* où ce diametre rencontre l'Hyperbole, la ligne *FG* parallele à *MN*, & terminée par les Asymptotes: il est clair * que cette ligne *FG* sera Tangente en *A*; & par conséquent * divisée en deux parties égales en ce point. D'où il est clair, à cause des triangles semblables *CAF*, *CPH*, & *CAG*, *CPK*, que *PH*=*PK*; & par conséquent *MH*=*NK*. FIG. 156. *Art. 296. *Art. 299.

## COROLLAIRE IV.

FIG. 157. 303. Si d'un point donné $A$ sur une Hyperbole, l'on tire deux droites $AF, AG$, terminées par ses Asymptotes; & que d'un autre point quelconque $M$ de la même Hyperbole, ou de son opposée, on tire deux autres droites $MH, MK$, terminée aussi par ses Asymptotes, & paralleles aux deux premieres $AF, AG$: je dis que $FA \times AG = HM \times MK$.

Car 1°. Lorsque les deux points $A, M$, tombent sur la même Hyperbole; ayant joint ces deux points $A, M$, par une ligne droite qui rencontre les Asymptotes en $P$ & $Q$, les triangles semblables $PAF$, $PMH$, & $QMK$, $QAG$, donneront ces deux proportions, $AF. MH :: AP. MP$ * $:: MQ. AQ :: MK. AG$. ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, $FA \times AG = HM \times MK$.

* Art. 302.

2°. Lorsque les points $A, M$, tombent sur les deux Hyperboles opposées; ayant mené par le point donné $A$ & par le centre $C$, le diametre $AB$, & tiré les droites $BD$, $BE$, paralleles à $AF$, $AG$, & terminées par les mêmes Asymptotes; il est clair que les triangles $CAF$, $CBD$, & $CAG$, $CBE$, seront semblables & de plus égaux entr'eux, puisque * $CA = CB$. C'est pourquoi $BD = AF$, & $BE = AG$; & partant $DB \times BE = FA \times AG$. Or selon le cas précédent $KM \times MH = DB \times BE$. Donc aussi $FA \times AG = KM \times MH$.

* Art. 294.

### AVERTISSEMENT.

Je laisse les autres proprietés des Asymptotes, & des Diametres conjugués, parcequ'elles se tirent de celles-ci sur le plan, comme l'on a fait dans le troisiéme Livre; mon dessein n'étant ici que de faire voir de quelle utilité peut être la consideration du Solide, pour démontrer tout à la fois & sans aucun calcul, les pro-

prietés de tous les Diametres, des Tangentes, & des Asymptotes; d'où dépendent toutes les autres. C'est ce que je crois avoir executé d'une maniére fort aisée, & entierement nouvelle; puisque je ne me suis point servi de lignes coupées harmoniquement, comme ont fait les Geometres Modernes aprés M^rs. *Paschal* & *Desargues*; ce qui les a obligés d'avoir recours à un grand nombre de Lemmes, dont les démonstrations seules me paroissent aussi longues que celles de tout ce Livre.



# LIVRE SEPTIE'ME.

## *Des lieux Geometriques.*

### DE'FINITION I.

FIG. 158. 159. SOIENT deux droites inconnuës & indéterminées $AP$, $PM$, qui fassent entr'elles un angle $APM$ donné ou pris à volonté ; & dont l'une $AP$ que j'appellerai toûjours $x$, ait un commencement fixe au point $A$, & s'étende indéfiniment le long d'une ligne droite donnée de position ; & l'autre $PM$ que je nommerai $y$, en change continuellement, & soit toûjours parallele à elle-même : c'est à dire que toutes les droites $PM$ doivent être paralleles entr'elles. Soit de plus une équation qui ne renferme que ces deux inconnuës $x$ & $y$ mêlées avec des connuës, & qui exprime la relation de chaque indéterminée $AP$ $(x)$ à sa correspondante $PM$ $(y)$. La ligne droite ou courbe qui passe par les extremités de toutes les valeurs de $y$, c'est à dire, par tous les points $M$, est appellée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation.

FIG. 158. Supposons, par exemple, que l'équation $y = \frac{bx}{a}$ doive exprimer toûjours la relation de $AP$ $(x)$ à $PM$ $(y)$ qui font entr'elles un angle donné ou pris à volonté $APM$. Ayant pris sur la ligne $AP$ la partie $AB = a$, & de $B$ mené $BE = b$ parallele à $PM$ & du même côté ; la droite indéfinie $AE$ sera nommée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$ la droite $MP$ parallele à $BE$, les triangles semblables $ABE$, $APM$, donneront toûjours cette proportion, $AB$ $(a)$. $BE$ $(b)$ :: $AP$ $(x)$. $PM$ $(y) = \frac{bx}{a}$. Et partant la droite $AE$ est le lieu de tous les points $M$.

De même si $yy = aa - xx$ exprime la relation de *AP* à *PM*, & que l'angle *APM* soit droit ; la circonference d'un cercle qui a pour rayon la droite $AB = a$ prise sur la ligne *AP*, sera appellée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ses points quelconques *M*, la perpendiculaire *MP* ($y$), on aura toûjours par la proprieté du cercle, $\overline{PM}^2 (yy) = DP \times PB (aa - xx)$ en prenant *BD* pour le diametre de ce cercle. D'où l'on voit que sa circonfernce est le lieu de tous les points *M*. FIG. 159.

REMARQUE.

304. Si aprés avoir supposé que les *PM* tendent vers un certain côté de la ligne *AB*, comme vers *Q*, on suppose ensuite qu'elles tendent vers le côté opposé, comme vers *G* ; il faut remarquer que leurs valeurs deviennent négatives de positives qu'elles étoient, & qu'ainsi on a pourlors $PM = -y$. De même si aprés avoir supposé que les points *P* tombent d'un certain côté par rapport au point *A*, comme du côté de *B*, on suppose ensuite qu'ils tombent du côté opposé, comme vers *D* ; les *AP* deviendront négatives de positives qu'elles étoient, & on aura par conséquent $AP = -x$. Les positives de ces valeurs s'appellent aussi Valeurs *vraies* ; & les négatives, Valeurs *fausses*. Or un lieu Geometrique doit passer par les extremités de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë $y$, qui répondent aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë $x$. Si donc l'on mene la droite *QAG* parallele à *PM*, un lieu Geometrique pourra se trouver dans les quatre angles *BAQ*, *BAG*, *GAD*, *DAQ*, comme dans le second exemple (*fig.* 159.), ou seulement dans quelques-uns de ces angles comme dans le premier (*fig.* 158.). Car supposé dans le second exemple, qu'on fasse d'abord $AP = x$, & $PM = y$, en prenant le point *M* sur le quart *QB* de la circonference, si ensuite le point *M* FIG. 158. 159.

eſt pris ſur le quart $GB$, on aura $AP=x$, & $PM=-y$; s'il eſt pris ſur $DG$, on aura $AP=-x$, & $PM=-y$; & enfin s'il eſt pris ſur $DQ$, on aura $AP=-x$, & $PM=y$; & il viendra toûjours dans tous ces cas par la proprieté du cercle, la même équation $yy=aa-xx$; parce que les quarrés de $\pm y$ & de $\pm x$ ſont les mêmes dans tous ces cas, ſçavoir $yy$ & $xx$. De même dans le premier exemple, ſi en prenant d'abord le point $M$ du côté de $E$ ſur $AE$, dans l'angle $QAP$, on fait $AP=x$, & $PM=y$; Ce point $M$ pris enſuite ſur $EA$ prolongée du côté de $A$ dans l'angle $GAD$, donnera $AP=-x$, & $PM=-y$; & à cauſe des triangles ſemblables $ABE$, $APM$, on formera cette proportion $AB\,(a).\,BE\,(b)::AP\,(-x).\,PM\,(-y)=-\frac{bx}{a}$; & partant $y=\frac{bx}{a}$, qui eſt la même équation que l'on trouve en ſuppoſant que le point $M$ tombe dans l'angle $BAQ$.

## AVERTISSEMENT.

Lorſqu'il s'agira dans la ſuite de conſtruire le lieu d'une équation donnée, on ſuppoſera toûjours que $AP$ $(x)$ & $PM$ $(y)$ ſoient poſitives, c'eſt à dire que tous les points $M$ tombent dans le même angle $BAQ$. Et on prendra pour le lieu de l'équation donnée la portion du lieu qui ſera renfermée dans cet angle.

## DE'FINITION II.

Les anciens Geometres ont appellé *Lieux plans*, ceux qui ſont des lignes droites, ou des cercles; *Solides*, ceux qui ſont des Paraboles, des Ellipſes, ou des Hyperboles. Mais les Modernes diſtribuënt les lieux Geometriques en differens degrés: ils comprennent ſous le premier tous ceux où les inconnuës $x$ & $y$ n'ont qu'une dimenſion dans leurs équations; ſous le ſecond, tous ceux où elles n'en ont que deux; ſous le troiſiéme, tous ceux où elles n'en ont que trois; & ainſi de ſuite. Où l'on doit

doit obſerver que les inconnuës $x$ & $y$ ne ſe doivent point multiplier l'une l'autre dans le premier degré ; qu'elles ne doivent faire au plus enſemble qu'un produit de deux dimenſions $xy$ dans le ſecond, un de trois $xxy$ ou $xyy$ dans le troiſiéme, &c.

## DÉFINITION III.

Les termes de l'équation d'un lieu, ſont regardés comme differens entr'eux lorſque l'une ou l'autre des inconnuës $x$ & $y$, ou toutes les deux jointes enſemble s'y trouvent avec differentes dimenſions. Ainſi dans le premier degré ſi l'on propoſe l'équation $y - \frac{bx}{a} + c = o$, les termes $y$, $-\frac{bx}{a}$, $c$, ſeront differens ; & de même dans le ſecond, ſi l'on propoſoit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy - \frac{fxx}{a} + gx + hx - bh + ll = o$, les termes $yy$, $\frac{2bxy}{a}$, $-2cy$, $-\frac{fxx}{a}$, $gx + hx$, $-bh + ll$, ſeroient chacun differens.

## AVERTISSEMENT.

Je n'expliquerai ici en détail que les lieux du premier & du ſecond degré ; ce que j'en dirai donnera beaucoup d'ouverture pour conſtruire des lieux plus compoſés dans les cas particuliers qui ſe peuvent rencontrer : on en trouvera même quelques exemples dans la ſuite. Mon deſſein eſt donc de donner dans ce Livre une methode générale pour conſtruire les lieux du premier & du ſecond degré, leurs équations étant données ; & de faire voir que le premier ne renferme que la ligne droite ; & que le ſecond ne renferme de même que la Parabole, l'Ellipſe & le Cercle, l'Hyperbole & les Hyperboles oppoſées.

## DEMANDE.

305. ON demande qu'on puisse réduire sous une fraction simple & abregée, toute quantité litterale donnée, si composée qu'elle puisse être.

On demande par exemple, 1°. Qu'on puisse prendre une fraction simple $\frac{b}{a} = \frac{cc+ff}{af+fc} + \frac{aa}{gg}$, où les lettres $a$, $c$, $f$, $g$, marquent des lignes données. 2°. Qu'on puisse trouver une seule ligne droite $s = \frac{age - bce}{bb+af}$, où les lignes droites $a$, $b$, $c$, $e$, $f$, $g$, sont données. 3°. Qu'on puisse trouver un quarré $tt = ss - \frac{ccee - eehh}{bb+af}$, où les lignes $a$, $b$, $c$, $e$, $f$, $h$, $s$, sont données; de sorte qu'on ait son côté $t = \sqrt{ss - \frac{ccee - eehh}{bb+af}}$. On enseignera au commencement du huitiéme Livre comment cela se fait.

## PROPOSITION I.

### Problême.

306. CONSTRUIRE *tout lieu du premier degré, son équation étant donnée.*

Lorsque les inconnuës $x$ & $y$ n'ont qu'une dimension dans l'équation proposée, & que leur produit $xy$ ne s'y rencontre point; le lieu de cette équation sera toûjours une ligne droite, & on la réduira à l'une des quatre formules suivantes.

1°. $y = \frac{bx}{a}$, 2°. $y = \frac{bx}{a} + c$, 3°. $y = \frac{bx}{a} - c$, 4°. $y = c - \frac{bx}{a}$, dans lesquelles on suppose que l'inconnuë $y$ soit délivrée de fractions, & que la fraction qui multiplie l'au-
* Art. 305. tre inconnuë $x$ soit réduite * sous cette expression $\frac{b}{a}$, & tous les termes connus sous cette autre $c$.

Les mêmes choses étant posées que dans la définition premiere, on construira les lieux des trois dernie-

res formules de la maniere qui suit ; car pour le lieu de la premiere, on l'a déja construit dans cette définition.

Pour construire le lieu de la seconde formule $y = \frac{bx}{a} + c$, on prendra sur la ligne $AP$ la partie $AB = a$; & ayant mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à $PM$ & du même côté, on tirera la ligne $AE$ indéfinie du côté de $E$, & la droite indéfinie $DM$ parallele à $AE$. Je dis que cette ligne $DM$ renfermée dans l'angle $PAQ$ fait par la ligne $AP$ & par la droite $AQ$ menée parallelement à $PM$ & du même côté, sera le lieu de cette équation ou formule. Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$ la ligne $MP$ parallele à $AQ$ & qui rencontre $AE$ en $F$; les triangles semblables $ABE$, $APF$, donneront $AB\,(a)\,.\,BE\,(b) :: AP\,(x)\,.\,PF = \frac{bx}{a}$. Et partant $PM\,(y) = PF\,(\frac{bx}{a}) + FM\,(c)$. FIG. 160.

Le lieu de la troisiéme formule $y = \frac{bx}{a} - c$ se construit en cette sorte. Ayant pris $AB = a$, & mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à $PM$; sçavoir, $BE$ du même côté que $AQ$, & $AD$ du côté opposé; on tirera par les points $A$, $E$, la droite $AE$ indéfinie du côté de $E$, & par le point $D$ la ligne $DM$ parallele à $AE$, & qui rencontre $AP$ en $G$. Je dis que la droite indéfinie $GM$ renfermée dans l'angle $PAQ$, sera le lieu qu'on cherche. Car on aura toûjours $PM\,(y) = PF\,(\frac{bx}{a}) - FM\,(c)$. FIG. 161.

Enfin pour avoir le lieu de la quatriéme formule $y = c - \frac{bx}{a}$. Ayant pris sur $AP$ la partie $AB = a$, & mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à $PM$; sçavoir, $BE$ du côté opposé, & $AD$ du même côté que $AQ$; on tirera par les points $A$, $E$, la ligne $AE$ indéfinie du côté de $E$, & par le point $D$ la ligne $DM$ parallele à $AE$, & qui rencontre en $G$ la ligne $AP$. Je dis que la droite $DG$ renfermée dans l'angle $PAQ$, sera le lieu cherché. Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$ la ligne FIG. 162.

$MP$ parallele à $AQ$, & qui rencontre $AE$ en $F$, on aura toûjours $PM\ (y) = FM\ (c) - PF\ (\frac{bx}{a})$.

Si l'inconnuë $x$ n'est multipliée par aucune fraction, les quatre formules précédentes se changeront en celles-ci.

1°. $y = x$, 2°. $y = x + c$, 3°. $y = x - c$, 4°. $y = c - x$, lesquelles se construisent de la même maniere, en observant de prendre la droite $BE$ égale à $AB$ que l'on prend de telle grandeur qu'on veut.

## REMARQUE.

307. IL peut arriver que l'équation soit un lieu à la ligne droite, quoiqu'elle ne renferme qu'une des inconnuës $x$ ou $y$; ce qui donne encore ces deux nouvelles formules, $y = c$, & $x = c$.

FIG. 163. Pour construire la premiere formule $y = c$. Les mêmes choses étant toûjours posées que dans la définition premiere; on menera par le point fixe $A$, la droite $AD = c$ parallele à $PM$ & du même côté, on tirera ensuite la droite indéfinie $DM$ parallele à $AP$: je dis que cette ligne $DM$ sera le lieu de l'équation proposée. Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$ la droite $MP$ parallele à $AD$, il est clair qu'on aura toûjours $PM\ (y) = AD\ (c)$.

FIG. 164. Pour construire la seconde formule $x = c$. Ayant pris $AP = c$, on tirera la droite indéfinie $PM$ qui fasse avec $AP$ l'angle $APM$ donné ou pris à volonté: je dis qu'elle sera le lieu de tous les points $M$. Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$, la droite $MQ$ parallele à $AP$, & qui rencontre au point $Q$ l'indéfinie $AQ$ parallele à $PM$; il est clair qu'on aura toûjours $MQ$ ou $AP\ (x) = c$, de quelque grandeur que l'on puisse prendre $PM\ (y)$.

## AVERTISSEMENT.

Je crois qu'il est à propos pour éclairer l'esprit des Lecteurs, de leur donner une idée de la methode dont

je vais me servir pour la construction des lieux du second degré. Elle consiste à construire d'abord une Parabole en sorte que l'équation qui en exprime la nature soit la plus composée qu'il se puisse, de faire ensuite la même chose dans l'Ellipse, & dans l'Hyperbole rapportée à ses diametres & considerée entre les asymptotes; ce qui fournit des équations ou formules générales. J'examine ce qu'elles ont chacune de particulier, afin qu'une équation étant proposée, je puisse connoître à laquelle de ces formules elle doit être rapportée; & comparant ensuite tous ses termes avec ceux de la formule, j'en tire la construction du lieu de cette équation, en observant certaines remarques qui servent pour toutes les formules. Tout ceci s'éclaircira parfaitement dans les Lemmes & Propositions qui suivent.

## LEMME FONDAMENTAL

### *Pour la construction des lieux à la Parabole.*

308. SOIENT comme dans la premiere définition deux lignes droites inconnuës & indéterminées $AP$ ($x$), $PM$ ($y$); & soient de plus des lignes droites données $m, n, p, r, s$. Cela posé. FIG. 165. 166.

1°. On prendra sur la ligne $AP$, la partie $AB = m$; ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, paralleles à $PM$ & du même côté, on tirera par le point $A$ la droite $AE$ que j'appelle $e$, & par le point $D$ la droite indéfinie $DG$ parallele à $AE$; sur laquelle $DG$ ayant pris la partie $DC = s$ du côté de $PM$, on décrira * du diametre $CG$ qui ait pour parametre $CH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à $PM$, une Parabole $CM$ qui s'étende du même côté que $AP$. Je dis que sa portion renfermée dans l'angle $PAD$, fait par la ligne $AP$, & par une ligne $AD$ menée par le point fixe $A$ parallelement à $PM$ & du même côté, est le lieu de l'équation ou formule suivante. FIG. 165. * Art. 161.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0.$$
$$- \frac{ep}{m}x + ps.$$

Car ayant mené d'un des points quelconques $M$ de cette portion de Parabole, la ligne $MP$ qui fasse avec $AP$ l'angle donné ou pris à volonté $APM$, & qui rencontre les paralleles $AE$, $DG$, aux points $F$, $G$; les triangles semblables $ABE$, $APF$, donneront ces deux proportions, $AB$ $(m)$. $AE(e)$ :: $AP(x)$. $AF$ ou $DG = \frac{ex}{m}$. Et $AB$ $(m)$. $BE(n)$ :: $AP(x)$. $PF = \frac{nx}{m}$. Et par conséquent $GM$ ou $PM - PF - FG = y - \frac{nx}{m} - r$, & $CG$ ou $DG - DC$

* Art. 19. $= \frac{ex}{m} - s$. Or la Parabole donne * $\overline{GM}^2 = CG \times CH$, laquelle équation se change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc &c.

Fig. 166. 2°. On menera par le point fixe $A$, une ligne droite indéfinie $AQ$ parallele à $PM$ & du même côté; & ayant pris sur cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallele à $AP$ & du même côté que $PM$, & par les points déterminés $A$, $E$, la ligne $AE$ que j'appelle $e$; & ayant pris sur $AP$ la partie $AD = r$ du même côté que $PM$, on tirera la droite indéfinie $DG$ parallele à $AE$, sur laquelle on prendra la partie $DC = s$

* Art. 161. aussi du même côté de $PM$. On décrira ensuite * du diametre $CG$ qui ait pour parametre $CH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à $AP$, une Parabole $CM$ qui s'étende du même côté que $AQ$. Je dis que sa portion renfermée dans l'angle $BAP$, sera le lieu de cette seconde équation ou formule.

$$xx - \frac{2n}{m}yx + \frac{nn}{mm}yy - 2rx + \frac{2nr}{m}y + rr = 0.$$
$$- \frac{ep}{m}y + ps.$$

Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$, la ligne $MQ$ parallele à $AP$, & qui rencontre les paral-

leles $AE$, $DG$, aux points $F$, $G$; les triangles semblables $ABE$, $AQF$, donneront ces deux proportions, $AB\ (m) . AE\ (e) :: AQ$ ou $PM\ (y) . AF$ ou $DG = \frac{ey}{m}$. Et $AB\ (m) . BE\ (n) :: AQ\ (y) . QF = \frac{ny}{m}$. Et par conséquent $GM$ ou $QM - QF - FG = x - \frac{ny}{m} - r$, & $CG$ ou $DG - DC = \frac{ey}{m} - s$. Or la Parabole donne $\overline{GM}^2 = CG \times CH$, laquelle équation se change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc &c.

## COROLLAIRE.

309. Il est clair 1°. Que dans la premiere de ces équations ou formules, le quarré $yy$ se trouve sans fraction, & que dans la seconde c'est le quarré $xx$. 2°. Que dans ces deux formules les deux quarrés $yy$ & $xx$ s'y trouvent avec les mêmes lignes, en sorte que le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{2n}{m}$ qui multiplie le plan $xy$, multiplie l'un des quarrés $xx$ ou $yy$; d'où il suit que si le plan $xy$ ne se rencontroit point dans l'une ou l'autre de ces deux formules, le quarré $\frac{nnxx}{mm}$ ou $\frac{nnyy}{mm}$ ne s'y rencontreroit point non plus, puisqu'alors la fraction donnée $\frac{2n}{m}$ seroit nulle.

## PROPOSITION II.

### Problême.

310. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle le plan* xy *ne se rencontrant point, il n'y a qu'un des deux quarrés* xx *&* yy; *ou bien le plan* xy *s'y rencontrant, les deux quarrés* xx *&* yy *s'y rencontrent aussi avec les mêmes lignes, en sorte que le quarré de la moitié de la*

*fraction qui multiplie* xy, *soit égal à celle qui multiplie le quarré de l'une des inconnuës. On suppose toûjours qu'il y ait un des quarrés* xx *ou* yy *qui soit délivré de fractions.*

On comparera chaque terme de l'équation donnée, avec celui qui lui répond dans la premiere formule du Lemme précédent, si le quarré $yy$ s'y rencontre sans fraction; ou avec celui qui lui répond dans la seconde formule, lorsque c'est le quarré $xx$. On tirera ensuite de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités $m, n, p, r, s$, par le moyen desquelles on décrira comme l'on a enseigné dans le Lemme (en se servant des deux Remarques suivantes) une Parabole qui sera le lieu cherché.

## REMARQUE I.

311. 1°. On prendra pour $AB$ ($m$) telle grandeur positive que l'on voudra. 2°. Les lignes $AB$ ($m$), $BE$ ($n$) étant données, la ligne $AE$ ($e$) l'est aussi puisque l'angle $ABE$ est donné. 3°. Lorsque $n = o$, la ligne $AE$ tombe sur $AB$, c'est à dire, sur $AP$ dans la construction de la premiere formule, & sur $AQ$ dans celle de la seconde: alors on aura $AB$ ($m$) $=$ $AE$ ($e$), puisque les points $B, E$, se confondront alors ensemble. 4°. Lorsque la valeur de l'une des quantités $n, r, s$, est négative, il faut prendre ou mener la ligne qu'elle exprime du côté opposé à celui de $PM$; au lieu qu'il la faut mener du même côté, comme l'on a fait dans le Lemme, lorsqu'elle est positive.

## REMARQUE II.

312. S'il arrive que la valeur du parametre $CH$ ($p$) soit négative, il faudra que la Parabole s'étende du côté opposé à celui du Lemme: c'est à dire, du côté opposé à celui vers lequel s'étend l'indéterminée $AP$ dans la construction de la premiere formule, & l'indé-

terminée

terminée $AQ$ dans celle de la seconde. Tout ceci s'éclaircira parfaitement par les Exemples qui suivent.

## EXEMPLE I.

313. SOIT $yy - 2ay - bx + cc = 0$ l'équation donnée, dont il faut construire le lieu.

Comme le quarré $yy$ se trouve ici sans fraction, je choisis la premiere formule* du Lemme, de laquelle comparant chaque terme avec celui qui lui répond dans la proposée, j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = 0$, parce que le plan $xy$ ne se rencontrant point dans la proposée, on doit regarder ce plan comme étant multiplié par zero; d'où je tire $n = 0$, & par conséquent* $m = e$: c'est pourquoi effaçant dans la formule tous les termes ou $\frac{n}{m}$ se rencontre, & mettant au lieu de $e$ sa valeur $m$, je trouve $yy - 2ry - px + rr + ps = 0$. 2°. La comparaison des termes correspondans $-2ry$ & $-2ay$ donne $r = a$. 3°. Celle de $-px$ & $-bx$ fournit $p = b$. 4°. Celle des termes où les inconnuës $x$ & $y$ ne se trouvent point, donne enfin $rr + ps = cc$, d'où en mettant pour $r$ & $p$ leurs valeurs $a$ & $b$, je tire $s = \frac{cc - aa}{b}$, qui est une valeur négative lorsque $a$ surpasse $c$, comme on le suppose ici. Je n'ai point comparé les premiers termes $yy$ & $yy$ entr'eux; parce qu'étant précisément les mêmes, cela ne feroit rien connoître. Or les valeurs de $n, r, p, s$, étant ainsi déterminées, je construits le lieu en me servant de la construction* de la formule, & observant ce qu'il y a dans la premiere* Remarque en cette sorte.

*Art. 308. n. 1.

*Art. 311.

*Art. 308. n. 11.

*Art. 311.

Puisque $BE (n) = 0$, les points $B, E$, se confondent, & la ligne $AE$ tombe* sur $AP$; c'est pourquoi je mene d'abord par le point fixe $A$ la ligne $AD (r) = a$ parallele à $PM$, & du même côté, parce que sa valeur est positive. Je tire ensuite $DG$ parallele à $AP$, sur laquelle je prends $DC = \frac{aa - cc}{b} = -s$ du côté opposé à

*Art. 311.

FIG. 167.

$PM$; parceque $s = \frac{cc-aa}{b}$, qui eſt une valeur négative,
* Art. 161. Je décris enfin * du diametre $CG$ ( qui ait pour parametre la ligne $CH$ ($p$) $= b$, & pour ordonnées des droites paralleles à $PM$) une Parabole ; & je dis que ſes deux portions $OMM$, $RMS$, renfermées dans l'angle $PAO$ fait par $AP$ & par la ligne $AO$ menée parallelement à $PM$ & du même côté, ſera le lieu de l'équation donnée.

Car menant d'un de leurs points quelconques $M$, la ligne $MP$ qui faſſe avec $AP$ l'angle donné ou pris à volonté $APM$, & qui rencontre $DG$ au point $G$ ; on aura $GM = y - a$, ou $GM = a - y$, ſelon que le point $M$ tombera audeſſus ou audeſſous du diametre $CG$ ; & $CG$ ou
* Art. 19. $DG + CD = x + \frac{aa-cc}{b}$ ; & partant * par la proprieté de la Parabole, $\overline{GM}^2$ ($yy - 2ay + aa$) $= CG \times CH$ ($bx + aa - cc$), c'eſt à dire $yy - 2ay - bx + cc = 0$, qui eſt l'équation donnée. Donc &c.

### REMARQUE.

314. Si l'on prolonge $AQ$ de l'autre côté de $A$ vers $X$, il faut remarquer,

1°. Que la portion indéfinie $SM$ de la Parabole, renfermée dans l'angle $SAX$, ſera le lieu de toutes les valeurs fauſſes & de l'inconnuë $y$, qui répondent aux valeurs vraies de l'autre inconnuë $x$ dans l'équation donnée. En effet ſi l'on prend $AP$ plus grande que $AS$, & qu'on mene $PM$ parallele à $AX$, & du même côté, laquelle rencontre la portion $SM$ en $M$ ; l'on aura * $PM = -y$,
* Art. 304. & partant la droite $GM$ ou $GP + PM = a - y$, & on retrouvera par la proprieté de la Parabole comme ci-deſſus l'équation donnée.

2°. Que la portion $RCO$ de cette Parabole, qui tombe dans l'angle $TAO$ oppoſé au ſommet à l'angle $SAX$, ſera le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnuë $y$

dans l'équation donnée, qui répondent aux valeurs fausses de l'autre inconnuë $x$; car faisant * $AP = -x$, on retrouvera encore l'équation donnée. * Art. 304.

3°. Que s'il tomboit une portion de cette Parabole dans l'angle $TAX$ opposé au sommet à l'angle $PAO$, elle seroit le lieu des valeurs fausses de l'inconnuë $y$, qui répondroient aux valeurs fausses de l'autre inconnuë $x$. De sorte que cette Parabole est le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë $y$, qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë $x$, dans l'équation donnée $yy - 2ay - bx + cc = 0$.

D'où l'on voit que dans cet Exemple il y a deux valeurs vraies $PM$, $PM$, de l'inconnuë $y$, qui répondent à la même valeur vraie $AP$ de l'autre inconnuë $x$, lorsque cette ligne $AP$ est moindre que $AS$; qu'il y a une valeur vraie $PM$, & une fausse $-PM$, lorsque $AP$ surpasse $AS$; qu'il n'y a qu'une valeur vraie $SV$ de $y$, l'autre étant nulle ou zero, lorsque $AP = AS$; qu'il y a deux valeurs vraies $PM$, $PM$, de l'inconnuë $y$, qui répondent à la même valeur fausse $-AP$ de l'inconnuë $x$, lorsque $AP$ est moindre que $AT$; que ces deux valeurs deviennent égales chacune à la Tangente $TC$, lorsque $AP = AT$; & qu'enfin si l'on prenoit $AP$ $(-x)$ plus grande que $AT$, comme l'appliquée $PM$ ne rencontreroit alors la Parabole en aucun point, il s'ensuivroit qu'il n'y auroit aucune valeur vraie ou fausse de l'inconnuë $y$, qui pût répondre à cette valeur fausse $-AP$ de l'autre inconnuë $x$: c'est à dire que les valeurs de l'inconnuë $y$ deviendroient en ce cas imaginaires.

Tout ceci se doit entendre de la même maniére dans tous les autres Exemples qui suivent, tant dans la Parabole que dans les autres Sections Coniques: de sorte que la Section Conique qu'on trouvera, sera non-seulement le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnue $y$ par rapport aux valeurs vraies de l'autre inconnue $x$;

mais aussi celui de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnue $y$ par rapport aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnue $x$.

## EXEMPLE II.

315. SOIT l'équation donnée $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = o$, dont il faille construire le lieu.

Comme le quarré $yy$ est ici sans fraction, je choisis de même que dans l'Exemple précédent, la premiere
* Art. 308. n. 1. formule* du Lemme; & j'ai par la comparaison de ses termes avec ceux qui leur répondent dans la proposée,
* Art. 311. 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$; d'où en faisant* $m = a$, je tire $n = -b$.
2°. $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$; d'où il vient, comme ci-dessus, $n = -b$.
3°. $r = -c$. 4°. $\frac{2nr - ep}{m} = -b$; & partant $p = \frac{ab + 2bc}{e}$, en mettant pour $m$, $n$, $r$, leurs valeurs $a$, $-b$, $-c$.
5°. $rr + ps = cc$, ce qui donne $s = o$, en mettant pour $rr$ sa valeur $cc$. Or ces valeurs de $m$, $n$, $r$, $p$, $s$, étant ainsi déterminées, je construis le lieu de cette équa-
* Art. 308. n. 1. tion en me servant de la construction* de la premiere formule en cette sorte.

FIG. 168. Ayant pris sur la ligne $AP$ la partie $AB(m) = a$, je mene les droites $BE = b = -n$, $AD = c = -r$ paralleles à $PM$, & du côté opposé, parce que $n = -b$ & $r = -c$ qui sont des valeurs négatives. Je tire ensuite par les points déterminés $A$, $E$, la ligne $AE(e)$ qui est donnée, & par le point $D$ la ligne $DG$ parallele à $AE$. Cela fait comme $DC(s)$ est nulle ou zero, le point
* Art. 161. $C$ tombe sur $D$; c'est pourquoi je décris* du diametre $DG$ (qui ait pour parametre $DH(p) = \frac{ab + 2bc}{e}$, & pour ordonnées des droites paralleles à $PM$) une Parabole; & je dis que sa portion $OM$ renfermée dans l'angle $PAH$, où l'on suppose que doivent tomber tous les points $M$, sera le lieu de l'équation donnée.



Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$, la ligne $MP$ qui fasse avec $AP$ l'angle donné ou pris à volonté $APM$, & qui rencontre les paralleles $AE$, $DG$, aux points $F$, $G$; les triangles semblables $ABE$, $APF$, donneront ces deux proportions, $AB\,(a)$. $AE\,(e)::AP\,(x)$. $AF$ ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et $AB\,(a)$. $BE\,(b)::AP\,(x)$. $PF = \frac{bx}{a}$. Et par conséquent $GM$ ou $PM + PF + FG = y + \frac{bx}{a} + c$. Or par la proprieté * de la Parabole, $\overline{GM}^2 = GD \times DH$, c'est à dire, en mettant les valeurs analytiques, $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = 0$. Donc &c. * Art. 19.

## REMARQUE I.

316. Si la ligne $AP$ ne coupoit point la Parabole; mais qu'elle la touchât ou qu'elle tombât toute entiere au dehors, il s'ensuivroit qu'aucun des points cherchés $M$ ne pourroit tomber dans l'angle $PAH$, comme l'on avoit supposé en faisant la construction; & qu'ainsi il n'y auroit aucune valeur vraie de l'inconnuë $y$ qui répondit à une valeur vraie de l'autre inconnuë $x$, de quelque grandeur qu'elle pût être. Fig. 168.

Cette Remarque est générale pour tous les Exemples pareils à celui-ci, non seulement dans la Parabole, mais aussi dans les autres Sections.

## REMARQUE II.

317. Il est à propos de remarquer que si l'on avoit pris pour $AB\,(m)$ une autre grandeur que $a$, telle qu'elle pût être, les valeurs de $BE\,(n)$ & de $AE\,(e)$ changeroient à la verité: mais les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, demeureroient toûjours les mêmes; parce que dans le triangle $ABE$ l'angle $ABE$ est donné, comme aussi la raison

du côté *AB* au côté *BE*, sçavoir dans cet Exemple $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$. Or comme il n'y a que ces raisons de $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, qui se puissent trouver dans les valeurs de $p$, $r$, $s$; il s'ensuit que ces valeurs demeurent toûjours les mêmes, telle grandeur positive que l'on puisse prendre pour la ligne *AB* ($m$): de sorte qu'on n'a pris $m = a$ que pour rendre la construction plus simple. Ce que l'on doit toûjours observer dans la suite.

### EXEMPLE III.

318. On demande le lieu de l'équation donnée $xx + \frac{2b}{a}yx + \frac{bb}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = 0$.

Comme c'est ici le quarré $xx$ qui est délivré de fractions, je choisis la seconde formule * du Lemme; & j'ai par la comparaison des termes correspondans, 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$; d'où en faisant $m = a$, je tire $n = -b$. 2°. $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$; & partant, puisque $m = a$, on trouve comme ci-dessus $n = -b$. 3°. $r = c$. 4°. $\frac{2nr - mp}{m} = b - \frac{2bc}{a}$; ce qui donne $p = -\frac{ab}{c}$, en mettant à la place de $m$, $n$, $r$, leurs valeurs $a$, $-b$, $c$. 5°. $rr + ps = 0$; parce que dans l'équation donnée il ne se trouve point de termes entierement connus, que l'on puisse comparer au terme $rr + ps$ de la formule; ce qui donne $s = -\frac{rr}{p} = \frac{ccc}{ab}$, en mettant pour $r$ & $p$ leurs valeurs $c$ & $-\frac{ab}{c}$. Or ces valeurs étant ainsi déterminées, je construis le lieu requis en me servant de la construction de la seconde formule * du Lemme, & observant exactement les articles 311. & 312. de la maniere qui suit.

* Art. 308. n. 2.

* Art. 308. n. 2.

FIG. 169. Ayant mené par le point fixe *A*, une ligne indéfinie *AQ* parallele à *PM*, je prends sur cette ligne la partie *AB* ($m$) $= a$; & du point *B* je tire *BE* $= b = -n$ parallele à *AP*, & du côté opposé à *PM*, parce que la

valeur de $n$ est négative ; & par les points déterminés $A$, $E$, la ligne $AE$ ($e$) qui est donnée. Ayant pris sur $AP$ la partie $AD$ ($r$) $= o$ du côté de $PM$, je tire la droite indéfinie $DG$ parallele à $AE$, sur laquelle je prends la partie $DC$ ($s$) $= \frac{ac}{ab}$ du côté de $PM$. Je décris ensuite* du diametre $CG$ (qui ait pour ordonnées des droites paralleles à $AP$, & pour parametre la ligne $CH = \frac{ab}{e} = -p$) une Parabole qui s'étende * du côté opposé à celui où s'étend $AQ$, parce que $p = -\frac{ab}{e}$ qui est une valeur négative. Je dis que la portion $OMR$ de cette Parabole, renfermée dans l'angle $PAB$, sera le lieu qu'on cherche. *Art. 161. *Art. 312.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$, la ligne $MQ$ parallele à $AP$, & qui rencontre les paralleles $AE$, $DG$, aux points $F$, $G$ ; les triangles semblables $ABE$, $AQF$, donneront ces deux proportions, $AB(a) . AE(e) :: AQ$ ou $PM(y) . AF$ ou $DG = \frac{ey}{a}$. Et $AB(a) . BE(b) :: AQ(y) . QF = \frac{by}{a}$. Et par conséquent $GM (QM + FQ - FG) = x + \frac{by}{a} - c$, ou $GM (FG - FQ - QM) = c - \frac{by}{a} - x$, selon que le point $M$ tombe de part ou d'autre du diametre $CD$ ; & la coupée $CG$ ou $CD - DG = \frac{ae}{ab} - \frac{ey}{a}$. Or *par la proprieté de la Parabole, $\overline{GM}^2 = CG \times CH$ : c'est à dire, en mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques, $xx + \frac{2b}{a}yx + \frac{bb}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = o$, qui est l'équation donnée. Donc &c. *Art. 19.

REMARQUE.

319. S'il arrivoit qu'en comparant les termes de l'équation donnée avec ceux de la formule, on trouvât que $p = o$ ; il est visible que la construction de la Parabole qui en devroit être le lieu, seroit impossible. Mais il faut bien remarquer que l'équation donnée se

peut toûjours alors abaisser en sorte que son lieu devient une ligne droite ; ce qui se voit par les formules * du Lemme. Car effaçant, par exemple, dans la premiere les termes ou $p$ se rencontre, il vient $yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = o$, de laquelle extrayant la racine quarrée, on trouve $y - \frac{nx}{m} - r = o$, ou $y = \frac{nx}{m} + r$, dont le lieu est une ligne droite que l'on construira selon l'article 306. La même chose arrivera de la seconde formule de l'art. 308.

* Art. 308.

## EXEMPLE IV.

320. SOIT proposée l'équation $xx - ay = o$, de laquelle il faut trouver le lieu.

Comme c'est ici le quarré $xx$ qui se trouve délivré de fractions, je choisis la seconde formule * du Lemme ; & j'ai par la comparaison des termes qui se répondent, 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que $xy$ ne se trouve point dans la proposée ; d'où je tire $n = o$, & par conséquent * $m = e$. 2°. $\frac{nn}{mm} = o$, parce que le quarré $yy$ ne s'y trouve pas non plus ; d'où je tire encore $n = o$. 3°. $r = o$, parce que l'inconnuë $x$ ne se trouve point au premier degré dans la proposée : c'est pourquoi effaçant dans la formule tous les termes où $\frac{n}{m}$ & $r$ se rencontrent, & mettant pour $e$ sa valeur $m$ ; il vient $xx - py + ps = o$, dont il reste à comparer les termes avec ceux qui leur répondent dans la proposée. 4°. La comparaison des termes $-py$ & $-ay$ donnent $p = a$. 5°. Puisque dans la proposée il ne se trouve aucun terme entierement connu que l'on puisse comparer au terme $ps$ ; il s'ensuit que $ps = o$, & qu'ainsi $s = o$. Or ces valeurs de $n, r, p, s$, ainsi déterminées me servent à construire le lieu qu'on demande, ayant égard à la construction de la seconde formule de l'art. 308. & à l'article 311. en cette sorte.

* Art. 308. n. 2.

* Art. 311.

* Art. 311.

FIG. 170. Puisque $BE\ (n) = o$, la ligne $AE$ tombe * sur $AQ$ menée parallelement à $PM$ & du même côté ; comme aussi

aussi $DG$, parce que $AD$ $(r)=o$. Or puisque $CD$ $(s)$ $=o$, le point $C$ tombe sur le point $D$ lequel tombe en $A$ comme l'on vient de voir. Je décris donc * une Parabole du diametre $AQ$, qui ait pour parametre $AH$ $(p)=a$, & pour ordonnées des droites $MQ$ paralleles à $AP$: je dis que sa portion indéfinie $AM$ renfermée dans l'angle $PAQ$, est le lieu cherché. * Art. 161.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$ les droites $MP$, $MQ$, paralleles à $AQ$ & à $AP$, on aura par la proprieté * de la Parabole, $\overline{QM}^2$ $(xx)$ $=AQ \times AH$ $(ay)$; & partant $xx-ay=o$, qui étoit l'équation proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 19.

## DÉMONSTRATION DU PROBLÊME.

321. Si l'on met dans la formule générale * à la place de $m,n,r,s,p$, les valeurs que l'on aura trouvées par la comparaison de ses termes avec ceux de l'équation proposée, telle qu'elle puisse être, pourvû qu'elle ait les conditions marquées dans le Problême; il est clair que cette formule générale se changera en la proposée: & partant que si l'on prend aussi ces valeurs dans la construction * du Lemme, le lieu de la formule générale se changera en celui de l'équation proposée. Or c'est ce qu'on a enseigné dans le Problême accompagné de ses deux Remarques, comme les Exemples précédens le font assés voir. Donc &c. * Art. 308. * Art. 308.

## LEMME FONDAMENTAL.

### *Pour la construction des lieux à l'Ellipse ou au Cercle.*

322. Soient encore comme dans la définition premiere deux lignes droites inconnuës & indéterminées $AP$ $(x)$, $PM$ $(y)$; & soient de plus des lignes droites données $m$, $n$, $p$, $r$, $s$, $t$. Cela posé, Fig. 171.

On prendra sur la ligne $AP$, la partie $AB = m$; & ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, paralleles à $PM$, & du même côté, on tirera par le point $A$ la droite $AE$ qui est donnée, & que j'appelle $e$; & par le point $D$, la droite indéfinie $DG$ parallele à $AE$, sur laquelle on prendra la partie $DC = s$ du côté de $PM$; & de part & d'autre du point $C$, les parties $CK$, $CL$, égales chacune à $t$. On décrira ensuite une Ellipse* du diametre $LK$ $(2t)$, qui ait pour parametre $KH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à $PM$. Je dis que sa portion $OMR$ renfermée dans l'angle $PAD$ fait par la ligne $AP$ & par une ligne $AD$ menée par le point fixe $A$ parallelement à $PM$ & du même côté, sera le lieu de l'équation ou formule générale que voici.

* Art. 161.

$$\begin{array}{lllll} yy - \frac{2n}{m}xy & + \frac{nn}{mm}xx & - 2ry & + \frac{2nr}{m}x & + rr = 0. \\ & + \frac{eep}{2mmt} & & - \frac{2eps}{2mt} & - \frac{ptt}{2t} \\ & & & & + \frac{pss}{2t} \end{array}$$

Car ayant mené d'un des points quelconques $M$, de cette portion d'Ellipse, la ligne $MP$ qui fasse avec $AP$ l'angle donné ou pris à volonté $APM$, & qui rencontre les paralleles $AE$, $DG$, aux points $F$, $G$; les triangles semblables $ABE$, $APF$, donneront $AF$ ou $DG = \frac{ex}{m}$, & $PF = \frac{nx}{m}$. On aura donc $GM = y - \frac{nx}{m} - r$, & $CG = \frac{ex}{m} - s$. Or par la proprieté de l'Ellipse* $KL$ $(2t)$. $KH$ $(p)$ :: $LG \times GK$ ou $\overline{CK}^2 - \overline{CG}^2$ $\left(tt - ss + \frac{2esx}{m} - \frac{eexx}{mm}\right)$. $\overline{GM}^2$ $\left(yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr\right) = \frac{ptt - pss}{2t} + \frac{2epsx}{2mt} - \frac{eepxx}{2mmt}$; Donc &c.

* Art. 55. & 41.

S'il arrive que le diametre $KL$ $(2t)$ & son parametre $KH$ $(p)$ soient égaux entr'eux, on aura toûjours $\overline{GM}^2 = LG \times GK$; d'où il est évident selon les Elemens de Geometrie, que si l'angle $CGM$ est droit, l'Ellipse se changera alors en un cercle qui aura pour diametre la ligne $KL$.

### COROLLAIRE.

323. IL est clair que les deux quarrés $yy$ & $xx$ se trouvent toûjours avec les mêmes signes dans cette formule ; & que lorsque le plan $xy$ s'y rencontre, le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{2n}{m}$ qui multiplie ce plan, doit être moindre que la fraction $\frac{nn}{mm} + \frac{ccp}{2mms}$ qui multiplie le quarré $xx$.

## PROPOSITION III.

### Problême.

324. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée ; dans laquelle les deux quarrés* yy *&* xx *se rencontrent avec les mêmes signes sans le plan* xy, *ou avec ce plan, ensorte que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie, soit moindre que la fraction qui multiplie le quarré* xx. *On suppose toûjours ici que le quarré* yy *soit délivré de fractions.*

On comparera les termes de l'équation donnée, avec ceux qui leur répondent dans la formule générale * du Lemme précédent ; & on tirera de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités $m$, $n$, $p$, $r$, $s$, $t$, par le moyen desquelles valeurs on décrira comme l'on a enseigné dans ce Lemme (en observant exactement l'art. 311.) une Ellipse qui sera le lieu cherché.

* *Art.* 322.

### EXEMPLE I.

325. SOIT proposé de trouver le lieu de cette équation $yy + xy + \frac{1}{2}xx - 2ay + bx + cc = 0$, dans laquelle le quarré de $\frac{1}{2}$ moitié de la fraction $\frac{1}{1}$ ou 1 qui multiplie $xy$, est moindre que la fraction $\frac{1}{2}$ qui multiplie $xx$.

La comparaison de chaque terme de la formule générale

* Art. 322. du Lemme * avec celui qui lui répond dans cette équation, donne 1°. $\frac{2n}{m} = -1$; car n'y ayant ici aucune fraction litterale qui multiplie le plan $xy$, on le doit considerer comme étant multiplié par l'unité numerique 1 : & partant si l'on fait $m = a$, l'on aura $n = -\frac{1}{2}a$. 2°. $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = \frac{1}{2}$; d'où l'on tire $\frac{p}{t} = \frac{mm - 2nn}{ee} = \frac{aa}{2ee}$ en mettant pour $m$, $n$, leurs valeurs $a$, $-\frac{1}{2}a$ : & par conséquent $p = \frac{aat}{2ee}$. 3° $r = a$. 4° $\frac{2nr}{m} - \frac{2eps}{2mt} = b$; d'où en mettant pour $m$, $n$, $r$, $\frac{p}{t}$, leurs valeurs $a$, $-\frac{1}{2}a$, $a$, $\frac{aa}{2ee}$, il vient $s = \frac{-2ae - 2eb}{a}$. 5°. $rr - \frac{ptt}{2t} + \frac{pss}{2t} = cc$ : & partant $tt = ss + \frac{2trr}{p} - \frac{2tcc}{p} = ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa}$, en mettant pour $\frac{p}{t}$, $r$, les valeurs $\frac{aa}{2ee}$, $a$, qu'on leur vient de trouver. Or les valeurs de $m$, $n$, $r$, $s$, $t$, $p$, étant ainsi déterminées, je décris l'Ellipse cherchée en me servant de la construction du
*Art. 322. Lemme * & de l'article 311. en cette sorte.

FIG. 172. Je prens sur la ligne $AP$ la partie $AB$ $(m)$ $a$; & ayant mené parallelement à $PM$ & du même côté la ligne $AD$ $(r) = a$, & du côté opposé la droite $BE = \frac{1}{2}a = -n$, parce $n = -\frac{1}{2}a$ qui est une valeur négative, je tire par le point $A$ la droite $AE$ $(e)$ qui est donnée ; & par le point $D$, la droite $DG$ parallele à $AE$, sur laquelle je prends la partie $DC = \frac{2ae + 2be}{a} = -s$ du côté opposé à $PM$; & de part & d'autre du point $C$, les parties $CK$, $CL$, égales chacune à
* Art. 161. $t = \sqrt{ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa}}$. Je décris ensuite * une Ellipse du diametre $ZK$, qui ait pour ordonnées des droites paralleles à $PM$, & pour parametre la ligne $KH$ $(p)$ $= \frac{aat}{2ee}$. Je dis que sa portion $OMR$ renfermée dans l'angle $PAD$, est le lieu de l'équation donnée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$,

la ligne $MP$ qui fasse avec $AP$ l'angle donné ou pris à volonté $APM$, & qui rencontre les paralleles $AE$, $DG$, aux points $F$, $G$; les triangles semblables $ABE$, $APF$ donneront $AB(a). AE(e) :: AP(x). AF$ ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et $AB(a). BE(\frac{1}{2}a) :: AP(x). PF = \frac{1}{2}x$. On aura donc $GM = y + \frac{1}{2}x - a$; & $CG$ ou $DG + DC = \frac{ex}{a} - s$, puisque $DC = -s$. Or par la proprieté * de l'Ellipse $KL(2t). KH(\frac{4at}{2e}) :: LG \times GK$ ou $\overline{CK}^2 - \overline{CG}^2$ $(tt - ss + \frac{2esx}{a} - \frac{eexx}{aa}). \overline{GM}^2 (yy + xy - 2ay + \frac{1}{4}xx - ax + aa)$. D'où en mettant à la place de $tt - ss$ & de $s$, leurs valeurs $4ee - \frac{4ceee}{aa}$ & $-\frac{2ae - 2be}{a}$, multipliant ensuite les extrêmes & les moyens, & divisant de part & d'autre par $2t$, l'on retrouve l'équation même proposée. Donc &c. * Art. 55. & 41.

REMARQUE.

326. S'il arrive que $ss + 4ee$ soit égale ou moindre que $\frac{4ceee}{aa}$, il est évident que la valeur de $t$ deviendra nulle ou imaginaire; & qu'ainsi il sera pour lors impossible de construire l'Ellipse qui devroit être le lieu de l'équation donnée. Et comme cette équation renfermeroit necessairement des contradictions, il s'ensuit qu'il ne pourroit y avoir aucune ligne qui en pût être le lieu; c'est à dire que toutes les valeurs de l'inconnuë $y$ qui devroient répondre à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë $x$, seroient toutes imaginaires.

Ceci se voit clairement dans la formule générale * du Lemme qui, en transposant quelques termes, devient $yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr = \frac{ptt - pss}{2t} + \frac{2pesx}{2mt} - \frac{eepxx}{2mmt}$, dans laquelle équation le premier membre est le quarré de $y - \frac{n}{m}x - r$; & le second, le quarré de $t$ * Art. 322.

moins le quarré de $s - \frac{ex}{m}$, multiplié par la fraction $\frac{p}{2t}$. Or il est visible que si la valeur du quarré $tt$ est nulle ou négative, la valeur de ce second membre sera négative; & qu'ainsi l'on aura dans ces deux cas un quarré, sçavoir le premier membre, égal à une valeur négative; ce qui est une contradiction manifeste.

## EXEMPLE II.

327. On demande le lieu de l'équation $yy + \frac{b}{a}xy + xx + cy + fx - ag = 0$, dans laquelle on suppose suivant l'art. 323. que $\frac{bb}{4aa}$ est moindre que la fraction $\frac{1}{1}$ ou 1 qui multiplie le quarré $xx$; c'est à dire que $b$ est moindre que $2a$.

* Art. 323. La comparaison des termes de la formule * générale avec ceux qui leur répondent dans l'équation proposée, donne 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{b}{a}$; d'où en faisant $m = a$, on tire $n = -\frac{1}{2}b$. 2°. $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = 1$; d'où en mettant pour $m$, $n$, leurs valeurs $a$, $-\frac{1}{2}b$, l'on tire $\frac{p}{t} = \frac{4aa-bb}{2ee}$: & partant $p = \frac{4aat-bbt}{2ee}$. 3°. $r = -\frac{1}{2}c$, 4°. $s = \frac{bce-2afe}{4aa-bb}$. 5°. $t = \sqrt{ss + \frac{cepe+4agee}{4aa-bb}}$. Ce qui fournit cette construction.

FIG. 173. Ayant pris sur la ligne droite indéfinie $AP$ la partie $AB(m) = a$, & mené parallelement à $PM$ & du côté opposé les droites $BE = \frac{1}{2}b = -n$, $AD = \frac{1}{2}c = -r$; on tirera par le point $A$ la droite $AE(e)$ qui est donnée, & par le point $D$ la droite $DG$ parallele à $AE$, sur laquelle on prendra la partie $DC(s) = \frac{bce-2afe}{4aa-bb}$ du côté de $PM$, si $bc$ surpasse $2af$, comme on le suppose ici; & du côté opposé, s'il est moindre; ensuite on prendra de part & d'autre du point $C$, les parties $CK$ & $CL$ égales chacune à $t = \sqrt{ss + \frac{ccee+4agee}{4aa-bb}}$. Cela fait, on décrira * une

* Art. 161.

Ellipse du diametre $LK(2t)$ qui ait pour ordonnées des droites paralleles à $PM$, & pour parametre une ligne $KH$ $(p)$ $= \frac{4aat-bbt}{2ee}$. Je dis que sa portion $OR$ sera le lieu de l'équation proposée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$, la droite $MP$ qui fasse avec $AP$ l'angle donné ou pris à volonté $APM$, & qui rencontre les paralleles $AE$, $LK$, aux points $F$, $G$; on aura $PF = \frac{bx}{2a}$, & $AF$ ou $DG = \frac{ex}{a}$; ce qui donnera $MG$ ou $MP + PF + FG = y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$, & $CG = \frac{ex}{a} - s$, ou $s - \frac{ex}{a}$. Or par la proprieté * de l'Ellipse $LK(2t) . KH \left(\frac{4aat-bbt}{2ee}\right) :: LG \times GK \left(tt - ss + \frac{2esx}{a} - \frac{eexx}{aa}\right) . \overline{GM}^2 \left(yy + \frac{b}{a}xy + cy + \frac{bbxx}{4aa} + \frac{bc}{2a}x + \frac{1}{4}cc\right)$. *Art. 55. & 41.

Ce qui (en mettant pour $tt - ss$ & pour $s$ leurs valeurs $\frac{ccee+4agee}{4aa-bb}$ & $\frac{bce-2afe}{4aa-bb}$, multipliant ensuite les extrêmes & les moyens, & divisant par $2t$) donne l'équation même proposée.

Il est à propos de remarquer que si l'angle $AEB$ étoit droit, l'angle $CGM$ le seroit aussi; & le diametre $LK$ $(2t)$ seroit égal au parametre $KH$ $\left(\frac{4aat-bbt}{2ee}\right)$, puisque $ee = aa - \frac{1}{4}bb$ à cause du triangle réctangle $AEB$. D'où l'on voit que l'Ellipse deviendroit alors un cercle qui auroit pour rayon la droite $CK$ ou $CL$ $(t) = \sqrt{ss + \frac{1}{4}cc + ag}$, & que $DC$ $(s) = \frac{bc-2af}{4a}$; ce qui rend la construction beaucoup plus simple.

EXEMPLE III.

328. SOIT proposé de trouver le lieu de l'équation $yy + xx - ax = 0$.

Je compare les termes de la formule* générale, avec ceux qui leur répondent dans l'équation donnée; & j'ai *Art. 312.
1°. $\frac{2n}{m} = 0$, parceque le terme $xy$ manquant, on le doit

considerer comme étant multiplié par zero; d'où je tire $n=o$: & partant $m=e$. 2°. $\frac{nn}{mm} + \frac{ep}{2mmt} = 1$; c'est à dire, $\frac{p}{2t}=1$ en mettant pour $n$ & $m$ leurs valeurs $o$ & $e$: & partant $p=2t$. 3°. $r=o$; parce que l'inconnuë $y$ ne se trouvant point au premier degré dans l'équation donnée, on la doit aussi considerer comme étant multipliée par zero: c'est pourquoi effaçant dans la formule

* Art. 322. génerale * tous les termes où $\frac{n}{m}$ & $r$ se rencontrent, & mettant pour $e$ & $\frac{p}{2t}$ leurs valeurs $m$ & 1, elle se changera en celle-ci $yy+xx-2sx-tt+ss=o$, dont il reste à comparer les termes avec ceux de la proposée. 4°. $2s=a$; & partant $s=\frac{1}{2}a$. 5°. $ss-tt=o$; puisqu'il n'y a point de termes entierement connus dans l'équation donnée: & partant $tt=ss=\frac{1}{4}aa$; & en extrayant de part & d'autre la racine quarrée, $t=\frac{1}{2}a$. Or ces valeurs étant ainsi déterminées, je construis le lieu en cette sorte.

FIG. 174. Puisque $BE\,(n)=o$, il s'ensuit que $AE$ tombe sur $AP$, laquelle tombe aussi sur $DG$, puisqu'on a encore $AD\,(r)=o$; de sorte que le point $D$ tombe en $A$. C'est pourquoi prenant sur $AP$, la partie $AC\,(s)=\frac{1}{2}a$ du côté de $PM$; & de part & d'autre du point $C$, les parties $CK$, $CL$, égales chacune à $t=\frac{1}{2}a$ (le point $L$

* Art. 161. tombe ici sur le point $A$); on décrira * du diametre $AK$ qui ait pour ordonnées des droites paralleles à $PM$, & pour parametre la ligne $KH\,(p)=2t=a$, une Ellipse qui sera le lieu cherché.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$ la droite $MP$ qui fasse avec $AP$ l'angle donné ou pris à

* Art. 55. & 41. volonté $APM$, on aura * $AK\,(a)\ KH\,(a) :: AP \times PK\,(ax-xx).\ \overline{PM}^2\,(yy)$. Ce qui donne $yy+xx-ax=o$.

Il est évident que si l'angle $APM$ est droit, l'Ellipse devient alors un cercle qui a pour diametre la ligne $AK=a$.

## REMARQUE.

329. Il peut arriver deux differens cas, où le lieu de l'équation donnée est un cercle.

*Premier cas*. Lorsque les quarrés $yy$ & $xx$ se trouvent tous deux avec les mêmes signes & sans fraction dans une équation, où le plan $xy$ se trouve aussi ; & que de plus l'angle $AEB$ est droit (ce qui arrive lorsqu'ayant mené $AF$ perpendiculaire sur $PM$ la raison de $PF$ à $AP$, qui est la même que celle de $BE$ à $AB$ est exprimée par la moitié de la fraction qui multiplie le plan $xy$) : le lieu de cette équation sera toujours un cercle comme l'on a déja vû dans l'article 324, & la raison en est évidente par la formule générale. Car l'on aura par la comparaison des termes correspondans où se trouve le quarré $xx$, cette égalité $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mms} = 1$ ; d'où l'on tire $\frac{p}{2s} = \frac{mm - nn}{ee} = 1$, puisque à cause du triangle réctangle $AEB$ le quarré $mm = nn + ee$. Or l'angle $AEB$ étant droit, l'angle $CGM$ que fait le diametre $LK$ avec ses ordonnées sera aussi droit ; & par conséquent puisque le diametre $LK$ est égal à son parametre $KH$, il s'ensuit que l'Ellipse devient alors un cercle.

*Second cas*. Lorsque les quarrés $yy$ & $xx$ se trouvent tous deux avec les mêmes signes & sans fraction dans une équation, où le plan $xy$ ne se rencontre pas, & que de plus l'angle $APM$ est droit : son lieu sera toujours un cercle, comme l'on vient de voir dans l'article 328 ; & cela se prouve par le moyen de la formule générale. Car puisque le plan $xy$ ne se trouve point dans l'équation donnée, la fraction $\frac{2n}{m}$ de la formule sera nulle ou zero ; & partant $BE(n) = 0$, & $m = e$. d'où l'on voit. 1°. Que le diametre $LK$ est parallele à la ligne $AP$, & qu'ainsi l'angle $CGM$ qu'il fait avec ses ordonnées étant égal à l'angle $APM$ sera

droit. 2°. Que la fraction $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré $xx$ dans la formule devient $\frac{p}{2t}$, & qu'ainsi on aura $\frac{p}{2t} = 1$ : c'est à dire que le diametre $LK$ sera égal à son parametre $KH$. L'Ellipse qui est le lieu de l'équation donnée sera donc alors un cercle. Or comme alors la formule générale se change en celle-ci

$$yy + xx - 2ry - 2sx + rr = 0,$$
$$- tt$$
$$+ ss$$

on pourra, si l'on veut abreger le calcul, en se servant d'abord de cette formule, pour trouver par la comparaison de ses termes avec ceux de la proposée, les valeurs de $r$, $s$, $t$, qui servent à décrire le cercle qui en est le lieu.

## LEMME FONDAMENTAL

### *Pour la construction des lieux à l'Hyperbole par rapport à ses diametres.*

* Art. 161. 330. LES mêmes choses étant posées que dans le
FIG. 175. Lemme précédent pour l'Ellipse, on décrira * du dia-
176. metre $LK$ $(2t)$ qui ait pour parametre $KH$ $(p)$, & pour ordonnées des droites paralleles à $PM$, une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées. Je dis que sa portion $OM$, ou leurs portions renfermées dans l'angle $PAD$ fait par la ligne $AP$ & par une ligne $AD$ menée par le point fixe $A$ parallelement à $PM$ & du même côté, sera le lieu de cette équation ou formule.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0.$$
$$- \frac{eep}{2mmt} \qquad\qquad + \frac{2eps}{2mt}x \pm \frac{ptt}{2t}$$
$$- \frac{pss}{2t}$$

dans laquelle on doit observer qu'il y a $+ \frac{ptt}{2t}$ lorsque

le diametre $ZK$ est un premier diametre, & $-\frac{pt}{2t}$ lorsque c'est un second.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$ la ligne $MP$, qui fasse avec $AP$ l'angle donné ou pris à volonté $APM$, & qui rencontre les paralleles $AE$, $DG$, aux points $F$, $G$, on aura par la proprieté de l'Hyperbole * $KL\ (2t) . KH\ (p) :: \overline{CG}^2 \pm \overline{CK}^2 \left(\frac{eexx}{mm} - \frac{2esx}{m} + ss \pm tt\right) . \overline{GM}^2 = \frac{peexx}{2mmt} - \frac{2epsx}{2mt} + \frac{pss}{2t} \pm \frac{ptt}{2t} = yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr.$ Donc &c. * Art. 81. & 118.

S'il arrive que le diametre $KL\ (2t)$ & son parametre $KH\ (p)$ soient égaux entr'eux; l'Hyperbole sera équilatere.

COROLLAIRE.

331. IL est clair, 1°. Que les deux quarrés $yy$ & $xx$ se trouvent toûjours avec differens signes dans cette formule, lorsque le plan $xy$ ne s'y rencontre point; ou bien lorsqu'il s'y trouve, & que $\frac{eep}{2mmt}$ surpasse $\frac{nn}{mm}$. 2°. Qu'ils s'y peuvent trouver avec les mêmes signes, mais avec ces conditions que le plan $xy$ s'y rencontre, & que le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction qui le multiplie, soit plus grand que la fraction $\frac{nn}{mm} - \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré $xx$.

## PROPOSITION IV.

### Problême.

332. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle, ou les deux quarrés* $yy$ *&* $xx$ *se rencontrent avec differens signes, ou bien avec les mêmes signes, mais avec ces deux conditions que le plan* $xy$ *s'y trouve, & que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie soit plus grand*

*que la fraction qui multiplie le quarré* $xx$. *On suppose encore ici que le quarré* $yy$ *soit délivré de fractions.*

On construit l'Hyperbole qui en est le lieu, comme l'on vient de faire l'Ellipse dans le Problême précédent. Les Exemples qui suivent le feront voir.

### EXEMPLE I.

333. SOIT $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{f}{a}xx + 2cy - 2gx - bb = 0$, l'équation dont il faut construire le lieu, & dans laquelle on suppose que le quarré $\frac{bb}{aa}$ surpasse $\frac{f}{a}$.

Je compare les termes de cette équation avec ceux qui leur répondent dans la formule du Lemme; & j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$, & partant si l'on fait $m = a$, on aura $n = -b$. 2°. $\frac{eep}{2mmt} - \frac{nn}{mm} = -\frac{f}{a}$, donc $\frac{p}{2t} = \frac{bb-af}{ee}$, & $p = \frac{2bbt-2aft}{ee}$. 3°. $r = -c$. 4°. $\frac{2nr}{m} + \frac{2eps}{2mt} = -2g$, d'où en mettant pour $m$, $n$, $r$, $\frac{p}{2t}$ les valeurs que l'on vient de trouver, on tire $s = \frac{-bce-age}{bb-af}$. 5°. $\mp tt = ss - \frac{2rrt-2bbt}{p} = ss - \frac{eecc-eebb}{bb-af}$, sçavoir $+tt$ lorsque le quarré $ss$ surpasse $\frac{eecc+eebb}{bb-af}$, & $-tt$ lorsqu'il est moindre, parce que le quarré $tt$ doit être positif; ce qui fait deux differens cas. Or les valeurs de $m$, $n$, $r$, $s$, $t$, $p$, étant ainsi déterminées, je construis le lieu en me réglant sur la construction du Lemme, de la maniére qui suit.

FIG. 177. 178. Ayant pris sur $AP$, la partie $AB = a$, & mené parallelement à $PM$ & du côté opposé les droites $BE = b = -n$, $AD = c = -r$, je tire par les points $A$, $E$, la droite $AE$ ($e$) qui est donnée, & par le point $D$ la droite indéfinie $DG$ parallele à $AE$ sur laquelle je prends la partie $DC = \frac{eag+ebc}{bb-af} = -s$ du côté opposé à $PM$, & de part & d'autre du point $C$ les parties

$CL$, $CK$, égales chacune à $t = \sqrt{ss - \frac{eecc - eebb}{bb - af}}$ ou $\sqrt{\frac{eecc + eebb}{bb - af} - ss}$, ſelon que $ss$ eſt plus grand ou moindre que $\frac{eecc + eebb}{bb - af}$. Cela fait, du diametre $LK$ (qui ait pour ordonnées des droites paralleles à $PM$, & pour parametre la ligne $KH$ $(p) = \frac{2bbt - 2aft}{ee}$) je décris une Hyperbole, en obſervant que $LK$ (*fig.* 177.) doit être un premier diametre dans le premier cas, & un ſecond (*fig.* 178.) dans le dernier. Je dis que ſa portion $OM$ ſera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques $M$ une parallele $MP$ à $AD$, laquelle rencontre les lignes $AB$, $AE$, $DG$, aux points $P$, $F$, $G$; on aura $PF = \frac{bx}{a}$, & $AF$ ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et par conſéquent $MG = y + \frac{bx}{a} + c$, $CG$ ou $DG + CD = \frac{ex}{a} - s$, puiſque $CD = -s$. Or par la proprieté de l'Hyperbole, $LK$ $(2t)$. $KH$ $\left(\frac{2bbt - 2aft}{ee}\right) :: \overline{CG}^2 \pm \overline{CK}^2$ $\left(\frac{eexx}{aa} - \frac{2esx}{a} + ss \pm tt\right)$. $\overline{GM}^2$ $\left(yy + \frac{2b}{a}xy + 2cy + \frac{bb}{aa}xx + \frac{2bc}{a}x + cc\right)$; ce qui, en mettant pour $ss \pm tt$ & $s$ leurs valeurs $\frac{eecc + eebb}{bb - af}$ & $\frac{-bce - age}{bb - af}$, multipliant les extrêmes & les moyens, & diviſant par $2t$, donne l'équation propoſée. Donc &c.

### REMARQUE.

334. S'il arrive que $ss = \frac{eecc + eebb}{bb - af}$; il eſt clair que la valeur de $tt$ devient nulle ou zero; & qu'ainſi la conſtruction de l'Hyperbole devient impoſſible. Mais il faut bien remarquer alors que l'équation propoſée s'abaiſſe toûjours, en ſorte que ſon lieu, qui devroit être une ou deux Hyperboles oppoſées, devient une ou deux lignes droites. En effet dans nôtre exemple on a réduit l'équation donnée à cette proportion $ee. bb - aft$ :

$:: \frac{eexx}{aa} - \frac{2esx}{a} + ss \pm tt . yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy + \frac{2bc}{a}x + cc$ d'où, en effaçant $tt$ qui est nul, multipliant les extrêmes & les moyens, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, l'on tire $ey + \frac{ebx}{a} + ec = \overline{\frac{ex}{a} - s}\sqrt{bb - af}$, c'est à dire en mettant pour $-s$ sa valeur $\frac{bc + ag}{bb - af}$, & divisant de part & d'autre par $e$, cette équation $y + \frac{bx}{a} + c = \frac{x\sqrt{bb - af}}{a} + \frac{ag + bc}{\sqrt{bb - af}}$ ou $y = \frac{-b + \sqrt{bb - af}}{a}x + \frac{ag + bc}{\sqrt{bb - af}} - c$, qui en faisant $\frac{n}{m} = \frac{b - \sqrt{bb - af}}{a}$, & $p = \frac{ag + bc}{\sqrt{bb - af}} - c$, se change en cette autre $y = p - \frac{n}{m}x$ dont le lieu est une ligne droite que l'on construit selon l'article 306.

La raison de ceci est évidente par la formule générale du Lemme; car effaçant dans cette formule le terme $\mp \frac{ptt}{2s}$ qui renferme le quarré $tt$ que l'on suppose égal à zero ou nul, elle se change en transposant certains termes, & extrayant les racines quarrées, en cette autre $y - \frac{n}{m}x - r = \overline{\frac{ex}{m} - s}\sqrt{\frac{p}{2s}}$ ou $\overline{s - \frac{ex}{m}}\sqrt{\frac{p}{2s}}$ où les inconnuës $x$ & $y$ ne sont plus qu'au premier degré, & dont le lieu par conséquent devient des lignes droites.

## EXEMPLE II.

335. On demande le lieu de l'équation donnée $yy - xx + 2ay + ax = o$.

La comparaison des termes correspondans donne 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que le terme $xy$ ne se trouve point dans la proposée; d'où l'on tire $n = o$, & par conséquent $m = e$. 2°. $\frac{p}{2s} = 1$, & partant $p = 2s$. 3°. $r = -a$,

4°. $\frac{2ps}{2t} = a$, d'où l'on tire $s = \frac{1}{2}a$. 5°. $rr \mp \frac{ptt}{2t} - \frac{pss}{2t} = 0$, & ainsi $\mp tt = ss - \frac{2rrt}{p} = -\frac{3}{4}aa$ en mettant pour $r$, $\frac{2t}{p}$, $s$ leurs valeurs $-a$, $1$, $\frac{1}{2}a$; d'où je connois qu'il faut prendre dans le dernier terme de la formule $-tt$ & non pas $+tt$, afin que la valeur de $tt$ soit positive. Je construis ensuite le lieu en cette sorte.

Puisque $AD(r) = -a$, je mene par le point $A$ parallelement à $PM$ & du côté opposé la ligne $AD = a$; & puisque $BE\ (n) = 0$, je tire par le point $D$ la droite $DG$ parallele à $AP$, sur laquelle je prends la partie $DC\ (s) = \frac{1}{2}a$ du côté de $PM$, & de part & d'autre du point $C$ les parties $CL$, $CK$, égales chacune à $t = \sqrt{\frac{3}{4}aa}$. Ensuite du second diametre $LK$ (parce qu'on a pris $-tt$ dans le dernier terme de la formule) qui ait pour ordonnées des droites paralleles à $PM$, & pour parametre la droite $KH\,(p) = 2t = LK$, je décris une Hyperbole. Je dis que sa portion $OM$ sera le lieu qu'on cherche. FIG. 179.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$ une parallele $MP$ à $AD$, qui rencontre les droites $AP$, $DG$, aux points $P$, $G$; on aura $MG = y + a$, $CG$ ou $DG - DC = x - \frac{1}{2}a$, & par la proprieté de l'Hyperbole $LK\ (2t)$. $KH\ (2t)$ :: $\overline{CG}^2 + \overline{CK}^2$ $(xx - ax + \frac{1}{4}aa + tt)$. $\overline{GM}^2$ $(yy + 2ay + aa)$; ce qui donne, en mettant pour $tt$ sa valeur $\frac{3}{4}aa$, l'équation même proposée $yy + 2ay - xx + ax = 0$.

Il est évident que l'Hyperbole est équilatere.

## REMARQUE.

336. LORSQUE les deux quarrés $yy$ & $xx$ se trouvent avec differens signes & sans fraction dans une équation, où le plan $xy$ ne se rencontre point; son lieu sera toûjours une Hyperbole équilatere. Car la fraction $\frac{2n}{m}$ de la formule sera nulle ou zero; & partant

$BE(n) = o$, & $m = e$. D'où il ſuit que la fraction $\frac{nn}{mm}$ $- \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré $xx$ dans la formule devient $- \frac{p}{2t}$; & qu'ainſi on aura $- \frac{p}{2t} = 1$, c'eſt à dire que le diametre $LK$ ſera égal à ſon parametre $KH$, ou, ce qui eſt la même choſe, que l'Hyperbole ſera équilatere. Or comme la formule générale ſe change alors en celle-ci

$$yy - xx - 2ry + 2sx + rr = o,$$
$$\mp tt$$
$$- ss$$

il s'enſuit qu'on peut s'en ſervir d'abord pour trouver les valeurs de $r, s, t$, qui ſervent à conſtruire l'Hyperbole équilatere qui eſt le lieu de l'équation donnée; ce qui abrege le calcul.

## LEMME FONDAMENTAL.

### *Pour la conſtruction des lieux à l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.*

337. SOIENT comme dans la définition premiere, deux lignes inconnuës & indéterminées $AP$ ($x$), $PM$ ($y$) qui faſſent entr'elles un angle donné ou pris à volonté $APM$; & ſoient de plus des lignes droites données $m, n, p, r, s$. Cela poſé.

FIG. 180. 1°. On prendra ſur la ligne $AP$, la partie $AB = m$; & ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$ paralleles à $PM$, & du même côté; on tirera par le point $A$ la droite $AE$ qui eſt donnée, & que j'appelle $e$, & par le point $D$ la droite indéfinie $DG$ parallele à $AE$, ſur laquelle ayant pris les parties $DC = s$, $CK = e$ du côté que s'étend $AP$, on menera parallelement à $PM$ & du même côté la droite indéfinie $CL$, & la ligne $KH = p$. On décrira enſuite * entre les Aſymptotes $CL$, $CK$, une

* Art. 130, 131.

une Hyperbole qui passe par le point $H$. Je dis qu'elle sera le lieu de cette équation ou formule.

$$xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x + \frac{mrs}{e} = 0.$$
$$-rx \quad - mp$$

Car $GM = y - \frac{nx}{m} - r$, $CG = \frac{ex}{m} - s$, & par la proprie- * *Art.* 101.
té de l'Hyperbole * $CG \times GM\ (\frac{exy}{m} - sy - \frac{enxx}{mm} + \frac{nsx}{m} - \frac{erx}{m} + rs) = CK \times KH\ (ep)$; ce qui donne, en délivrant le terme $xy$ de fractions, & mettant par ordre tous les termes, la même équation $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y$ &c. que cy-dessus.

2°. On menera par le point fixe $A$, une ligne indé- Fig. 181.
finie $AQ$ parallele à $PM$ & du même côté; & ayant pris sur cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallele à $AP$ & du même côté, & par les points déterminés $A$, $E$, la ligne $AE$ que j'appelle $e$; & ayant pris sur $AP$ la partie $AD = r$ du côté de $PM$, on tirera la droite indéfinie $DG$ parallele à $AE$, sur laquelle on prendra les parties $DC = s$, $CK = e$ du côté que s'étend $PM$, & on menera parallelement à $AP$ & du même côté, la droite indéfinie $CL$ & la ligne $KH = p$. On décrira ensuite * entre les asymptotes * *Art.* 130.
$CL$, $CK$, une Hyperbole qui passe par le point $H$. 131.
Je dis qu'elle sera le lieu de cette seconde équation ou formule.

$$xy - \frac{n}{m}yy - \frac{ms}{e}x + \frac{ns}{e}y + \frac{mrs}{e} = 0.$$
$$-ry \quad - mp$$

Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$, la ligne $MQ$ parallele à $AP$, & qui rencontre les paralleles $AE$, $DG$, aux points $F$, $G$; les triangles semblables $ABE$, $AQF$, donneront $AB\ (m).\ AE\ (e) :: AQ$ ou $PM\ (y).\ AF$ ou $DG = \frac{ey}{m}$, & $AB\ (m).\ BE\ (n) :: AQ\ (y).\ QF = \frac{ny}{m}$. Et par conséquent $GM = x$

$-\frac{q}{m}-r$, $CG=\frac{q}{m}-s$. Or par la proprieté de l'Hyperbole $CG \times GM = CK \times KH$, ce qui donne, en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques, & délivrant le terme $xy$ de fractions, la même seconde formule que ci-dessus. Donc &c.

### COROLLAIRE.

338. Il est clair 1°. Que le terme $xy$ se rencontre toûjours dans ces deux formules, puisque n'étant multiplié par aucune fraction, on ne peut point la supposer nulle pour le faire évanoüir. 2°. Qu'il ne s'y peut rencontrer que l'un des quarrés $xx$ ou $yy$, lequel s'évanoüit si la fraction $\frac{n}{m}$ qui le multiplie est nulle.

## PROPOSITION V.

### Problême.

339. TROUVER *le lieu d'une équation donnée dans laquelle le plan* xy *se rencontre, sans aucun des quarrés* xx *&* yy, *ou seulement avec l'un des deux.*

On délivrera le plan $xy$ de fractions, & on comparera les termes de l'équation donnée avec ceux qui luy répondent dans la premiere formule lorsque le quarré $xx$ s'y rencontre, & avec ceux de la seconde lorsque c'est le quarré $yy$, & enfin avec celle des deux qu'on voudra lorsque pas un des quarrés $xx$ & $yy$ ne s'y trouve. On tirera ensuite de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités $m$, $n$, $p$, $r$, $s$, par le moyen desquelles on décrira une Hyperbole entre ses asymptotes comme l'on a enseigné dans le Lemme précédent, en observant toûjours de mener ou de prendre du côté opposé à $AP$ & à $PM$ les lignes dont les valeurs sont négatives. Les exemples qui suivent éclairciront ces régles.

## EXEMPLE I.

340. On demande le lieu de $xy - \frac{b}{a}xx - cy = o$.

Comme c'eſt le quarré $xx$ qui ſe rencontre dans l'équation donnée, je choiſis la premiere formule, & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, 1°. $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$, d'où en faiſant $m = a$, je tire $n = b$. 2°. $\frac{ms}{e} = c$, & partant $s = \frac{ec}{a}$. 3°. $\frac{ns}{e} - r = o$, parce que l'inconnuë $x$ ne ſe trouve point au premier degré dans l'équation donnée, & partant $r = \frac{bc}{a}$. 4°. $\frac{mns}{e} - mp = o$, parce qu'il ne ſe trouve point de termes entierement connus; & partant $p = \frac{ns}{e} = \frac{bce}{aa}$. Or comme les valeurs de $AP$ ($m$), $BE$ ($n$), $CD$ ($s$), $AD$ ($r$), $KH$ ($p$) ſont toutes poſitives, je conſtruis le lieu préciſément comme dans le Lemme (*fig.* 180.) en obſervant de prendre pour les lignes les valeurs que l'on vient de trouver.

Car $GM = y - \frac{bx}{a} - \frac{bc}{a}$, $CG$ ou $DG - DC = \frac{bx - ec}{a}$, FIG. 180.
& par la proprieté de l'Hyperbole $CG \times GM = CK \times KH$ c'eſt à dire, en mettant les valeurs analytiques, l'équation même donnée. Donc &c.

## EXEMPLE II.

341. Soit $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = o$, l'équation dont il faut conſtruire le lieu.

Comme c'eſt le quarré $yy$ qui ſe trouve dans l'équation donnée, je choiſis la ſeconde formule, & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, 1°. $\frac{n}{m} = - \frac{b}{a}$, & ſi l'on fait $m = a$, on aura $n = - b$. 2°. $\frac{ms}{e} = o$, & partant $s = o$. 3°. $r = c$. 4°. $mp = ff$, &

partant $p = \frac{ff}{a}$. Ce qui donne la construction suivante.

FIG. 182. Ayant mené par le point fixe $A$, une ligne indéfinie $AQ$ parallele à $PM$ & du même côté, & ayant pris sur cette ligne, la partie $AB$ $(m) = a$, je tire $BE = b = -n$ parallele à $AP$ & du côté opposé, & par les points déterminés $A$, $E$, la ligne $AE$ $(e)$. Je prends sur $AP$; la partie $AD$ $(r) = c$ du côté de $PM$, & je tire la droite indéfinie $DG$ parallele à $AE$, & comme les points $D$, $C$, tombent l'un sur l'autre, parce que $DC$ $(s) = o$, je prends sur cette ligne la partie $DK = e$ du côté que s'étend $PM$, & ayant mené parallelement à $AP$ & du même côté la ligne $KH$ $(p) = \frac{ff}{a}$, & la droite indéfinie $DL$ qui tombe ici sur $AP$, je décris entre les Asymptotes $DL$, $DK$, une Hyperbole qui passe par le point $H$. Je dis qu'elle sera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$, la droite $MQ$ parallele à $AP$ & qui rencontre les paralleles $AE$, $DG$, aux points $F$, $G$, on aura $GM$ ou $MQ + QF - FG = x + \frac{by}{a} - c$, $DG$ ou $AF = \frac{ey}{a}$, & partant $DG \times GM = \frac{exy}{a} + \frac{ebyy}{aa} - \frac{ecy}{a} = DK \times KH$ $(\frac{eff}{a})$. Ce qui donne, en délivrant le terme $xy$ de fractions, l'équation proposée $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = o$.

## REMARQUE.

342. Si l'on prend pour l'arbitraire $AB$ $(m)$ une autre valeur que $a$, celles de $CK$ $(e)$ & de $KH$ $(p)$ changeront, mais les valeurs du réctangle $CK \times KH$ $(ep)$, & des droites $AD$ $(r)$, $CD$ $(s)$ demeureront toûjours les mêmes; car elles ne renferment dans leurs expressions que les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{n}{e}$, $\frac{m}{e}$, qui ne chan-

gent point, puiſque dans le triangle *ABE* l'angle *ABE* eſt donné, & la raiſon $\frac{n}{m}$ (qui dans cet exemple eſt $\frac{b}{a}$) du côté *AB* (*m*) au côté *BE* (*n*). Or comme l'Hyperbole qui doit paſſer par le point *H*, ſera toûjours la même *, telle grandeur que l'on puiſſe donner à *CK* (*e*) & à *KH* (*p*), pourvû que le réctangle *CK*×*KH* demeure le même; il s'enſuit que l'on conſtruira toûjours la même Hyperbole, telle grandeur que l'on puiſſe prendre pour l'arbitraire *AB* (*m*). * *Art.* 101.

EXEMPLE III.

343. Il faut conſtruire le lieu de l'équation donnée $xy - ay + bx + cc = o$.

Comme pas un des quarrés *xx* & *yy* ne ſe trouve dans l'équation propoſée, je puis prendre indifferemment l'une ou l'autre des deux formules, par exemple, la premiere, de laquelle comparant les termes avec ceux de la propoſée, j'ai 1°. $\frac{n}{m} = o$, & partant $n = o$, & $m = e$; je fais $m = a$. 2°. $\frac{ns}{e}$ ou $s = a$. 3°. $r = -b$, puiſque $\frac{ns}{e} = o$. 4°. $rs - mp = cc$, & partant $p = -b - \frac{cc}{a}$. Or ces valeurs de *m*, *n*, *r*, *s*, *p*, étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu de la maniere qui ſuit. FIG. 185.

Puiſque *AD* (*r*) $= -b$, je mene parallelement à *PM* & du côté oppoſé la ligne $AD = b$; & puiſque *BE* (*n*) $= o$, je tire la droite indéfinie *DG* parallele à *AP* ſur laquelle ayant pris les parties *DC* (*s*) $= a$, *CK* (*e*) $= m = a$ du côté que s'étend *AP*, je tire la droite indéfinie *CL*, & la ligne $KH = b + \frac{cc}{a} = -p$ parallele à *PM* & du côté oppoſé. Je décris enſuite l'Hyperbole oppoſée à celle qui ayant pour Aſymptotes les droites *CL*, *CK*, paſſe par le point *H*. Je dis

que sa portion indéfinie $QM$ renfermée dans l'angle $PAS$, fait par la droite indéfinie $AP$ & par la ligne $AS$ menée parallelement à $PM$ & du même côté, sera le lieu cherché.

Car $GM$ ou $PG + PM = y + b$ & $CG$ ou $CD - DG = a - x$, & par conséquent $CG \times GM = ay - xy + ab - bx = CK \times KH\ (ab + cc)$; ce qui, en effaçant de part & d'autre le réctangle $ab$, & transposant à l'ordinaire, donne $xy - ay + bx + cc = 0$ qui est l'équation proposée.

Il auroit été inutile dans cet Exemple de décrire l'Hyperbole qui passe par le point $H$; car aucun de ses points ne pourroit tomber dans l'angle $PAS$, où l'on suppose que doivent tomber les points $M$.

### REMARQUE.

344. S'il arrivoit qu'en comparant les termes de la formule avec ceux de l'équation donnée, on trouvât que $p = 0$; on voit qu'il seroit alors impossible de décrire l'Hyperbole qui en devroit être le lieu, puisque sa puissance qui est égale au réctangle $pe$ seroit nulle. Mais alors l'équation se pourroit toûjours abaisser, en sorte que son lieu deviendroit une ligne droite; car effaçant par exemple dans la premiere formule du Lemme le terme $mp$, elle devient $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x - rx + \frac{mrs}{e} = 0$, qui étant divisée par $\frac{ex}{m} - s$ donne $y - \frac{nx}{m} - r = 0$, dont le lieu * est une ligne droite.

* Art. 306.

## PROPOSITION V.

### Problême.

345. CONSTRUIRE *tout lieu du second degré, son équation étant donnée.*

Tous les termes de l'équation étant mis d'un même côté, en sorte que l'un des membres soit zero, je distingue deux differens cas.

*Premier cas.* Lorsque le plan $xy$ ne se trouve point dans l'équation donnée. 1°. S'il n'y a que l'un des quarrés $yy$ ou $xx$, le lieu sera une * Parabole. 2°. Si les deux quarrés $yy$ & $xx$ s'y trouvent avec les mêmes signes, le lieu sera une * Ellipse ou un cercle. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec differens signes, le lieu sera une * Hyperbole ou deux Hyperboles opposées rapportées à ses diametres.

* *Art.* 310.
* *Art.* 324.
* *Art.* 332.

*Second cas.* Lorsque le plan $xy$ se trouve dans l'équation donnée. 1°. Si pas un des quarrés $yy$ & $xx$ ne s'y rencontre ou seulement l'un des deux, le lieu sera * une Hyperbole entre ses Asymptotes. 2°. Si les deux quarrés $yy$ & $xx$ s'y trouvent avec differens signes, le lieu sera * une Hyperbole rapportée à ses diametres. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec les mêmes signes, on délivrera le quarré $yy$ de fractions, & le lieu sera * une Parabole lorsque le quarré de la moitié de la fraction qui multiplie $xy$ est égal à la fraction qui multiplie le quarré $xx$; une * Ellipse ou un cercle lorsqu'il est moindre; & enfin une * Hyperbole ou deux Hyperboles opposées rapportées à ses diametres lorsqu'il est plus grand.

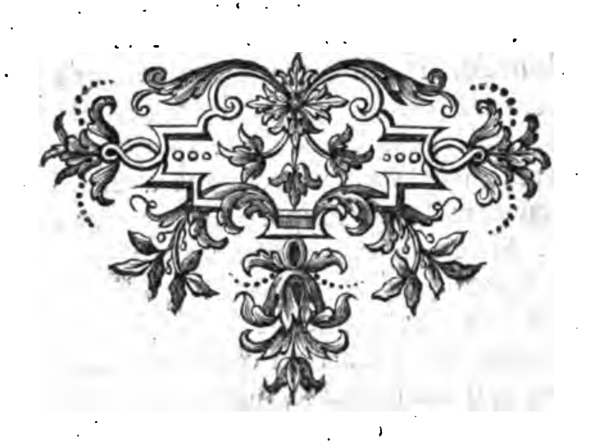
* *Art.* 339.
* *Art.* 332.
* *Art.* 310.
* *Art.* 324.
* *Art.* 332.

On décrira le lieu selon l'article 310. s'il est une Parabole; selon l'article 324. s'il est une Ellipse ou un cercle; selon l'article 332. s'il est une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées rapportées à ses diametres; & enfin selon l'article 339. si c'est une Hyperbole entre ses Asymptotes. Tout ceci n'est qu'une suite de ces quatre articles.

### COROLLAIRE.

346. UNE équation du second degré étant donnée, comme la Section Conique que l'on trouve par

* Art. 314. les régles prescrites est le lieu * de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë $y$, qui répondent aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë $x$; il s'ensuit qu'il ne peut y avoir que cette seule Séction qui soit le lieu de l'équation donnée.



# LIVRE HUITIÉME.

## *Proposition generale.*

347. TROUVER *le lieu d'une infinité de points qui ayent tous certaines conditions marquées; lorsque ce lieu ne passe point le second degré.* FIG. 184.

1°. On supposera comme connuës & déterminées deux lignes droites inconnuës & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$, qui fassent entr'elles un angle $APM$ donné ou pris à discretion; & dont l'une $AP$ ait une origine fixe & invariable en un point $A$, & s'étende le long d'une ligne donnée de position; & l'autre $PM$ qui détermine toûjours par son extremité $M$, l'un des points cherchés, change continuellement d'origine, & soit toûjours parallele à la même ligne. 2°. On tirera les autres lignes que l'on jugera utiles à la solution du Problême, & on les exprimera par des lettres; sçavoir, les connuës par les premieres lettres de l'Alphabet, & les inconnuës par les dernieres. 3°. On regardera la question comme resoluë, & aprés en avoir parcouru toutes les conditions, on arrivera enfin à une équation qui ne renfermera que les deux inconnuës $x$ & $y$ mêlées avec des connuës. 4°. Cette équation dans laquelle on suppose que les inconnuës $x$ & $y$ ayent au plus deux dimensions, étant formée, on en construira le lieu selon les regles prescrites dans le Livre précédent; & le lieu ainsi construit resoudra la question. Tout ceci s'éclaircira par les Exemples qui suivent.

### EXEMPLE I.

348. TROUVER dans l'angle donné $BAC$ le point $M$, tel qu'ayant mené de ce point les deux droites $MF$, $MG$, qui fassent sur les côtés $AB$, $AC$, toûjours vers la même part, des angles donnés $MFB$, $MGC$; la FIG. 184.

droite $MF$ soit toûjours à la droite $MG$ en la raison donnée de $a$ à $b$. Et comme il y a une infinité de ces points, on demande la ligne qui les renferme tous, & qui en est par conséquent le lieu.

Par le point $M$, que l'on suppose être un des points cherchés, ayant mené la ligne $MP$ parallele à $AC$; on considerera les deux droites inconnuës & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$, comme connuës & déterminées. On prendra sur le côté $AB$ la partie $AB = a$, on tirera les droites $BC$, $BD$, paralleles à $MF$, $MG$, & qui rencontrent aux points $C$, $D$, l'autre côté $AC$ prolongé, s'il est necessaire; & on nommera les connuës $AC$, $c$; $BC$, $f$; $BD$, $g$. Presentement menant $MQ$ parallele à $AB$, les triangles semblables $ACB$, $PMF$, & $ABD$, $QMG$, donneront ces deux proportions: $AC(c) . CB(f) :: MP(y) . MF = \frac{fy}{c}$, & $AB(a) . BD(g) :: MQ$ ou $AP(x) . MG = \frac{gx}{a}$; ce qui satisfait à la premiere condition du Problême, puisque les lignes $MF$, $MG$, sont toûjours supposées paralleles aux deux mêmes droites $BC$, $BD$, qui font sur les côtés $AB$, $AC$, les angles donnés. Or par la seconde condition qui reste à accomplir, il faut que $MF(\frac{fy}{c}) . MG(\frac{gx}{a}) :: a . b$; d'où l'on tire l'équation $y = \frac{cgx}{bf}$ qui renferme toutes les conditions du Problême, & dont le lieu sera par conséquent
*Art. 306. celui que l'on cherche. Il se construit * ainsi.

Ayant pris sur la ligne $AP$, la partie $AH = b$, soit menée $HE = \frac{cg}{f}$ parallele à $PM$ & du même côté, & soit tirée la droite indéfinie $AE$. Je dis qu'elle sera le lieu de tous les points cherchés $M$.

Car ayant mené par un de ses points quelconques $M$ les droites $MP$, $MQ$, paralleles aux deux côtés $AC$, $AB$, & les droites $MF$, $MG$, paralleles à $BC$, $BD$, & qui font par conséquent sur les deux côtés $AB$, $AC$, les angles donnés; on aura à cause des triangles sembla-

bles $AHE$, $APM$, cette proportion; $AH$ ($b$). $HE$ ($\frac{g}{f}$) :: $AP$ ($x$). $PM$ ($y$) $= \frac{gx}{bf}$, & à cause des triangles semblables $ACB$, $PMF$, & $ABD$, $QMG$, ces deux autres: $AC$ ($c$). $CB$($f$) :: $MP$ ($\frac{cgx}{bf}$). $MF$ $= \frac{gx}{b}$; & $AB$($a$). $BD$ ($g$) :: $MQ$ ou $AP$ ($x$). $MG$ $= \frac{gx}{a}$. Et par conséquent $MF$ ($\frac{gx}{b}$). $MG$($\frac{gx}{a}$) :: $a.b$. Ce qui étoit proposé.

Je n'ai resolu cette question par le calcul, que pour la rapporter à la Proposition générale, & commencer par des Exemples simples & aisés à en faire voir l'application; car on peut resoudre ce Problême sans aucun calcul, & d'une maniere plus facile en cette sorte.

Soient tirées les droites $AK$, $AL$, qui fassent sur $AB$, $AC$, les angles donnés $KAB$, $LAC$, & qui soient entr'elles en la raison donnée de $a$ à $b$. Soient menées les droites $KM$, $LM$, paralleles aux côtés $AB$, $AC$, & qui se rencontrent au point $M$; par où, & par le sommet $A$ de l'angle donné $BAC$, soit tirée la ligne $AM$: Je dis qu'elle sera le lieu cherché. FIG. 185.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques $E$ les droites $ER$, $ES$, paralleles à $AK$, $AL$; on aura à cause des triangles semblables $AER$, $MAK$, & $AES$, $MAL$, ces proportions $ER$. $AK$ :: $AE$. $AM$ :: $ES$. $AL$. Et partant $ER$. $ES$ :: $AK$. $AL$ :: $a$. $b$.

### EXEMPLE II.

349. Les paralleles $AB$, $CD$, étant données de position; trouver le lieu de tous les points $M$ tellement placés entre ces lignes, qu'ayant tiré les droites $MP$, $MG$, qui fassent avec elles toûjours vers la même part des angles donnés $MPB$, $MGD$; elles soient toûjours entr'elles en la raison donnée de $a$ à $b$. FIG. 186.

Ayant pris pour l'origine fixe des indéterminées $AP$ ($x$), un point quelconque $A$ de la ligne $AB$, & les deux

droites inconnuës & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$ étant supposées connuës & déterminées, on menera les lignes $AC$, $AE$, paralleles aux deux droites $MP$, $MG$; & on nommera les connuës $AC, c$; $AE, f$; Cela fait, on prolongera $PM$ jusqu'à ce qu'elle rencontre $CD$ en $F$; & les triangles semblables $CAE$, $FMG$, donneront $AC(c). AE(f) :: MF(c-y). MG = \frac{cf-fy}{c}$. Or selon la condition du Problême qui reste à accomplir, il faut que $MP(y). MG(\frac{cf-fy}{c}) :: a. b$; d'où l'on tire l'équation $y = \frac{acf}{bc+af}$ qui renferme toutes les con-

*Art. 307. ditions du Problême, & dont le lieu qui est * une ligne droite indéfinie $HM$ menée parallelement à $AB$ en sorte que $AH = \frac{acf}{bc+af}$, est par conséquent le lieu cherché.

EXEMPLE III.

350. DEUX points $A, B$, étant donnez, en trou-

FIG. 187. ver un troisiéme $M$, tel qu'ayant mené les droites $MA$, $MB$; elles soient toûjours entr'elles en raison donnée de $a$ à $b$. Et comme il y a une infinité de ces points $M$, il est question de décrire le lieu qui les renferme tous.

Il peut arriver trois differens cas selon que $a$ est moindre, plus grand, ou égal à $b$.

*Premier cas.* Par le point $M$, que je suppose être un de ceux qu'on cherche, ayant mené la ligne $MP$ perpendiculaire sur $AB$ (car n'y ayant point d'angle donné dans le Problême, on choisit l'angle droit comme le plus simple), & les deux droites inconnuës & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$ étant supposées connuës & déterminées; on nommera la donnée $AB, c$; & à cause des triangles rectangles $APM$, $BPM$, on aura les quarrés $\overline{AM}^2 = xx+yy$, $\overline{BM}^2 = cc-2cx+xx+yy$. Or par la condition du Problême, $\overline{AM}^2 (xx+yy). \overline{BM}^2 (cc-2cx+xx+yy) :: aa. bb$. D'où (en mul-

tipliant les extrêmes & les moyens & divisant ensuite par $bb-aa$) on forme cette équation $yy+xx+\frac{2aacx}{bb-aa}-\frac{aacc}{bb-aa}=0$, qui renferme la condition du Problême, & dont le lieu qui est par conséquent celui qu'on demande, se construit par le moyen de l'article 322. (Liv. préced.) en cette sorte.

Soit prise sur la ligne $AP$, la partie $AC=\frac{aac}{bb-aa}$ du côté opposé à $PM$; & soit décrite du centre $C$, & du rayon $CD$ ou $CE=\frac{abc}{bb-aa}$ la circonference d'un cercle. Je dis que sa portion $DMO$ renfermée dans l'angle $PAO$, fait par la ligne $AP$ & par la droite $AO$ menée parallelement à $PM$ & du même côté, sera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver. Fig. 187.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques $M$, la perpendiculaire $MP$ sur $AB$, on aura par la proprieté du cercle $\overline{CD}^2-\overline{CP}^2$ ou $ER\times PD=\overline{PM}^2$; c'est à dire en mettant pour ces quarrés leurs valeurs analytiques, l'équation précedente.

Si l'on suppose à present que les points $M$ tombent dans l'angle $EAR$ opposé au sommet à l'angle $BAO$ dans lequel on a supposé en faisant le calcul qu'ils étoient situés, on trouvera en faisant * $AP=-x$, & $PM=-y$, la même équation que ci-dessus, tant par la condition du Problême, que par la proprieté de la portion $RME$ de la même circonference que l'on vient de décrire; d'où il suit que cette portion est le lieu de tous les points cherchés $M$, lorsqu'ils tombent dans l'angle $RAE$. Et si l'on suppose enfin que les points $M$ tombent dans l'angle $BAR$ & ensuite dans l'angle $EAO$, on trouvera de même (en observant de faire $PM=-y$, lorsqu'il tombe de l'autre côté de la ligne $AB$; & $AP=-x$, lorsque le point $P$ tombe de l'autre côté du point fixe $A$) que les portions $DR$, $EO$, de la même circonference seront les lieux de ces points; & qu'ainsi la circonferen- *Art. 304.

ce entiere qui a pour diametre la ligne *DE*, est le lieu complet de tous les points requis *M*.

*Second cas.* On trouvera par un raisonnement semblable à celui du premier cas, cette équation $yy + xx - \frac{2aacx}{aa - bb} + \frac{aacc}{aa - bb} = o$, dont le lieu se construit ainsi.

FIG. 188. Soit prise sur *AP*, la partie $AC = \frac{aac}{aa - bb}$ du côté de *PM*; & soit décrite du centre *C*, & du rayon *CD* ou $CE = \frac{abc}{aa - bb}$ un cercle. Je dis que sa circonference sera le lieu de tous les points requis *M*. Cela se prouve de même que dans le premier cas.

Si l'on considere dans ces deux cas que la circonference qui a pour diametre *DE*, & qui est le lieu de tous les points cherchés *M*, doit couper la ligne *AB* en deux points *D*, *E*, tels que *AD*. *DB* :: *a*. *b*, & *AE*. *EB* :: *a*. *b*; puisque le point *M* tombant en *D* la droite *AM* devient *AD*; & *BM*, *BD*; & de même que le point *M* tombant en *E*, la droite *AM* devient *AE*, & *BM*, *BE*: on abregera de beaucoup les constructions précedentes. Car il est visible qu'ayant divisé la ligne *AB* prolongée, du côté qu'il sera necessaire, en deux points *D*, *E*, tels que *AD*. *DB* :: *a*. *b*, & *AE*. *EB* :: *a*. *b*; la ligne *DE* sera en l'un & l'autre cas le diametre de la circonference qui est le lieu cherché.

*Troisiéme cas.* Puisque dans ce cas $a = b$, l'équation
* Art. 307. précedente se change en celle-ci $x = \frac{1}{2}c$; d'où l'on voit *
FIG. 189. que si l'on prend *AP* égale à la moitié de *AB* & qu'on tire la droite *PM* perpendiculaire sur *AB*, cette ligne *PM* indéfiniment prolongée de part & d'autre, sera le lieu de tous les points requis *M*. Ce qui est d'ailleurs évident par les Elemens de Geometrie.

## EXEMPLE IV.

FIG. 190. 351. DEUX lignes droites *DE*, *DN*, indéfiniment prolongées de part & d'autre du point *D*, étant données

de position sur un plan, avec un point $C$ hors de ces lignes ; soit imaginé un angle donné $CEM$ se mouvoir par son sommet $E$ le long de $DE$, en sorte que son côté $EC$ qui rencontre $DN$ en $N$, passe toûjours par le même point $C$, & que son autre côté $EM$ soit toûjours troisiéme proportionnel à $NC$, $CE$. On demande le lieu de tous les points $M$ dans ce mouvement.

Soient menées $CA$ parallele à $DN$; & $CB$ qui fasse sur $DE$ au point $B$ un angle égal à l'angle donné $CEM$, du côté qu'il sera necessaire, afin que $CE$ tombant sur $CB$ la droite $EM$ tombe sur $DE$. Cela posé, je distingue la question en trois differens cas : car ou le sommet $E$ de l'angle donné $CEM$ se meut sur la droite $DE$ de l'autre côté du point $B$ par rapport au point $A$ ; ou entre les points $B$, $A$ ; ou enfin de l'autre côté du point $A$ par rapport au point $B$.

*Premier cas.* Lorsque le sommet $E$ se meut sur la ligne $DE$ de l'autre côté du point $B$ par rapport au point $A$. Ayant mené du côté du point $C$ la ligne $AQ$ qui fasse sur $DE$ au point $A$ l'angle $BAQ$ égal à l'angle $ABC$, on tirera par l'un des points cherchés $M$, que l'on regarde comme donné, la ligne $MP$ parallele à $AQ$, & qui rencontre $DE$ en $P$ ; & on aura deux triangles semblables $CBE$, $EPM$ ; car les deux angles $CBE$, $EPM$, sont égaux chacun à l'angle donné $CEM$, & de plus les angles $BCE$, $PEM$, sont aussi égaux entr'eux ; puisque dans le triangle $CBE$ l'angle externe $CEP$ ou $CEM + PEM$ est égal aux deux internes opposés $BCE$ & $CBE$ ou $CEM$. Si donc l'on nomme les données $AD$, $a$ ; $AB$, $b$ ; $BC$, $c$ ; & les inconnuës & indéterminées $AP$, $x$ ; $PM$, $y$ ; $AE$, $z$ ; on aura, tant à cause des paralleles $DN$, $AC$, que de la condition du Problême, ces proportions $AD(a) . AE(z) :: CN . CE :: CE . EM :: CB(c) . EP(x-z) :: BE(z-b) . PM(y)$ ; d'où l'on forme (en multipliant les extrêmes & les moyens) ces deux équations $ax - az = cz$ & $ay = zz - bz$, qui, en prenant, pour abreger,

$f=a+c$, & faiſant évanoüir $z$, ſe reduiſent à celle-ci $xx-\frac{bf}{a}x-\frac{ff}{a}y=o$ qui ne renferme plus que les inconnuës $x$ & $y$, & dont le lieu, qui eſt celui que l'on cherche, ſe conſtruit * ainſi.

* Art. 310.

Soit priſe ſur la ligne $AP$, la droite $AF=\frac{bf}{2a}$ du côté de $PM$; & ayant mené $FL$ parallele à $PM$, ſoit priſe ſur cette ligne du côté oppoſé à $PM$, la partie $FG=\frac{bb}{4a}$. Soit décrite du diametre $GL$ qui ait pour origine le point $G$, pour parametre $GH=\frac{ff}{a}$, & pour ordonnées des droites $LM$ paralleles à $AP$, une Parabole qui s'étende du côté de $PM$. Je dis que ſa portion indéfinie $OM$ renfermée dans l'angle $PAQ$, ſera le lieu de tous les points cherchés $M$.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques $M$, la ligne $MQ$ parallele à $AP$ & qui rencontre le diametre $CL$ en $L$, on aura $ML$ ou $PF=x-\frac{bf}{2a}$ & $GL=y+\frac{bb}{4a}$, & par la proprieté de la Parabole, $\overline{ML}^2$ $\left(xx-\frac{bf}{a}x+\frac{bbff}{4aa}\right)=LG\times GH\left(\frac{ff}{a}y+\frac{bbff}{4aa}\right)$; ce qui en tranſpoſant à l'ordinaire donne l'équation $xx-\frac{bf}{a}x-\frac{ff}{a}y=o$, qu'il falloit conſtruire.

*Second cas.* Lorſque le ſommet $E$ parcourt la partie $BA$, Il eſt clair dans ce cas que les points $M$ tomberont de l'autre côté de $DE$, puiſque l'angle donné $CEM$ ſera toûjours plus grand que l'angle $CEP$ qui diminuë continuellement. C'eſt pourquoi j'ai $PM=-y$, & comme je trouve par un raiſonnement ſemblable au précedent, la même équation; il s'enſuit que la portion $AGO$ de la Parabole que l'on vient de décrire, ſera le lieu de tous les points $M$, puiſqu'elle donne auſſi par ſa proprieté cette même équation.

*Troiſiéme cas.* Lorſque le ſommet ſe meut de l'autre côté

côté du point *A* par rapport au point *B*. Il eſt clair encore dans ce cas que tous les points cherchés *M* doivent tomber au deſſous de la ligne *DE*; & on trouvera comme dans le premier cas *AD*. *AE* :: *CN*. *CE* :: *CF*. *FM* :: *CB*. *EP*. Et partant *AD*. *CB* :: *AE*. *EP*. D'où l'on voit que *EP* eſt plus grande, moindre, ou égale à *EA* ſelon que *CB* eſt plus grande, moindre, ou égale à *AD*; & qu'ainſi prolongeant *AQ* au deſſous de *DE* vers *K*, tous les points cherchés *M* tombent dans l'angle *BAK* dans le premier de ces trois cas, dans ſon complement à deux droits *DAK* dans le ſecond cas, & enfin ſur la droite *AK* dans le troiſiéme cas. Je ſuppoſe ici que *CB* ſoit plus grande que *AD*; & comme faiſant $PM = -y$, parce qu'il tombe de l'autre côté de *AP*, je ne trouve plus la même équation que dans le premier cas, je ne fais plus d'attention à la conſtruction de ce cas. C'eſt pourquoi nommant à l'ordinaire *AP*, $x$; *PM*, $y$; j'arrive à cette équation $xx + \frac{bg}{a}x - \frac{gg}{a}y = 0$, dans laquelle $g = c - a$, dont le lieu qui eſt celui que l'on cherche eſt une portion indéfinie *AM* d'une autre Parabole que la précedente laquelle s'étend vers le côté oppoſé, & qui ſe conſtruit * en cette ſorte. * *Art.* 310.

Soit priſe ſur *AP* de l'autre côté de *PM* la partie $AS = \frac{bg}{2a}$; ſoit menée $ST = \frac{bb}{4a}$ parallele à *AQ*, & du côté oppoſé à *PM*; ſoit décrite du diametre *TS* qui ait pour origine le point *T*, pour parametre une ligne $= \frac{gg}{a}$, & pour ordonnées des droites paralleles à *AP*, une Parabole qui s'étende du côté de *PM*. Sa portion indéfinie *AM* renfermée dans l'angle *PAK* ſera le lieu de tous les points cherchés *M* dans ce dernier cas, où l'on ſuppoſe que *CB* ſurpaſſe *AD*.

Il eſt donc évident que le lieu cherché de tous les points *M* eſt composé de deux portions indéfinies de differentes Paraboles, dont l'une *AGOM* s'étend du côté de *C*, & l'autre *AM* du côté oppoſé, & partent

toutes deux du point $A$; car le côté $CE$ de l'angle donné $CEM$ tombant sur $CA$ parallele à $DN$, il est clair que $CN$ devient infinie, & qu'ainsi $EM$ est nulle ou zero, puisqu'on a toûjours $NC. CE :: CE. EM$: c'est à dire que le point $M$ se confond avec le point $E$ qui tombe sur le point $D$. D'où l'on voit que $AF$ est une ordonnée au diametre $FG$, & $AS$ au diametre $ST$; ce qui donne lieu à la construction suivante qui est generale.

Ayant pris sur la ligne indéfinie $AP$ de part & d'autre du point $B$ les parties $BO$, $BR$, égales chacune à la quatriéme proportionnelle aux trois lignes $DA$, $AB$, $BC$; on menera par les points de milieu $F$, $S$, l'un de $AO$, l'autre de $AR$, les droites $FG$, $ST$, paralleles à $AQ$, & égales chacune à la troisiéme proportionnelle à $4AD$, & à $AB$; sçavoir, $FG$ du côté opposé au point $C$, & $ST$ du même côté. Cela fait, on décrira deux differentes Paraboles dont l'une aura pour diametre $GF$ & pour ordonnée $FA$, & l'autre pour diametre $TS$ & pour ordonnée $SA$; je dis que leurs portions indéfinies $MAGOM$ feront le lieu complet de tous les points cherchés $M$.

Car $BO$ ou $BR = \frac{bc}{a}$, & partant $AF$ ou $\frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}b + \frac{bc}{2a} = \frac{bf}{2a}$; & de même $AS$ ou $\frac{1}{2}AR = \frac{bc}{2a} - \frac{1}{2}b = \frac{bg}{2a}$. Donc &c.

On peut remarquer en passant que si l'angle donné, qui se meut par son sommet le long de la ligne $DE$, étoit égal au complement à deux droits de l'angle $CEM$, sans rien changer au reste; c'est à dire que les points $M$ tombassent sur la ligne $EM$ prolongée de l'autre côté du point $E$: le lieu de tous les points $M$ seroit alors les portions restantes des deux Paraboles que l'on vient de décrire.

Si les points $A$, $B$, $C$, étoient situés differemment de ce qu'on les suppose dans cette figure, à laquelle on a accommodé le raisonnement; on arriveroit toûjours

comme l'on vient de faire à deux équations qui ne pourroient être differentes des précedentes que par quelques signes, & dont les lieux seroient par consequent des portions de Paraboles que l'on décriroit avec la même facilité.

Le Comte *Roger de Vintimille* a proposé ce Problême avec quelques autres dans le Journal de Parme du mois d'Avril de l'année 1693. ce qui a donné occasion au Pere *Saquerius* de faire imprimer un petit livre à Milan, dans lequel il avouë qu'il n'a pû resoudre celui-ci, quoiqu'il fasse assez paroître par la solution des autres qu'il est fort versé dans la Geometrie.

## EXEMPLE V.

352. UNE ligne droite indéfinie $AP$ étant donnée de position, avec deux points fixes $A$, $C$, l'un sur cette droite, & l'autre au dehors; soit décrite une Parabole $AM$ qui ait pour parametre une ligne quelconque, & pour axe la ligne $AP$ dont l'origine soit en $A$; & soit menée du point donné $C$ une perpendiculaire $CM$ à cette Parabole. On demande le lieu de tous les points $M$, dont il est visible qu'il y a une infinité; puisque changeant continuellement de parametres, on peut décrire une infinité de Paraboles differentes, qui ayent toutes pour axes la même droite indéfinie $AP$, dont l'origine soit toûjours en $A$. FIG. 191.

Ayant mené par le point donné $C$ la perpendiculaire $CB$ sur $AP$, & par un des points cherchés $M$ que l'on regarde comme donné, les droites $MP$, $MK$, paralleles à $BC$, $AP$, & la tangente $MT$; on nommera les données $AB$, $a$; $BC$, $b$; & les inconnuës & indéterminés $AP$, $x$; $PM$, $y$; ce qui donne $CK = b - y$, $MK = a + x$. Or par la condition du Problême, l'angle $CMT$ est droit; & par consequent les triangles rectangles $TPM$, $CKM$, seront semblables; car si l'on ôte des angles droits $CMT$, $KMP$, le même angle $KMT$,

*Art. 22. & 23. les restes $CMK$, $TMP$, seront égaux. Donc $TP$* $(2x)$. $PM$ $(y)$ :: $CK$ $(b-y)$. $KM$ $(a+x)$, d'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $yy-by+2xx+2ax=0$; dont le lieu qui est celui qu'on demande est * une Ellipse que l'on construit * en cette sorte.

*Art. 322.

*Art. 324.

Ayant mené $AD=\frac{1}{2}b$ perpendiculaire à $AP$ & du côté de $PM$, & tiré la droite indéfinie $DL$ parallele à $AP$, on prendra sur cette ligne la partie $DE=\frac{1}{2}a$ du côté opposé à $PM$; & de part & d'autre du point $E$ les parties $EF$, $EG$ égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{8}bb}$. Ensuite de l'axe $FG$ qui ait pour parametre une ligne $GH$ double de $FG$, on décrira une Ellipse. Je dis que sa portion $AMO$ renfermée dans l'angle $PAD$ est le lieu de l'équation précedente; & par conséquent de tous les points cherchés $M$, lorsqu'ils tombent dans cet angle.

Car prolongeant $PM$, s'il est necessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe $FG$ en $L$, on aura l'ordonnée $ML=\frac{1}{2}b-y$, & $EL=\frac{1}{2}a+x$, & par la proprieté de l'Ellipse, $FL\times LG$ ou $\overline{EF}^2-\overline{EL}^2$ $(\frac{1}{8}bb-ax-xx)$. $\overline{LM}^2$ $(\frac{1}{4}bb-by+yy)$ :: $FG$. $GH$ :: 1. 2; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens $\frac{1}{4}bb-2ax-2xx=\frac{1}{4}bb-by+yy$. Donc &c.

Si l'on suppose à present que les points $M$ tombent dans les angles $BAD$, $BAR$, on trouvera toûjours la même équation que ci-dessus, tant par la condition du Problême que par la proprieté de l'Ellipse; en observant de faire $AP=-x$, & $PM=-y$, lorsque le point $P$ tombe de l'autre côté de l'origine $A$, & $PM$, de l'autre côté de la ligne $AP$. D'où il suit que les portions de l'Ellipse, que l'on vient de décrire, renfermées dans ces angles sont le lieu de ces points.

On doit remarquer qu'il est impossible qu'aucun des points cherchés $M$, tombe dans l'angle $PAR$, opposé au sommet à l'angle $BAD$ dans lequel est situé le point donné $C$, d'où doivent partir toutes les perpendiculaires aux Paraboles. Car si d'un point quelconque pris

dans cet angle *PAR*, on mene des dro[illegible] comme *MP*, *MT*, perpendiculaires sur *AP* & *CM*, il est visible que les points *P*, *T*, tomberont du même côté du point *A*, & par conséquent que cette ligne *MT* ne pourra être tangente en *M* comme le demande la question.

Si l'on suppose que *AP* ($x$) devienne nulle ou zero, l'équation précedente $yy - by + 2xx + ax = 0$ se changera en celle-ci $yy - by = 0$, dont les deux racines sont $y = 0$, & $y = b$; ce qui fait voir qu'en tirant *AO* parallele & égale à *BC*, le lieu des points cherchés *M* passera par les deux points *A*, *O*. On prouvera de même en supposant que le point *P* tombe de l'autre côté de l'origine *A*, & faisant *AP* ($-x$) $=$ *AB* ($a$), que ce même lieu passera par les points *B*, *C*; de sorte que l'Ellipse doit être décrite autour du rectangle *ABCO*. Ceci donne lieu à une nouvelle construction que voici.

Soit formé le rectangle *ABCO*, & soit décrite * autour de ce rectangle une Ellipse, dont l'axe *FG* parallele aux côtés *AB*, *OC*, soit à son parametre *GH*, comme 1 est à 2. Il est évident qu'elle sera le lieu cherché. * *Art.* 176.

## REMARQUE. I.

353. Si la nature des lignes courbes telles que *AM* étoit exprimée par l'équation generale $y^n = x^m a^{n-m}$ (les lettres $m$, $n$, marquent les exposans des puissances de $y$ & $x$ tels qu'ils puissent être) qui renferme * non seulement la Parabole ordinaire, mais encore celles de tous les degrés à l'infini; on auroit $TP$* ($\frac{n}{m}x$). $PM$ ($y$) :: $CK$ ($b-y$). $KM$ ($a+x$): ce qui donne $yy - by + \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$, dont le lieu qui est celui qu'on cherche, est une Ellipse que l'on construira selon l'article 322. ou bien selon l'article 176. si l'on observe que cette Ellipse doit passer autour du rectangle donné *ABCO*, & que son axe *FG* parallele aux côtés *AB*, *OC*, doit être

* *Art.* 2 9.
* *Art.* 237.

à son paramet[illegible] *GH* en la raison donnée de *m* à *n*.

### REMARQUE II.

Fig. 191. 354. Si le centre *E* de l'Ellipse qu'on vient de décrire tomboit sur l'origine *A* de l'axe commun *AP* de toutes les Paraboles *AM*; & l'axe *FG* de l'Ellipse sur l'axe *AP* des Paraboles: cette Ellipse couperoit toutes ces differentes Paraboles à angles droits. On peut énoncer ce Theorême de la maniere qui suit.

Fig. 192. Soient une infinité de Paraboles comme *AM* de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour axe commun la même ligne *AP*, dont l'origine est toûjours au même point *A*; & soit une Ellipse qui ait pour centre le point *A*, & dont l'axe *FG* situé sur *AP* soit à son parametre, comme le nombre *m* exposant de la puissance de *AP* ($x$) est au nombre *n* exposant de la puissance de *PM* ($y$), dans l'équation generale $y^n = x^m a^{n-m}$ qui exprime la nature des Paraboles *AM*. Je dis que cette Ellipse coupera toutes ces Paraboles à angles droits.

Par le point *M*, où elle coupe telle de ces Paraboles qu'on voudra, ayant mené la tangente *MT* à cette Parabole, & *MS* perpendiculaire à cette tangente; il est question de prouver que *MS* touche l'Ellipse au point *M*. Pour en venir à bout, on tirera la perpendiculaire *MP* sur l'axe, & ayant nommé les indéterminées *AP*, $x$; *PM*, $y$; & la donnée *FG*, $2t$; on aura par la proprieté de l'Ellipse $FP \times PG$ ($tt - xx$). $\overline{PM}^2$ ($yy$) :: $m.n$, & partant $myy = ntt - nxx$. Or à cause des angles droits *TPM*, * Art. 137. *TMS*, il vient *TP** ($\frac{n}{m}x$). *PM* ($y$) :: *PM* ($y$). $PS = \frac{myy}{nx}$, & parconsequent *AS* ou $AP + PS = \frac{nxx + myy}{nx}$ $= \frac{tt}{x}$ en mettant pour $myy$ la valeur que l'on vient de trouver $ntt - nxx$. D'où l'on voit que *AP*. *AF* :: *AF*. *AS*, * Art. 57. & qu'ainsi * la ligne *MS* touche l'Ellipse au point *M*. *Ce qu'il falloit &c.*

EXEMPLE II.

355. SOIENT imaginées une infinité d'Hyperboles qui ayent toutes pour Asymptotes communes les mêmes droites $AP$, $AO$, données de position, qui font entr'elles un angle droit $PAO$; & soient conceuës partir d'un point donné $C$ une infinité de perpendiculaires comme $CM$ à ces Hyperboles. On demande le lieu de tous les points $M$, où chacune des droites $CM$ rencontre l'Hyperbole à laquelle elle est perpendiculaire. Fig. 195.

Ayant tiré les mêmes lignes que dans l'exemple précedent, & les ayant nommées par les mêmes lettres, on arrivera de même à cette proportion $TP$ * $(x)$. $PM$ $(y)$ :: $CK$ $(b-y)$. $KM$ $(a-x)$; ce qui donne cette équation $yy-by-xx+ax=0$, dont voici * le lieu. * Art. 107. * Art. 350. ou 335.

Ayant pris sur l'Asymptote $AO$ parallele à $PM$, la partie $AD=\frac{1}{2}b$, & mené $DL$ parallele à $AP$; on prendra sur cette ligne la partie $DE=\frac{1}{2}a$ du côté de $PM$, & de part & d'autre du point $E$, les parties $EF$, $EG$, égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}bb}$ ou $\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}aa}$ selon que $a$ est plus grand ou moindre que $b$. On décrira ensuite de la ligne $FG$, comme premier axe dans le premier cas, & comme second dans le deuxiéme, deux Hyperboles opposées équilateres. Je dis que leurs portions renfermées dans l'angle $PAO$, feront le lieu de cette équation, & par conséquent celui de tous les points cherchés $M$.

Car prolongeant $PM$ (s'il est necessaire) jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe $FG$, en $L$, on aura l'ordonnée $ML=\frac{1}{2}b-y$, & la partie $EL=x-\frac{1}{2}a$; &* par la proprieté des Hyperboles équilateres $\overline{EL}^2 \mp \overline{EF}^2$ $(xx-ax+\frac{1}{4}bb)=\overline{LM}^2$ $(\frac{1}{4}bb-by+yy)$. Donc &c. * Art. 127.

Si $a=b$, la construction précedente n'a plus de lieu, car la valeur du demi axe $EF$ ou $EG$ devient nulle. Et comme l'équation précedente devient celle-ci $yy-ay-xx+ax=0$, ou $yy-ay+\frac{1}{4}aa=xx-ax+\frac{1}{4}aa$

de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $y - \frac{1}{2}a = x - \frac{1}{2}a$ ou $y = x$, & $\frac{1}{2}a - y = x - \frac{1}{2}a$ ou $y = a - x$; il s'ensuit que si l'on acheve le rec-
FIG. 194. tangle $ABCO$, & qu'on tire les deux diagonales $AC$, $BO$: elles seront le lieu de tous les points cherchés $M$. Car la diagonale $AC$ est le lieu de la premiere équation $y = x$, & l'autre diagonale $BO$ est le lieu de la deuxiéme $y = a - x$.

REMARQUE I.

356. Si la nature des lignes courbes qui ont pour Asymptotes les droites $AB$, $AO$, étoit exprimée par
FIG. 195. l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui renferme * les Hy-
* Art. 229. perboles de tous les degrés à l'infini, on auroit $TP$ *
* Art. 287. $(\frac{n}{m}x) . PM (y) :: CK (b-y) . KM (a-x)$; ce qui donne $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$, dont le lieu se con-
* Art. 330. struit * ainsi.

Ayant trouvé le point $E$ comme dans l'exemple, on prendra sur $DL$ de part & d'autre du point $E$, les parties $EF$, $EG$, égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{m}{4n}bb}$ ou $\sqrt{\frac{m}{4n}bb - \frac{1}{4}aa}$; selon que $naa$ est plus grand ou moindre que $mbb$. Ensuite de la ligne $FG$ comme premier axe dans le premier cas, & comme second dans le deuxiéme, qui soit à son parametre en la raison donnée de $m$ à $n$, on décrira deux Hyperboles opposées : leurs portions renfermées dans l'angle $OAB$ seront le lieu qu'on cherche.

Si $a, b :: \sqrt{m}, \sqrt{n}$, l'équation $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$
FIG. 194. se change en celle-ci $yy - ay\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$, ou $yy - ay\sqrt{\frac{n}{m}} + \frac{naa}{4m} = \frac{n}{m}xx - \frac{n}{m}ax + \frac{naa}{4m}$ de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient

vient $y - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}} = x\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}$, ou $y = x\sqrt{\frac{n}{m}}$; & $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}} - y = x\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}$ ou $y = a\sqrt{\frac{n}{m}} - x\sqrt{\frac{n}{m}}$. D'où il ſuit que ſi l'on acheve le rectangle *ABCO*, & qu'on tire les diagonales *BO*, *AC*; ces deux lignes droites ſeront le lieu de tous les points cherchés *M*: car la diagonale *AC* eſt le lieu de la premiere équation $y = x\sqrt{\frac{n}{m}}$, & l'autre diagonale *BO* le lieu de la ſeconde $y = a\sqrt{\frac{n}{m}} - x\sqrt{\frac{n}{m}}$.

On prouvera de même que dans l'Ellipſe, que les Hyperboles oppoſées qui ſont le lieu cherché, doivent être décrites autour du rectangle donné *ABCO*; & comme l'axe *FG*, parallele aux côtés *AB*, *OC*, doit être à ſon parametre en la raiſon donnée de *m* à *n*, il s'enſuit qu'on peut décrire, ſi l'on veut, ces Hyperboles par le moyen de l'article 176. (Liv. 4.) FIG. 193.

REMARQUE II.

357. Si le centre *E* de l'Hyperbole *BFC* tomboit ſur le point *A*, & ſon axe *FG* ſur la ligne *AP*; je dis que cette Hyperbole couperoit à angles droits toutes celles qui ont pour Aſymptotes les droites *AP*, *AO*; ce qu'on peut énoncer ainſi. FIG. 193.

Soient une infinité d'Hyperboles de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour Aſymptotes communes les mêmes droites *AP*, *AO*, qui ſont entr'elles un angle droit; & ſoit une Hyperbole ordinaire *FM* qui ait pour centre le point *A*, & dont le premier axe *FG* ſitué ſur *AP*, ſoit à ſon parametre comme le nombre *m* expoſant de la puiſſance de *AP* (*x*) eſt au nombre *n* expoſant de la puiſſance de *PM* (*y*) dans l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime la nature des Hyperboles *MAM*. Je dis que l'Hyperbole *FM* coupe à angles droits toutes ces differentes Hyperboles. FIG. 195.

Ayant mené par le point $M$ où elle coupe telle de ces Hyperboles qu'on voudra, une tangente $MT$ à cette Hyperbole, & une perpendiculaire $MS$ à cette tangente; il s'agit de prouver que l'angle $TMS$ sera droit. Pour le faire, on tirera $MP$ perpendiculaire sur l'Asymptote $AP$; & ayant nommé les indéterminés $AP$, $x$; $PM$, $y$; & la donnée $FG$, $2t$; on aura par la proprieté de l'Hyperbole $FM$ cette proportion $FP \times PG$ $(xx-tt)$. $\overline{PM}^2$ $(yy)$ :: $m$. $n$, & partant $myy = nxx - ntt$. Or à

* *Art.* 237. cause des angles droits $TPM$, $TMS$, il vient $TP$* $(\frac{n}{m}x)$. $PM$ $(y)$ :: $PM$ $(y)$. $PS = \frac{myy}{nx}$. Et par consequent $AS$ ou $AP - PS = \frac{nxx - myy}{nx} = \frac{tt}{x}$ en mettant pour $myy$ la valeur qu'on vient de trouver $nxx - ntt$. D'où l'on voit que $AS$ est troisiéme proportionnelle à $AP$, $AF$;

* *Art.* 121. & qu'ainsi* la ligne $MS$ touche l'Hyperbole $FM$ au point $M$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

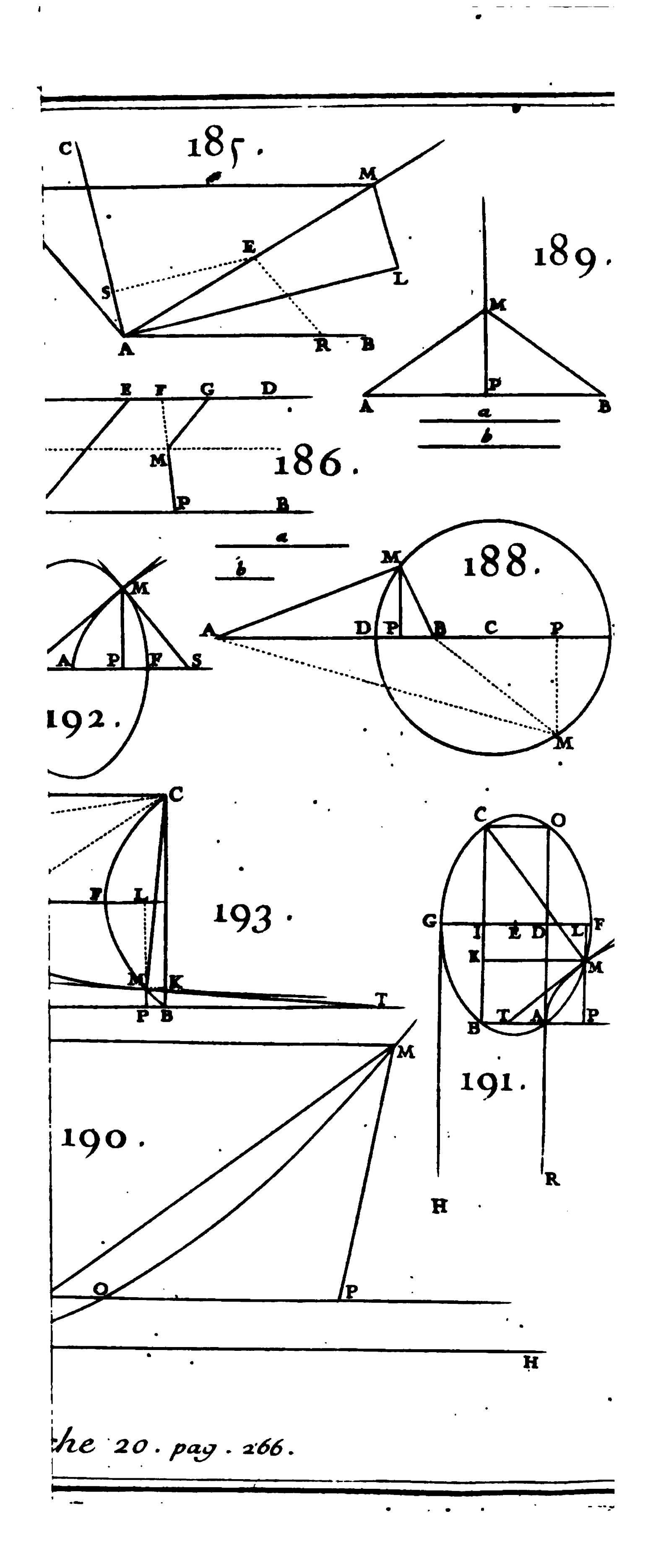
## EXEMPLE VII.

FIG. 396. 358. La Parabole $BAC$ étant donnée, on demande le lieu de tous les points $M$, tels qu'ayant mené de chacun de ces points, deux tangentes $MB$, $MC$, à cette Parabole; l'angle $BMC$ qu'elles comprennent soit toûjours égal à un angle donné.

Il peut arriver que l'angle donné $BMC$ soit aigu, obtus, ou droit; ce qui fait trois differens cas.

*Premier cas.* Lorsque l'angle donné $BMC$ est aigu.

* *Art.* 160. Ayant mené* l'axe $AD$ de la Parabole donnée $BAC$, qui rencontre les tangentes $MB$, $MC$, aux points $F$, $G$, on tirera sur cet axe des points touchans $B$, $C$, & du point de concours $M$, les perpendiculaires $BD$, $CE$, $MP$. Et ayant mené $MN$ qui fasse sur l'axe $AD$ l'angle $FNM$ égal à l'angle $FMG$ complement à deux droits de l'angle donné $BMC$, on nommera les inconnuës & indéterminées $AP$, $x$; $PM$, $y$; $AF$, $s$; $AG$, $t$;



*che 20. pag. 266.*

& le parametre de l'axe $AD$, sçavoir, $AV$, $a$; lequel est donné, puisque la Parabole $BAC$ est donnée. Cela posé; à cause du triangle rectangle $FPM$, on aura le quarré $\overline{FM}^2 = ss - 2sx + xx + yy$, lequel étant divisé par $FG$ $(s-t)$ donnera $\frac{ss - 2sx + xx + yy}{s-t} = FN$, à cause des triangles semblables $FGM$, $FMN$; & partant $PN$ ou $FP - FN = \frac{sx + tx - st - xx - yy}{s-t}$. Je cherche à present par le moyen de la Parabole donnée $BAC$ des valeurs de $s+t$, $st$, & $s-t$ par rapport à $x$ & $y$, afin qu'étant substituées, dans la valeur de $PN$, cette ligne ne renferme plus dans son expression d'autres inconnuës que $x$ & $y$. Ce que je fais ainsi.

Les triangles semblables $FPM$, $FDB$; & $GPM$, $GEC$, donnent $FP$ $(s-x)$. $PM$ $(y)$ :: $FD$* $(2s)$. $BD$* $(\sqrt{as})$. * *Art.* 22.
Et $GP$ $(x-t)$. $PM$ $(y)$ :: $GE$ $(2t)$. $CE$ $(\sqrt{at})$. D'où je * *Art.* 7.
forme ces deux équations $ss - 2xs - \frac{4yy}{a}s + xx = 0$, & $tt - 2xt - \frac{4yy}{a}t + xx = 0$; c'est à dire (en faisant $p = 2x + \frac{4yy}{a}$ pour faciliter le calcul) $ss - ps + xx = 0$, & $tt - pt + xx = 0$. Je retranche la seconde équation de la premiere, & j'ai $ss - tt - ps + pt = 0$ qui étant divisée par $s-t$ donne $s+t = p$; & partant $s = p - t$, & $ss = ps - ts = ps - xx$ à cause de la premiere équation, d'où je tire $st = xx$. Si l'on ôte $4xx$ valeur de $4st$ de $pp$ valeur de $ss + 2ts + tt$, on formera enfin cette égalité $ss - 2st + tt = pp - 4xx$, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, on aura $s - t = \sqrt{pp - 4xx} = \frac{4y\sqrt{ax + yy}}{a}$ en mettant pour $p$ sa valeur $2x + \frac{4yy}{a}$.

Si l'on met à present à la place de $s+t$, $st$, & $s-t$, leurs valeurs $2x + \frac{4yy}{a}$, $xx$, & $\frac{4y\sqrt{ax+yy}}{a}$ dans $\frac{sx + tx - st - xx - yy}{s-t}$, on trouvera $PN = \frac{4xy - ay}{4\sqrt{ax + yy}}$. Or si

l'on prend sur l'axe la partie $NQ$ égale au parametre $AV$ ($a$), & qu'on tire $QT$ parallele à $PM$, & qui rencontre en $T$ la droite $MN$ prolongée autant qu'il sera necessaire; il est visible que la ligne $QT$ sera donnée, puisque dans le triangle rectangle $NQT$, l'angle $QNT$ qui est égal à l'angle donné $BMC$ est donné, & que de plus le côté $NQ$ qui est égal au parametre $AV$ de l'axe de la Parabole, est aussi donné. Soit donc la donnée $QT = b$, & à cause des triangles semblables $NPM$, $NQT$, on aura cette proportion, $NP$ $\left(\frac{4xy - ay}{4\sqrt{yy + ax}}\right)$. $PM$ ($y$) :: $a . b$, & partant $4a\sqrt{yy + ax} = 4bx - ab$, c'est à dire en ôtant les incommensurables $yy - \frac{bb}{aa}xx + ax + \frac{bb}{2a}x - \frac{1}{16}bb = 0$, dont le lieu (qui est celui qu'on cherche) se construit * en cette sorte.

* *Art.* 330. & 331.

Soit prise sur l'axe $AD$ de la Parabole, la partie $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^3}{2bb}$ du côté de $PM$; & de part & d'autre du point $H$ les parties $HI$, $HK$, égales chacune à $\frac{aa\sqrt{aa + bb}}{2bb}$; & soit décrite du premier axe $IK$ qui soit à son parametre $KL$ comme $aa$ est à $bb$, une Hyperbole $KM$. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver.

Car $HP = x - \frac{1}{4}a - \frac{a^3}{2bb}$, & par la proprieté de l'Hyperbole $\overline{HP}^2 - \overline{HK}^2$ ($xx - \frac{1}{2}ax - \frac{a^3}{bb}x + \frac{1}{16}aa$). $\overline{PM}^2$ ($yy$) :: $IK . KL$ :: $aa . bb$; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, l'équation précedente.

Il est à propos de remarquer que dans ce cas $FN$ sera toûjours moindre que $FP$; puisque l'angle $FNM$, qu'on a pris égal au complement à deux droits de l'angle donné, est obtus. C'est pourquoi $\frac{4xy - ay}{4\sqrt{yy + ax}}$ valeur de $FP - FN$ doit être positive; & par consequent $x$ doit toûjours surpasser $\frac{1}{4}a$. D'où l'on voit que quoiqu'il y ait

une portion de l'Hyperbole opposée à *KM* qui soit renfermée dans l'angle *PAV* fait par la ligne *AP* & par la droite *AV* menée parallelement à *PM* & du même côté, elle ne peut pas neanmoins faire partie du lieu des points *M*; parce que *AI* étant moindre que $\frac{1}{4}a$, l'indéterminée *AP* qui seroit alors moindre que *AI*, seroit à plus forte raison moindre que $\frac{1}{4}a$.

*Second cas.* Lorsque l'angle donné est obtus. En supposant que les points *M* tombent dans l'angle *PAV*, & par un raisonnement semblable à celui du premier cas, on trouvera la même équation; & par consequent la construction du lieu demeurera la même. Mais il faut observer dans ce second cas que *FN* sera plus grande que *FP*, & qu'ainsi la valeur $\frac{4xy - ay}{4\sqrt{yy+ax}}$ de *FP*—*FN* deviendra negative; d'où il suit que $x$ sera toûjours moindre que $\frac{1}{4}a$, & partant que le lieu cherché sera alors la portion de l'Hyperbole qui s'étend du même côté de la Parabole, laquelle se trouve renfermée dans cet angle *PAV*. Et comme en supposant que les points *M* tombent dans l'angle *DAV*, on trouve encore la même équation, il s'ensuit que cette Hyperbole entiere sera le lieu de tous les points cherchés *M*.

De là il est évident que si une Hyperbole *KM* est le lieu de tous les points *M* lorsque l'angle donné *BMC* est aigu, son opposée sera le lieu de tous ces points lorsque l'angle donné sera égal au complement à deux droits de l'angle *BMC*, parce qu'alors les lignes données $a$ & $b$ qui déterminent la construction des Hyperboles demeurent les mêmes.

*Troisiéme cas.* Lorsque l'angle donné est droit. Il est clair que *FN* est alors égale à *FP*, & qu'ainsi la valeur FIG. 196. 197.
$\frac{4xy - ay}{4\sqrt{yy+ax}}$ de *FP*—*FN* sera nulle ou zero. D'où l'on voit * que si l'on prend sur l'axe *AD* prolongé vers son origine *A* la partie $AP = \frac{1}{4}a$, & qu'on lui mene la perpendiculaire indéfinie *PM*; cette ligne qui n'est autre *Art. 306.

que la directrice comme l'on peut voir dans les définitions de la Parabole, sera le lieu cherché.

## COROLLAIRE.

FIG. 196. 197. 359. Si l'on mene le demi-second axe $HO$, & qu'on tire l'hypothenuse $KO$; les triangles rectangles $KHO$, $NQT$ seront semblables: car puisque le second axe est moyen proportionnel entre le premier $IK$ & son parametre $KL$, il s'ensuit que $\overline{KH}^2 . \overline{HO}^2 :: IK . KL :: aa . bb$, & qu'ainsi $KH . HO :: NQ (a) . QT (b)$. L'angle $HKO$ (qui selon la définition 11. du 3. Livre, est égal à la moitié de l'angle fait par les Asymptotes de l'Hyperbole $KM$) sera donc égal à l'angle $QNT$, c'est à dire, à l'angle donné $BMC$; & on aura $NQ (a) . QT (b) :: KH \left(\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}\right) . HO = \frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}$; & $NQ (a) . NT (\sqrt{aa+bb}) :: KH \left(\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}\right) . KO = \frac{a^3+abb}{2bb}$. Or si l'on pose l'hypothenuse $KO$ du triangle rectangle $KHO$ fait par les deux demi-axes $HK$, $HO$, sur le premier axe $IK$ depuis le centre $H$, en $R$ & $S$; il est

* Art. 74. clair * que ces deux points seront les deux foyers de l'Hyperbole $KM$ & de son opposée; & que $RA = \frac{1}{4}a$, puisque $HR = \frac{a^3+abb}{2bb}$ & $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^3}{2bb}$. D'où l'on voit que le foyer $R$ de l'Hyperbole $KM$ est encore le

*Def. 3. 4. 5. I. foyer * de la Parabole $BAC$, & que $SR \left(\frac{a^3+abb}{bb}\right) . HO \left(\frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}\right) :: HO \left(\frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}\right) . AR \left(\frac{1}{4}a\right)$, puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit. Ce qui donne lieu à ce Theorême.

FIG. 196. Si sur la distance $SR$ des foyers d'une Hyperbole $KM$, on prend du côté de $S$, la partie $RA$ troisiéme

* Art. 4. proportionnelle à cette distance $SR$, & à la moitié $HO$ de son second axe; & qu'ayant décrit * une Parabole $BAC$ qui ait pour foyer le point $R$, & pour axe la li-

gne $AR$ dont l'origine soit en $A$, on tire d'un point quelconque $M$ de l'Hyperbole $KM$ deux tangentes $MB$, $MC$, à cette Parabole : je dis que l'angle $BMC$ qu'elles comprennent, sera toûjours égal à la moitié de l'angle fait par les Asymptotes ; & que si l'on prend le point $M$ sur l'Hyperbole opposée, l'angle compris par les tangentes, sera toûjours égal au complement à deux droits de la moitié de l'angle fait par les Asymptotes.

### EXEMPLE VIII.

360. UNE ligne droite indéfinie $BAP$ étant donnée de position sur un plan avec deux points fixes $A$, $D$, l'un sur cette ligne & l'autre au dehors ; on demande le lieu de tous les points $M$, dont la proprieté soit telle qu'ayant mené de chacun de ces points aux deux points fixes $A$, $D$, les droites $MA$, $MD$ : la ligne $AM$ soit toûjours égale à la partie $ME$ de l'autre droite $DM$, prise entre le point $M$ & le point $E$ où elle rencontre la ligne $MP$. FIG. 198.

Du point donné $D$ & du point $M$ que l'on suppose être l'un des points cherchés, ayant mené les perpendiculaires $BD$, $MP$, sur la ligne $AP$, on nommera les données $AB$, $2a$ ; $BD$, $2b$ ; & les inconnuës & indéterminées $AP$, $x$ ; $PM$, $y$ : & on aura $AP = PE$ ; puisque (*hyp.*) $AM = ME$. Or les triangles semblables $EBD$, $EPM$, donnent $EB$ ou $AE - AB$ $(2x - 2a)$. $BD$ $(2b)$ :: $EP$ $(x)$. $PM$ $(y)$. En multipliant donc les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $xy - ay = bx$, qui renferme la condition marquée dans le Problême, & dont le lieu qui est * une Hyperbole équilatere entre les Asymptotes se construit ainsi. * Art. 337.

Soit tirée la ligne $AD$ que l'on divisera par le milieu en $C$, par où l'on menera les droites $CF$, $CG$, l'une parallele & l'autre perpendiculaire à $AP$ : soient décrites entre les Asymptotes $CF$, $CG$, indéfiniment prolongées de part & d'autre du point $C$, par les points $D$, $A$, * * Art. 130. 131.

* Def. 16. III. les deux Hyperboles opposées $DM, AM$, qui sont* équilateres. Je dis qu'elles seront le lieu complet de tous les points cherchés $M$.

Car les Asymptotes $CF, CG$, divisent les droites $AB$, $BD$ en deux parties égales aux points $L, K$, puisque $AD$ est divisée par le milieu en $C$; & partant lorsque les points $P$ tombent sur $AB$ prolongée indéfiniment du côté de $B$, comme l'on vient de supposer en faisant le calcul, la ligne $PL$ ou $CH = x - a$, $HM = y - b$;

* Art. 100. & par la proprieté * de l'Hyperbole $CH \times HM$ $(xy - ay - bx + ab) = CK \times KD\ (ab)$ : ce qui donne $xy - ay = bx$.

Si l'on suppose à present que les points $P$ tombent sur $BA$ indéfiniment prolongée du côté de $A$, ou sur la partie déterminée $AB$; on trouvera toûjours (en observant de faire $AP = -x$, & $PM = -y$ lorsqu'ils tombent de l'autre côté du point $A$ & de la ligne $AP$) la même équation $xy - ay = bx$, tant par la condition marquée dans le Problême que par la proprieté de l'Hyperbole $AM$ ou $DM$. Donc &c.

## COROLLAIRE.

361. De-là il est évident que les parties $MR$, $MS$ des deux droites $AM, DM$, comprises entre le point $M$ & l'une ou l'autre des Asymptotes, sont égales entr'elles. Car 1°. Lorsque l'Asymptote, comme $CF$, est parallele à la ligne $AP$, l'angle $RSM$ est égal à l'angle $AEM$, & l'angle $SRM$ à l'angle $MAE$. 2°. Lorsque l'Asymptote, comme $CG$, est perpendiculaire à $AP$, l'angle $RSM$ sera le complement à un droit de l'angle $AEM$ à cause du triangle rectangle $SLE$, & de même l'angle $SRM$ ou son opposé au sommet $ARL$ est le complement à un droit de l'angle $EAM$ à cause du triangle rectangle $RAL$. Donc puisque les angles $EAM$, $AEM$, sont égaux, il s'ensuit que le triangle $RMS$ sera isoscelle, & qu'ainsi les côtés $MR$, $MS$, seront égaux entr'eux.

entr'eux. Ce Corollaire nous fournit le Theorême suivant.

Si l'on mene d'un point quelconque *M* d'une Hyperbole équilatere, deux droites *MD*, *MA*, aux extremités d'un de ses premiers diametres *AD*, lesquelles rencontrent l'une ou l'autre Asymptote aux points, *R*, *S*: je dis que les parties *MR*, *MS*, de ces deux droites seront égales entr'elles.

### EXEMPLE IX.

362. Deux cercles *EGF*, *BNO*, dont les centres sont *C*, *A*, etant donnés, & ayant mené par un point quelconque *G* du cercle *EGF* une tangente indéfinie *GNO* qui coupe l'autre cercle *BNO* en deux points *N*, *O*, par lesquels soient tirées les tangentes *NM*, *OM*; on demande le lieu de tous les points de concours *M*. FIG. 199.

Ayant tiré *MP* perpendiculaire sur *CA*, qui passe par les centres *C*, *A*, des cercles donnés; on menera les droites *CG*, *AM*, qui seront paralleles, puisque l'une & l'autre est perpendiculaire sur la même droite *GO* qu'elles rencontrent aux points *G*, *Q*; & on nommera les données *AB* ou *AO*, $a$; *CE* ou *CF* ou *CG*, $b$; *CA*, $c$; & les inconnuës & indéterminées *AP*, $x$; *PM*, $y$. Cela fait, les triangles rectangles semblables *AOM*, *AQO*, donneront $AM (\sqrt{xx+yy}) . AO (a) :: AO (a) . AQ = \frac{aa}{\sqrt{xx+yy}}$. Et menant *CH* parallele à *GO*, qui rencontre en *H*, *MA* prolongée, s'il est necessaire, on aura à cause des triangles rectangles semblables *MAP*, *CAH*, cette proportion: $PA (x) . AM (\sqrt{xx+yy}) :: AH$ ou $CG - AQ \left(b - \frac{aa}{\sqrt{xx+yy}}\right) . AC (c)$; ce qui donne $b\sqrt{xx+yy} = aa + cx$, c'est-à-dire, en ôtant les incommensurables, l'équation $yy + \frac{bb-cc}{bb} xx - \frac{2aac}{bb} x - \frac{a^4}{bb} = 0$, dont le lieu est * une Parabole, une Ellipse, ou une Hyperbole selon que *CE* ($b$) est égale, * Art. 345.

plus grande, ou moindre que $CA(c)$. Voici la construction du dernier cas.

Soit prise sur la ligne $AP$ la partie $AR = \frac{aac}{cc-bb}$ du côté opposé à $PM$; & de part & d'autre du point $R$ les parties $RI$, $RK$, égales chacune à $\frac{aab}{cc-bb}$; & soit décrite du premier axe $IK$ qui ait pour parametre $KL = \frac{2ac}{b}$, une Hyperbole. Je dis que sa portion indéfinie $DM$ renfermée dans l'angle $PAD$ fait par la ligne $AP$ & par la droite $AD$ menée parallelement à $PM$ & du même côté, sera le lieu de cette équation.

Car par la proprieté de l'Hyperbole, $\overline{RP}^2 - \overline{RI}^2$ $\left(\frac{a^4+2aacx}{cc-bb} + xx\right)$. $\overline{PM}^2$ $(yy)$ :: $IK$ $\left(\frac{2aab}{cc-bb}\right)$. $KL$ $\left(\frac{2ac}{b}\right)$; ce qui redonne l'équation précedente.

Si l'on suppose à present que les points $M$ tombent dans l'angle $KAD$ qui est à côté de l'angle $PAD$, on trouvera encore (en faisant $AP = -x$) la même équation; d'où il suit que la portion déterminée $ID$ de l'Hyperbole $IM$, avec la moitié entiere de l'Hyperbole qui lui est opposée sera le lieu de ces points, & qu'ainsi ces deux Hyperboles opposées composent le lieu complet de tous les points cherchés $M$: où l'on doit observer que la portion $SIT$ renfermée dans le cercle $BNO$ est inutile, puisqu'aucun des points de concours $M$ des deux tangentes $NO$, $OM$, à ce cercle, ne peuvent tomber au dedans.

Il est à propos de remarquer que $RA$ $\left(\frac{aac}{cc-bb}\right)$ $= \sqrt{\overline{KR}^2 + \frac{1}{4} IK \times KL}$, comme l'on voit en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques; & qu'ainsi puisque le rectangle $IK \times KL$ vaut le quarré de la moitié du second axe, le point $A$ sera* l'un des foyers de
* Art. 74. l'Hyperbole $IM$. Or puisque $AI$ ou $AR - RI$ $= \frac{aac-aab}{cc-bb} = \frac{aa}{c+b}$, & $AK = AR + RK = \frac{aac+aab}{cc-bb}$ $= \frac{aa}{c-b}$, il s'ensuit qu'on peut abreger la construction

précedente en cette sorte.

Soient prises sur la ligne $AC$ du côté de $C$, les parties $AI$, $AK$, troisiémes proportionnelles à $AF(c+b)$, $AB(a)$, & à $AE(c-b)$, $AB(a)$; & soient décrites du premier axe $IK$, & du foyer $A$ * deux Hyperboles opposées. Il est évident qu'elles seront le lieu de tous les points cherchés $M$. *Art. 76.

Lorsque $CE(b)$ est plus grande que $CA(c)$, la construction de l'Ellipse qui est le lieu des points cherchés $M$, se fera de la même maniere que pour l'Hyperbole, en observant de prendre la partie $AK$ de l'autre côté du point $A$ par rapport au point $C$. Et enfin lorsque $CE(b)=CA(c)$, il n'y aura qu'à prendre sur la ligne $AC$ du côté de $C$, la partie $AI$ troisiéme proportionnelle à $AF$, $AB$, & décrire ensuite une Parabole qui ait pour foyer le point $A$, & pour axe la ligne $IA$ dont l'origine soit en $I$. FIG. 200.

## COROLLAIRE I. POUR L'ELLIPSE & LES HYPERBOLES OPPOSE'ES.

363. DE LA il est évident que si de l'un des foyers $A$ d'une Ellipse ou de deux Hyperboles opposées, dont le premier axe est $IK$, on décrit un cercle quelconque $BNO$; & qu'ayant pris sur cet axe les parties $AE$, $AF$, troisiémes proportionnelles à $AK$, $AB$, & à $AI$, $AB$, (sçavoir $AE$ du côté du point $K$, & $AF$ du côté du point $I$), on décrive du diametre $EF$ un cercle $EGF$: il est évident, dis-je, que si l'on tire d'un point quelconque $M$ de la Section, deux tangentes $MN$, $MO$, au cercle $BNO$, la ligne $ON$ qui joint les points touchans étant prolongée, s'il est necessaire, touchera toûjours l'autre cercle $EGF$. FIG. 199.

## COROLLAIRE II. POUR LA PARABOLE.

364. IL suit encore de la resolution de ce Problême, que si du foyer $A$ d'une Parabole $IM$ dont l'axe $IA$ a FIG. 200.

son origine en $I$, on décrit un cercle quelconque $BNO$; & qu'ayant pris sur l'axe du côté de son origine, la partie $AF$ troisiéme proportionnelle à $AI$, $AB$, on décrive un cercle $AGF$ du diametre $AF$; & qu'enfin l'on tire d'un point quelconque $M$ de la Parabole deux tangentes $MN$, $MO$, au cercle $BNO$: la ligne $NO$ qui joint les points touchans, étant prolongée, s'il est necessaire, touchera toujours le cercle $AGF$ en un point $G$.

## EXEMPLE X.

FIG. 201. 202. 203. 365. UNE ligne droite indéfinie $AP$ étant donnée sur un plan, avec un point fixe $F$ hors d'elle; trouver le lieu de tous les points $M$, dont la proprieté soit telle qu'ayant mené de chacun de ces points une perpendiculaire $MP$ sur $AP$, & au point $F$ une ligne droite $MF$; la raison de $MP$ à $MF$ soit toujours la même, que celle de la donnée $a$ à la donnée $b$.

Ayant mené du point donné $F$ sur la ligne $AP$ la perpendiculaire $FA$, & du point $M$ que l'on suppose être l'un des cherchés, une parallele $MQ$ à $AP$, on nommera la donnée $AF$, $c$; & les inconnuës & indéterminées $AP$, $x$; $PM$, $y$; qui font entr'elles un angle droit $APM$. Cela posé, le triangle rectangle $MQF$ donne $\overline{MF}^2 = \overline{FQ}^2$ $(cc - 2cy + yy) + \overline{MQ}^2$ $(xx)$, & à cause de la condition marquée dans le Problême on aura $\overline{MP}^2$ $(yy)$. $\overline{MF}^2$ $(cc - 2cy + yy + xx) :: aa . bb$; d'où (en multipliant les moyens & les extrêmes) on tire cette équation $aayy - bbyy - 2aacy + aaxx + aacc = 0$, dont il s'agit maintenant de construire le lieu. Pour en venir à bout, il faut distinguer trois differens cas selon que $a$ est plus grand, moindre, ou égal à $b$.

*Premier cas*. En divisant par $aa - bb$, on trouve cette équation $yy - \frac{2aac}{aa-bb} y + \frac{aa}{aa-bb} xx + \frac{aacc}{aa-bb} = 0$, dont le lieu est une Ellipse * que l'on construit en cette sorte.

* Art. 324.

Soit prise sur $AF$ du côté de $F$, la partie $AC = \frac{aac}{aa - bb}$; & ayant mené par le point $C$ une parallele $KH$ à $AP$, soient prises sur cette ligne de part & d'autre du point $C$, les parties $CH$, $CK$, égales chacune à $\sqrt{\frac{bbcc}{aa-bb}}$. Ensuite de l'axe $KH$ qui soit à son parametre $KL$ comme $aa-bb$ est à $aa$, soit décrite une Ellipse. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation précedente, & par conséquent de tous les points cherchés $M$. FIG. 201.

Car par la proprieté de l'Ellipse, $KE \times EH$ ou $\overline{CH}^2 - \overline{CE}^2 \left(\frac{bbcc}{aa-bb} - xx\right) . \overline{EM}^2 \left(\frac{a^4cc}{\overline{aa-bb}^2} - \frac{2aacy}{aa-bb} + yy\right) :: KH . KL :: aa-bb . aa$; ce qui, en multipliant les extrêmes & les moyens, rend la même équation que ci-dessus.

Puisque $\overline{CH}^2 . \overline{CB}^2 :: KH . KL :: aa-bb . aa$, il s'ensuit que le demi-axe $CB$ ou $CD = \frac{abc}{aa-bb}$; & qu'ainsi $DF$ ou $DC + CF = \frac{abc+bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a-b}$, & $FB$ ou $CB - CF = \frac{abc-bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a+b}$. Donc $DF \times FB = \frac{bbcc}{aa-bb} = \overline{CH}^2$; & partant le point $F$ est * l'un des foyers de cette Ellipse qui a pour grand axe la ligne $BD$. Ces remarques nous fournissent une construction beaucoup plus simple que la précedente : La voici. * Art. 35.

Soient prises sur $FA$ du côté de $A$ la partie $FB = \frac{bc}{a+b}$, & du côté opposé la partie $FD = \frac{bc}{a-b}$. Ayant pris $DG$ égal à $BF$ du côté de $F$; soit décrite des foyers $F$, $G$, & de l'axe $BD$ * une Ellipse; il est évident qu'elle satisfera à la question. * Art. 36.

*Second cas.* On aura dans ce cas $yy + \frac{2aac}{bb-aa}y - \frac{aa}{bb-aa}xx - \frac{aacc}{bb-aa} = 0$, parce que $a$ est moindre que $b$. Le lieu de cette équation sera deux Hyperboles opposées, que l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv. 7.). Aprés

avoir fait les mêmes remarques, que dans le cas précedent, on trouvera cette construction.

Fig. 202. Soient prises sur $FA$ du côté du point $A$ les parties $FB = \frac{bc}{b+a}$, $FD = \frac{bc}{b-a}$. Ayant pris $DG$ égal à $BF$

* Art. 76. du côté opposé au point $F$, soient * décrites des foyers $F, G$, & du premier axe $BD$, deux Hyperboles opposées $BM$, $DM$. Elles seront le lieu de tous les points cherchés $M$.

*Troisiéme cas*. L'équation generale $aayy - bbyy - 2aacy + aaxx + aacc = 0$ se changeant en cette autre $xx - 2cy + cc = 0$, parce que $a = b$, son lieu est une Parabole

Fig. 203. qu'il est facile de construire selon l'article 310. (Liv. 7.) mais on voit tout d'un coup & sans avoir besoin d'aucun calcul, que si l'on décrit une Parabole qui ait pour directrice la ligne $AP$, & pour foyer le point $F$, selon qu'il est enseigné dans la définition premiere du premier Livre; elle sera le lieu requis.

## COROLLAIRE. I.

366. Il est clair dans le premier cas, que $CF \left(\frac{bbc}{aa-bb}\right)$. $CB \left(\frac{abc}{aa-bb}\right) :: CB \left(\frac{abc}{aa-bb}\right)$. $CA \left(\frac{aac}{aa-bb}\right) :: a.\, b$; & l'on trouve la même chose dans le second cas: ce qui donne lieu à ce Theorême.

Fig. 201. 202. Si dans une Ellipse ou deux Hyperboles opposées qui ont pour centre le point $C$, pour foyers les deux points $F, G$, & pour premier axe la ligne $BD$, on prend $CA$ troisiéme proportionnelle à $CF$, $CB$, du côté du foyer $F$; & qu'on mene la droite indéfinie $AP$ perpendiculaire sur $BD$: je dis que si d'un point quelconque $M$ de la Section, l'on tire sur $AP$ la perpendiculaire $MP$, & au foyer $F$ la droite $MF$; la raison de $MP$ à $MF$, sera toûjours la même que du premier axe $BD$ à la distance $FG$ des foyers.

Dans les Corollaires suivans cette ligne droite indéfinie $AP$ s'appellera *Directrice* à l'égard de ces deux

Sections ; aussi-bien qu'à l'égard de la Parabole. D'où l'on voit qu'il est facile de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné $F$, pour directrice une ligne donnée de position $AP$, & qui passe par un point donné $M$ ; car tirant au foyer $F$ la ligne $MF$, & & sur la directrice $AP$ la perpendiculaire $MP$, & nommant les données $MP$, $a$ ; $MF$, $b$ ; il n'y aura qu'à décrire le lieu des points $M$ tels que $MP$ soit toûjours à $MF$ comme $a$ est à $b$.

## COROLLAIRE II.

367. Si l'on joint deux points quelconques $M$, $N$, d'une Section conique, par une ligne droite qui rencontre la directrice en $C$ ; & que du foyer $F$, on tire les droites $FM$, $FN$, $FC$ : je dis que la ligne $FC$ coupe en deux parties égales l'angle $NFH$ complement à deux droits de l'angle $NFM$, lorsque les points $M$, $N$, tombent sur une Parabole, Ellipse, ou Hyperbole ; & l'angle $NFM$, lorsqu'ils tombent sur deux Hyperboles opposées. FIG. 204. 205.

Car tirant les perpendiculaires $MP$, $NQ$, sur la directrice, & la ligne $ND$ parallele à $MF$ ; les triangles semblables $MPC$, $NQC$, & $MFC$, $NDC$, donnent $MP. NQ :: MC. NC :: MF. ND$. Et partant $MP. MF :: NQ. ND$. Or par la proprieté de la Section conique qui a pour directrice la ligne $PQ$, & pour foyer le point $F$, on aura $MP. MF :: NQ. NF$. Les lignes $ND$, $NF$, seront donc égales entr'elles ; c'est pourquoi dans le premier cas l'angle $NDF$ ou $CFH$ sera égal à l'angle $CFN$, & dans le second l'angle $FDN$ ou $CFM$ sera égal à l'angle $CFN$. Ce qu'il falloit prouver.

## COROLLAIRE III.

368. DE-LA on voit comment on peut décrire une Parabole, Ellipse, ou Hyperbole qui passe par trois FIG. 204.

points donnés *M*, *N*, *O*, & qui ait pour foyer le point donné *F*.

Soient menées par le foyer *F*, les droites *FC*, *FE*, qui divisent par le milieu les angles *NFH*, *NFK*, complemens à deux droits des angles donnés *MFN*, *OFN*; & par les points *C*, *E*, où elles rencontrent les lignes *MN*, *ON*, qui joignent les points donnés, soit tirée une ligne droite indéfinie *CE*. Soit décrite une Section conique qui ait pour directrice la ligne *CE*, pour foyer le point *F*, & qui passe par le point *M*: il est clair selon le Corollaire précedent qu'elle passera aussi par les deux autres points *N*, *O*.

## COROLLAIRE IV.

FIG. 205. 369. ON tire encore du Corollaire second une maniere de décrire deux Hyperboles opposées qui ayent pour foyer le point *F*; & dont l'une d'elles passe par deux points donnés *M*, *O*, & l'autre par un point donné *N*.

Soit menée par le point *F* la ligne *FE* qui divise par le milieu l'angle *HFO* complement à deux droits de l'angle *MFO* formé par les droites *FM*, *FO*, tirées du point *F* aux deux points *M*, *O*, qui doivent se trouver dans la même Hyperbole; & soit encore menée par le même point *F* la ligne *FC*, qui divise en deux parties égales l'angle *MFN* formé par les droites *FM*, *FN*, tirées du point *F* aux deux points *M*, *N*, qui doivent tomber sur les deux Hyperboles opposées. Par les points *E*, *C*, où les lignes *FE*, *FC*, rencontrent les droites *MO*, *MN*, qui joignent les points donnés, soit tirée une ligne droite indéfinie *EC*. Soient enfin décrites deux Hyperboles opposées, qui ayent pour foyer le point *F*, pour directrice la ligne *EC*, & dont l'une d'elles passe par le point *M*: il est évident qu'elles satisfont à la question.

## COROLLAIRE V.

370. Les mêmes choſes étant poſées que dans le Corollaire ſecond ; il eſt viſible que l'angle *MFN* difference de l'angle *CFM* & de ſon complement à deux droits *CFH* ou *CFN*, diminuë à meſure que le point *N* aproche du point *M* ; de ſorte qu'il s'évanoüit tout-à-fait, lorſque le point *N* tombe ſur le point *M*. L'angle *CFM* ſera donc égal alors à ſon complement à deux droits, & par conſequent il ſera droit. Or comme la ligne *MN* devient alors la tangente *MT*, puiſqu'elle paſſe * par deux points infiniment proches de la courbe ; on voit naître une maniere generale & toute nouvelle de mener d'un point donné *M* ſur une Section conique, une tangente *MT*, un foyer *F* avec l'axe qui paſſe par ce foyer étant donnés. FIG. 204. * Art. 188.

Car ayant trouvé la directrice comme il eſt enſeigné dans le Corollaire ſecond, on menera du point donné *M* au foyer *F* la droite *MF*, ſur laquelle on tirera la perpendiculaire *FT* qui rencontre la directrice en *T*, par où & par le point donné *M* on tirera la tangente cherchée *MT*.

## EXEMPLE XI.

371. Deux angles *KAM*, *KBM*, mobiles autour des points fixes *A*, *B*, étant donnés ſur un plan, avec une ligne droite indéfinie *FK* qui ne paſſe par aucun de ces points ; ſoit imaginé le point de concours *K* des deux côtés *AK*, *BK*, ſe mouvoir le long de la droite *FK*, & ſoit propoſé de trouver la nature de la ligne courbe que décrit dans ce mouvement le concours *M* des deux autres côtés *AM*, *BM*, prolongés lorſqu'il eſt neceſſaire de l'autre côté des points *A*, *B*. FIG. 206.

Sur *AB* comme corde, je décris de l'autre côté du point *M*, un arc de cercle capable d'un angle *BDA* qui vaille quatre droits moins les deux angles donnés *KAM*, *KBM* ; & ayant achevé le cercle entier dont

cet arc fait partie, il peut arriver que la droite indéfinie *FK* tombe toute entiere au dehors de ce cercle, ou qu'elle passe au dedans, ou enfin qu'elle le touche; ce qui fait trois differens cas que j'explique en particulier.

*Premier cas*. Du centre *C* du cercle *BDAE* je mene sur *FK*, la perpendiculaire *CF* qui le rencontre aux points *D*, *E*; & je fais passer par le point *D* (plus proche de la ligne *FK* que l'autre point *E*) les deux côtés *DA*, *DB*, des deux angles *DAP*, *DBQ*, égaux aux angles *KAM*, *KBM*, lesquels côtés étant prolongés vers *D* rencontrent la ligne *FK* aux points *G*, *H*. Or par la construction l'angle *BDA* plus les deux angles *DAP*, *DBQ*, vaut quatre droits; & comme le même angle *BDA* plus les deux angles *DAB*, *DBA*, vaut deux droits; il s'ensuit que les angles *BAP*, *ABQ*, vallent deux droits, & qu'ainsi les lignes *AP*, *BQ*, sont paralleles entr'elles. Cela posé.

Soit mené du point *K* sur les deux côtés *AD*, *BD*, les perpendiculaires *KR*, *KS*; & des points *A*, *M*, sur les deux autres côtés *BQ*, *AP*, les perpendiculaires *AI*, *MP*, qui rencontrent *BQ*, aux points *I*, *Q*. Soient les données $FE = a$, $FD = b$, $BI = c$, $AI = d$, $FG = g$, $FH = h$, $DG = m$, $DH = n$; & les inconnuës $FK = z$, $AP = x$, $PM = y$; & à cause des triangles rectangles semblables, *GDF*, *GKR*, on aura ces deux proportions: $GD\,(m) . GF\,(g) :: GK\,(z - g) . GR = \frac{gz - gg}{m}$. Et $GD(m) . DF(b) :: GK\,(z - g) . KR = \frac{bz - bg}{m}$. Or les triangles rectangles semblables *GDF*, *EDA*, donnent aussi $GD\,(m) . DF\,(b) :: ED\,(a - b) . AD = \frac{ab - bb}{m}$, & partant $AD + DG$ ou $AG = \frac{ab - bb + mm}{m}$, & $AG + GR$ ou $AR = \frac{ab - bb + mm + gz - gg}{m} = \frac{ab + gz}{m}$; parce $mm = bb + gg$ à cause du triangle rectangle *DFG*. Mais les triangles rectangles *ARK*, *APM* sont semblables,

196.

197.

200.

199.

201.

203.

205.

*Planche 21. pag. 282.*



car retranchant des angles égaux $KAM$, $DAP$ le même angle $KAP$, les restes $KAR$, $PAM$, seront égaux ; & par consequent $AR\ (\frac{ab+gz}{m})$. $RK\ (\frac{bz-bg}{m})$ :: $AP\ (x)$. $PM\ (y)$, d'où l'on tire $z = \frac{aby+bgx}{bx-gy}$.

Maintenant les triangles rectangles semblables $HDF$, $HKS$ donnent $HS = \frac{bz+bb}{n}$, $KS = \frac{bz+bb}{n}$ ; & les triangles rectangles semblables $HFD$, $EBD$, donnent $DH\ (n)$. $DF\ (b)$ :: $DE\ (a-b)$. $DB = \frac{ab-bb}{n}$. Et partant $BD + DH$ ou $BH = \frac{ab-bb+nn}{n}$, & $BH - HS$ ou $BS = \frac{ab-bb+nn-bz-bb}{n} = \frac{ab-bz}{n}$, parce que $nn = bb + bb$ à cause du triangle rectangle $DFH$. Or les triangles rectangles $BSK$, $BQM$, sont semblables ; car retranchant des angles égaux $DBQ$, $KBM$, le même angle $DBM$, les restes $KBS$, $MBQ$, seront égaux ; & par consequent $BS\ (\frac{ab-bz}{n})$. $SK\ (\frac{bz+bb}{n})$ :: $BQ\ (x-c)$. $QM\ (y+d)$. D'où l'on tire $z = \frac{aby-bbx+bcb+abd}{bx+by-bc+bd}$.

Comparant cette derniere valeur de $z$ avec la précedente, multipliant en croix, & faisant pour abreger $GH\ (g+b) = f$, on arrive enfin en divisant par $abf$ à cette équation.

$$\begin{array}{llll} yy + dy & + \frac{b}{a}xx & - \frac{bc}{a}x & = 0 \\ \quad - \frac{bc}{f} & & - \frac{bd}{f} & \\ \quad + \frac{cgb}{af} & & + \frac{dgb}{af} & \end{array}$$

dont le lieu que l'on pourra construire selon l'article 324. (Liv. 7.) sera une Ellipse, parce que le terme $\frac{b}{a}xx$ sera toûjours précedé dans ce premier cas du signe $+$, en quelque situation que se puissent trouver les points $A$, $B$, $K$.

*Second cas.* Aprés avoir nommé les lignes par les FIG. 207.

mêmes lettres que dans le premier cas, & fait les mêmes raisonnemens; on arrivera à cette équation.

$$\begin{array}{llll} yy + dy & - \frac{b}{a}xx & + \frac{bc}{a}x & = 0 \\ - \frac{bc}{f} & & - \frac{bd}{f} & \\ - \frac{cgh}{af} & & - \frac{dgh}{af} & \end{array}$$

qui ne differe de la précedente que dans quelques signes, & dont le lieu que l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv. 7.) sera toûjours deux Hyperboles opposées, parce le terme $\frac{b}{a}xx$ sera toûjours précedé du signe − dans ce second cas.

Comme le plan $xy$ ne se rencontre point dans les deux équations précedentes; & que l'angle $APM$ est droit; on connoît d'abord que l'un des axes de l'Ellipse dans le premier cas, & des Hyperboles oppsées dans le second doit être parallele aux lignes $AP$, $BQ$; & qu'il a avec son parametre la même raison que $EF$ ($a$) à $FD$ ($b$), parce que la fraction $\frac{b}{a}$ qui multiplie le quarré $xx$ exprime ce rapport.

Lorsque le point $K$ en parcourant la ligne indéfinie $KF$ arrive au point $O$ où cette ligne rencontre la circonference, il est clair que les côtés $AM$, $BM$, qui décrivent par leur point de concours $M$ l'Hyperbole $BAM$ deviennent paralleles entr'eux; qu'ils se coupent vers le côté opposé, pendant que le point $K$ parcourt la partie $OL$ de la ligne $KF$ renfermée dans la circonference; qu'ils deviennent encore paralleles, lorsque le point $K$ tombe en $L$, aprés quoi ils se rencontrent de nouveau vers le même côté. D'où l'on voit que le point $M$ décrit l'Hyperbole $BAM$, pendant que le point $K$ parcourt les deux parties indéfinies de la droite $KF$ qui tombent de part & d'autre de la circonference; & qu'il décrit son opposée, pendant que le point $K$ parcourt la partie $OL$ renfermée dans la circonference.

FIG. 268. *Troisiéme cas.* Comme dans ce troisiéme cas la droite

indéfinie $FK$ touche la circonference du cercle $BDAE$ en quelque point $F$, il eſt clair que le point $D$ des deux autres cas ſe confond ici avec le point $F$, & qu'ainſi les triangles $DFG$, $DFH$, s'évanoüiſſent : c'eſt pourquoi on ſe ſervira en leur place des triangles $DAE$, $DBE$, de la maniere qui ſuit.

Soient les données $AE = a$, $EB = b$, $EF = m$, $AF = g$, $BF = h$, $BI = c$, $AI = d$; & les inconnuës $FK = z$, $AP = x$, $PM = y$. Les triangles rectangles $FKR$, $EFA$ ſont ſemblables ; car l'angle $KFR$ ou ſon oppoſé au ſommet $TFA$ fait par la tangente $FT$ & la corde $FA$, a pour meſure la moitié de l'arc $AF$ ; de même que l'angle $FEA$ : & partant $FE(m). EA(a) :: KF(z). FR = \frac{az}{m}$. Et $EF(m). FA(g) :: FK(z). KR = \frac{gz}{m}$. Or les triangles rectangles ſemblables $ARK$, $APM$, donnent $AR$ ou $AF + FR \left(\frac{az + gm}{m}\right). RK\left(\frac{gz}{m}\right) :: AP(x). PM(y)$ ; d'où l'on tire $z = \frac{gmy}{gx - ay}$. On trouvera de même, à cauſe des triangles rectangles ſemblables $EFB$, $FKS$, que $FS = \frac{bz}{m}$, & $KS = \frac{hz}{m}$ ; & à cauſe des triangles rectangles ſemblables $BSK$, $BQM$, que $BS$ ou $BF - FS \left(\frac{hm - bz}{m}\right). SK\left(\frac{hz}{m}\right) :: BQ(x - c). QM(y + d)$ ; ce qui donne $z = \frac{hmy + hmd}{hx - ch + bd + by}$.

Comparant ces deux valeurs de $z$, multipliant en croix, & mettant par ordre les termes, on trouve cette équation $yy + dy - \frac{cgh}{ah + bg}y - \frac{dgh}{ah + bg}x = 0$, dont le lieu ſera toûjours une Parabole que l'on peut conſtruire ſelon l'article 310. (Liv. 7.) & qui aura ſon axe parallele aux droites $AP$, $BQ$.

Il eſt donc évident 1°. Que le lieu de tous les points cherchés $M$ ſera toûjours une Section conique, dont l'axe ou l'un des axes ſera parallele aux lignes $AP$, $BQ$ ; & en particulier qu'il ſera une Ellipſe dans le premier

cas, deux Hyperboles opposées dans le second, & une Parabole dans le troisiéme ; & que dans le premier & le second cas, l'axe qui est parallele à *AP*, aura avec son parametre, la même raison que *EF* à *FD*. 2°. Que dans le premier & le troisiéme cas les deux points fixes *A*, *B*, autour desquels tournent les angles mobiles *KAM*, *KBM* tomberont toûjours du même côté de la ligne *FK*, aulieu que dans le second ils peuvent tomber non-seulement du même côté de cette ligne, mais encore de part & d'autre ; parce que la circonference du cercle *ADBE* sur laquelle ils sont situés, est coupée alors en deux portions par la ligne *FK*.

## REMARQUE I.

FIG. 206. 207. 208. 372. 1°. UNE ligne quelconque qui passe par l'un des points fixes *A* ou *B*, comme *AM*, étant donnée, on pourra toûjours trouver sur cette ligne le point *M* où elle rencontre la Section qui est le lieu requis, en cette sorte. Ayant mené la droite *AK* qui fasse avec *AM* l'angle *MAK* égal à l'angle donné qui doit tourner autour du point fixe *A*, on menera du point *K* où elle rencontre la droite *FK*, par le point fixe *B*, l'angle *KBM* égal à l'autre angle donné, qui doit tourner autour de l'autre point fixe *B* ; & le point *M* où le côté *BM* de cet angle rencontre la ligne *AM*, sera celui qu'on cherche. 2°. Lorsque le point *K* en parcourant la ligne *FK*, se trouve tellement situé que le côté *AM* de l'angle *KAM* tombe sur la ligne *AB* ; il est visible que le point de concours *M* des deux côtés *AM*, *BM*, tombe alors sur le point *B*, & qu'ainsi le lieu des points *M* passe par le point fixe *B* ; on prouvera de même qu'il passe par le point *A*.

FIG. 206. Delà on voit que pour décrire la Section conique qui est le lieu des points cherchés *M*, sans avoir besoin des équations précedentes, il n'y a qu'à mener comme dans l'exemple les droites *AP*, *AI* ; sur lesquelles ayant

trouvé, selon cette remarque, les points où elles rencontrent la Section, & achevé le rectangle qui a pour côtés ces deux lignes, il n'y aura qu'à décrire * autour de ce rectangle, l'Ellipse ou les deux Hyperboles opposées (selon que *FK* tombe au dehors ou au dedans du cercle), dont l'axe qui est parallele à *AP* soit à son conjugué, comme le quarré de *EF* est au quarré de *DF*. Si la Section est une Parabole (ce qui arrive lorsque la ligne *KF* touche le cercle *BDA*); on trouvera sur la ligne *AI* le point où elle rencontre la Section, & on décrira selon l'article 170. (Liv. 4.) une Parabole qui passe par ce point, & par les deux autres donnés *A*, *B*; & dont les diametres soient paralleles aux lignes *AP*, *BQ*.

* Art. 176. & 178.

Fig. 208.

## Remarque II.

373. Lorsque le point *K* en parcourant la ligne *FK*, est tellement situé que le côté *AM* de l'angle *KAM* tombe sur *AB*, il est clair non seulement que le point *M* tombe en *B*; mais aussi que le côté *BM* de l'angle *KBM* devient tangente * en *B* de la ligne courbe qui est le lieu du point *M*, puisque le point *M* peut être regardé alors comme étant infiniment prés du point *B*. D'où il suit que pour mener une tangente de ce lieu en *B*, il n'y a qu'à mener par le point *A* une ligne droite *AC* qui fasse avec *BA* un angle *BAC* égal à l'angle donné *KAM*, & tirer ensuite une ligne *BD*, qui fasse avec *BC* l'angle *CBD* égal à l'autre angle donné *KBM*; car le côté *BM* de cet angle, qui devient *BD*, touchera la Section en *B*. Il en est de même de l'autre point fixe *A*.

Fig. 209.

* Art. 188.

Delà on tire encore une maniere trés-facile de décrire la Section conique qui est le lieu de tous les points *M* sans avoir besoin des équations précedentes, ni même d'aucun calcul. Ayant mené par le point fixe *B* une tangente *BD*, & par l'autre point fixe *A* une parallele *AE* à cette tangente, on trouvera * sur cette ligne le point *E* où elle rencontre la Section; & l'ayant divisée par le milieu en *H* on tirera *BH*, sur laquelle on cherchera *

Fig. 209.

* Art. 372.

* Art. 372.

aussi le point $G$ où elle rencontre la Section. Cela fait,
* Art. 162. 161. on décrira * du diametre $BG$ & de l'ordonnée $HA$ ou $HE$, une Section conique qui sera celle qu'on demande. Car il est visible que la ligne $BG$ qui divise par le milieu en $H$ la ligne $AE$ terminée par la Section & parallele à la tangente en $B$, en sera un diametre qui aura pour ordonnée la ligne $AH$. Où l'on doit remarquer que lorsque le point $H$ tombe entre les points $B$, $G$; la Section est une Ellipse; que lorsqu'il tombe de part ou d'autre de ces deux points, ce sont deux Hyperboles opposées; & qu'enfin lorsque la ligne $BG$ est infinie, la Section est une Parabole.

## COROLLAIRE I.

FIG. 210. 374. CET exemple nous fournit le moyen de faire passer par quatre points donnés $A$, $B$, $H$, $M$, une Section conique d'une espece déterminée.

Car 1°. Soit la Section conique une Ellipse, dont le grand axe soit à son parametre, en la raison donnée de $a$ à $b$. Je forme le triangle $ABH$, en joignant trois des points donnés par des lignes droites; & du quatriéme point $M$, je fais passer par les points $A$, $B$, les angles $MAK$, $MBK$, égaux aux angles $GAH$, $RBA$, complements à deux droits des angles $HAB$, $HBA$. Je décris sur $AB$ comme corde de l'autre côté du point $M$ un arc de cercle $BDA$ capable d'un angle qui vaille quatre droits moins les deux angles $KAM$, $KBM$; & du centre $C$ de cet arc, je décris un autre cercle dont le rayon $CF$ soit au rayon $CD$ du premier, comme $a+b$ est à $a-b$; & du point de concours $K$ des deux côtés $AK$, $BK$, des angles $MAK$, $MBK$, je tire une tangente $KF$ à ce dernier cercle. Maintenant je dis que si l'on fait mouvoir le point $K$ le long de la droite indéfinie $FK$; le point de concours $M$ des deux autres côtés $AM$, $BM$, prolongés lorsqu'il sera necessaire de l'autre côté des points $A$, $B$, décrira dans ce mouvement l'Ellipse qu'on demande. Car il est évident selon

ce

ce qu'on a dit dans le premier cas de l'exemple, que le lieu des points *M* sera une Ellipse, dont le grand axe sera à son parametre comme *BF* (*a*) à *DF* (*b*); & de plus qu'elle passera par les points *A*, *M*, *B*, *H*, puisque le point *K* étant en *G*, le côté *AM* tombera sur *AH*, & le côté *BM* sur *BR*.

2°. Lorsque c'est une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées qu'il est question de décrire par quatre points donnés *A*, *B*, *H*, *M*, & dont le grand axe soit à son parametre en la raison donnée de *a* à *b*; la construction demeure la même, excepté que le rayon *CF* du cercle concentrique au cercle *BDAE*, doit être au rayon *CD*, comme $a-b$ est à $a+b$.

3°. Lorsqu'il s'agit de décrire une Parabole par quatre points donnés *A*, *B*, *H*, *M*. Ayant décrit comme dans le premier cas le cercle *BDAE*, on menera du point de concours *K* une tangente à ce cercle, qui sera la droite indéfinie sur laquelle faisant mouvoir le point *K*, l'autre point de concours *M* décrira la Parabole qu'on demande.

Comme l'on peut mener d'un même point deux tangentes à un cercle, il s'ensuit qu'on peut décrire deux differentes Sections coniques qui satisfont également lorsque le Problême est possible; car lorsque le point *K* tombe au dedans du cercle qui a pour rayon *CF*, il est visible que le Problême est impossible.

On pourra décrire la Section conique par le moyen de ses axes en se servant de l'article 372, ou par le moyen d'un de ses diametres & d'une ordonnée à ce diametre, en se servant de l'article 373.

## COROLLAIRE II.

375. On tire encore de cet exemple, une nouvelle maniere de décrire une Section conique qui passe par cinq points donnés *A*, *B*, *H*, *M*, *N*. Car ayant joint trois quelconques de ces points *A*, *B*, *H*, par des FIG. 211.

lignes droites, on fera passer par les autres points *M*, *N*, & par les deux points fixes *A*, *B*, les angles *MAK*, *NAS*, égaux chacun à l'angle *HAG* complement à deux droits de l'angle *HAB*, & les angles *MBK*, *NBS* égaux chacun à l'angle *ABR* complement à deux droits de l'angle *ABH*; & on tirera par les points de concours *K*, *S*, une ligne droite indéfinie *S*, *K*, sur laquelle faisant mouvoir le point *K*, il est clair que le point de concours *M* décrira dans ce mouvement la Section conique qu'on demande; puisqu'elle passera par les cinq points donnés *A*, *B*, *H*, *M*, *N*.



# LIVRE NEUVIÉME

## *De la conſtruction des Egalités.*

## PROPOSITION I.

### Problême.

376. CONSTRUIRE *toute égalité donnée, dans laquelle l'inconnuë ne ſe trouve qu'au premier degré.*

Soit en premier lieu l'inconnuë $x$ égale à une ou à pluſieurs fractions ſimples, telles que $\frac{ab}{c}$, ou $\frac{abe}{cf}$, ou $\frac{abeh}{cfg}$ &c. Ayant fait $c.b :: a.l$, il eſt clair que cette quatriéme proportionnelle $l = \frac{ab}{c}$; & ſi l'on fait $f.l :: e.m$, l'on aura $m = \frac{el}{f} = \frac{abe}{cf}$; & faiſant enfin $g.m :: h.n$, il vient $n = \frac{mh}{g} = \frac{abeh}{cfg}$ en mettant pour $m$ ſa valeur $\frac{abe}{cf}$. De ſorte qu'on aura l'inconnuë $x$ égale à $l$, ou à $m$, ou à $n$, &c. ſelon que $x$ ſera égale à $\frac{ab}{c}$ ou à $\frac{abe}{cf}$, ou à $\frac{abeh}{cfg}$, &c. Or il eſt viſible qu'en augmentant le nombre des proportions, autant qu'il ſera neceſſaire, on trouvera toûjours une ligne droite égale à une fraction ſimple donnée, tel que puiſſe être le nombre des dimenſions de ſon numerateur. D'où l'on voit que l'on pourra toûjours trouver une ligne $x$ égale à une quantité compoſée de pluſieurs fractions ſimples; car ayant trouvé en particulier des lignes droites égales à chacune de ces fractions, il n'y aura qu'à les ajoûter, ou retrancher ſelon qu'il ſera marqué par les ſignes $+$ & $-$. Qu'il faille, par exemple, trouver une ligne $x = a + \frac{ab}{c} + \frac{aab}{cf} - \frac{aacc}{bf}$, on ajoûtera les deux lignes $b = \frac{ab}{c}$ & $l = \frac{aab}{cf}$ à la ligne $a$ pour en compoſer une ſeule, de laquelle ayant retran-

ché la ligne $m = \frac{aac}{bb}$, le reste sera la valeur cherchée de l'inconnuë $x$, c'est à dire qu'on aura $x = a + b + l - m$.

Soit en second lieu l'inconnuë $x$ égale à une ou à plusieurs fractions composées, c'est à dire, dont les dénominateurs ayent plusieurs termes. On cherchera d'abord, comme l'on vient d'enseigner ci-dessus, une ligne égale au dénominateur divisé par une ligne arbitraire lorsque chacun de ses termes, n'a que deux dimensions, par un plan lorsqu'ils en ont trois, par un solide lorsqu'ils en ont quatre, &c; ce qui réünira tous les termes du dénominateur en un seul, lequel étant substitué en leur place, changera la fraction composée en une ou en plusieurs simples selon que le numerateur est composé d'un ou de plusieurs termes; & ayant trouvé comme ci-dessus une ligne qui leur soit égale, elle sera celle qu'on cherche. Ceci s'éclaircira par les exemples qui suivent.

On demande une ligne $x = \frac{age - bce}{bb + af}$, je cherche d'abord une ligne $m = f + \frac{bb}{a}$ c'est à dire égale au dénominateur $af + bb$ divisé par la ligne $a$; ce qui donne $bb + af = am$, & ayant trouvé ensuite une ligne $n = \frac{age - bce}{am} = \frac{ge}{m} - \frac{bce}{am}$; il est clair que la ligne cherchée $x = n$. De même si l'on demandoit une ligne $x = \frac{a^3b + aacc - abcf}{aaf + ccf + bff}$, on trouveroit une ligne $m = a + \frac{cc}{a} + \frac{bf}{a}$ c'est à dire égale au dénominateur $aaf + ccf + bff$ divisé par le plan $af$; ce qui donne $afm = aaf + ccf + bff$, & ensuite une autre ligne $= \frac{a^3b + aac - abcf}{afm} = \frac{aab}{fm} + \frac{acc}{fm} - \frac{bc}{m} = x$. Il en est ainsi de tous les autres exemples que chacun se peut former à plaisir.

Il est inutile d'avertir que si l'on demandoit une ligne $x$ égale à une ou à plusieurs fractions tant simples que

composées ; il faudroit chercher en particulier des lignes égales à chacune de ces fractions, pour les ajoûter ensuite ou les retrancher les unes des autres, selon que les signes + ou — le feroient connoître.

## COROLLAIRE I.

377. IL est facile par le moyen de cette Proposition de trouver 1°. Une fraction simple $\frac{x}{a}$ ou $\frac{a}{x}$, dont le dénominateur où le numerateur $a$ soit donné, égale à une ou à plusieurs fractions simples ou composées ; car il n'y aura qu'à trouver une ligne $x$ égale à la ligne $a$ multipliée ou divisée par ces fractions. Qu'il faille trouver par exemple, une fraction $\frac{x}{a} = \frac{ce+ff}{af+cf} + \frac{aa}{gg}$, il est visible qu'il n'y aura qu'à trouver une ligne $x = \frac{ace+aff}{af+cf} + \frac{a^3}{gg}$. 2°. Un plan $ax$, dont l'un des côtés $a$ est donné, égal à un ou à plusieurs plans si composés qu'ils puissent être ; car il ne faut pour cela que trouver une ligne $x$ égale à tous ces plans divisés par $a$. 3°. Un solide $aax$ ou $abx$, dont deux des côtés $a$, $a$, ou $a$, $b$, sont donnés, égal à plusieurs solides ; puisqu'il ne faut pour cela que trouver une ligne $x$ égale à tous ces solides divisés par le quarré $aa$ ou par le plan $ab$. 4°. Un sursolide $a^3x$ ou $abcx$ dont trois côtés $a$, $a$, $a$, ou $a$, $b$, $c$, sont donnés, égal à plusieurs sursolides ; puisqu'il ne faut encore pour cela que trouver une ligne $x$ égale à tous ces sursolides divisés par le cube $a^3$ ou par le solide $abc$. Et il en est de même de plusieurs produits de cinq dimensions, de six &c. que l'on peut toûjours reduire en un seul dont tous les côtés, excepté un, soient donnés.

## COROLLAIRE.

378. DE LA on voit que pour trouver un quarré égal à plusieurs plans donnés, il les faut réünir

duire à l'une de ces deux formes, $xx \mp ax - bb = o$, ou
* Art. 376. $xx \mp ax + bb = o$; en trouvant une ligne $a$* égale à toutes les quantités connuës qui multiplient l'inconnuë
* Art. 378. $x$, & un quarré $bb$* égal à tous les plans entierement connus. Cela posé,

FIG. 212. 1°. Soit $xx + ax - bb = o$. Je forme un angle droit $CAB$ dont l'un des côtés $CA = \frac{1}{2}a$, & l'autre côté $AB = b$; & ayant mené l'hypothenuse $BC$ prolongée au delà de $C$, je décris du centre $C$ & du rayon $CA$, un cercle qui coupe $BC$ en deux points $E$, $D$. Je dis que les droites $BD$, $BE$, sont les deux racines de l'égalité proposée $xx \mp ax - bb$: sçavoir $BE$ la racine vraie, & $BD$ la fausse de l'égalité $xx + ax - bb = o$, & au contraire $BD$ la vraie & $BE$ la fausse de l'égalité $xx - ax - bb = o$.

Car faisant $BE = x$, on aura $BD$ ou $BE + ED = a + x$; & si l'on fait $BD = -x$, on trouvera $BE$ ou $BD - ED = -x - a$. Donc en l'un & l'autre cas $DB \times BE = xx + ax = \overline{AB}^2\ (bb)$ par la proprieté du cercle, c'est à dire $xx + ax - bb = o$. Au contraire si l'on fait $BD = x$ ou $BE = -x$, on trouvera $DB \times BE = xx - ax = bb$ ou $xx - ax - bb = o$.

FIG. 213. 2°. Soit $xx \mp ax + bb = o$. Je forme comme dans le premier cas, un angle droit $CAB$ dont l'un des côtés $CA = \frac{1}{2}a$, & l'autre $AB = b$; & ayant mené une droite indéfinie $BD$ parallele à $AC$, je décris du centre $C$ & du rayon $CA$ un arc de cercle qui coupe la ligne $BD$ aux points $E$, $D$. Je dis que les droites $BE$, $BD$, sont les racines de l'égalité proposée $xx \mp ax + bb = o$, sçavoir les deux vraies de l'égalité $xx - ax + bb = o$, & les deux fausses de l'égalité $xx + ax + bb = o$.

Car achevant la demi-circonference $AEDH$, & menant les paralleles $EF$, $DG$ à $AB$; on aura en faisant $BE$ ou $AF = x$, le rectangle $AF \times FH = ax - xx = \overline{FE}^2\ (bb)$ par la proprieté du cercle. De même si l'on fait $BD$ ou $AG = x$, on aura $AG \times GH = ax - xx = \overline{GD}^2\ (bb)$: c'est à dire en l'un & l'autre cas

cas $xx - ax + bb = o$. Si l'on veut que $BE$ ou $AF = -x$, & $BD$ ou $AG = -x$, on trouvera $AF \times FH$ & $AG \times GH = -xx - ax = \overline{FE}^2$ ou $\overline{GD}^2$ $(bb)$ c'est à dire $xx + ax + bb = o$.

Si le cercle qui a pour centre le point $C$, & pour rayon la droite $CA$, ne coupe ni ne touche la parallele $BD$, (ce qui arrive toûjours lorsque $AB$ surpasse $CA$); les racines de l'égalité seront toutes deux imaginaires: mais s'il la touche en un point, les deux racines $BE$, $BD$, deviennent égales chacune au rayon $CA$.

### REMARQUE.

381. LORSQUE dans une égalité l'inconnuë ne se rencontre qu'au quatriéme & au second degré, on peut toûjours réduire cette égalité en une autre où l'inconnuë ne monte qu'au second degré : de maniere que ces sortes d'égalités ne passent que pour être du second degré.

Soit par exemple $z^4 - aazz - aabb = o$. Je suppose une inconnuë $x$ qui soit telle que son rectangle par la donnée $a$ soit égal au quarré $zz$; ce qui donne $ax = zz$. Et mettant à la place de $zz$ cette valeur $ax$, & à la place de $z^4$ son quarré $aaxx$, je change l'égalité donnée $z^4 - aazz - aabb = o$ en cette autre $xx - ax - bb = o$, où l'inconnuë $x$ ne monte qu'au second degré. J'en cherche les racines $x$, comme l'on vient d'enseigner, & prenant des moyennes proportionnelles entre la donnée $a$ & les valeurs de ses racines, je dis qu'elles exprimeront les valeurs cherchées de l'inconnuë $z$: ce qui est évident, puisque $zz = ax$. FIG. 214.

## PROPOSITION III.

### Problême.

382. TROUVER *par une autre voye les racines des égalités du second degré, sans qu'il soit necessaire de changer leur dernier terme en un quarré.*

FIG. 215. 1°. Soit $xx \mp ax - bc = 0$. Ayant décrit un cercle quelconque $ABD$, dont le diametre ne soit pas moindre que les données $a$ & $b-c$ ( je suppose ici que $b$ surpasse $c$ ) ; on inscrira dans ce cercle, à commencer par un de ses points quelconques $A$, deux cordes $AB = a$, $AD = b-c$ : & ayant prolongé $AD$ en $F$ en sorte que $DF = c$, on décrira de son centre $C$, & du rayon $CF$, un autre cercle concentrique qui coupe aux points $F, E, G, H$, les cordes $AD$, $AB$ prolongées. Je dis que $AG$ est la vraie racine, & $AH$ la fausse de l'égalité $xx + ax - bc = 0$ ; & qu'au contraire $AG$ est la fausse, & $AH$ est la vraie racine de $xx - ax - bc = 0$.

Car $AF$ ou $AD + DF = b$, $DF$ ou $AE = c$, & faisant $AG$ ou $BH = x$, on aura $AH = a + x$. Or par la proprieté du cercle $EGFH$, le rectangle $BA \times AF$ $(bc) = GA \times AH$ $(xx + ax)$. Si l'on fait à present $AH = -x$, on aura $AG$ ou $BH$ ou $AH - AB = -x - a$, & par consequent $GA \times AH = xx + ax$ comme auparavant. Donc soit que l'on fasse $AG = x$ ou $AH = -x$, on trouvera toûjours $xx + ax - bc = 0$. On prouvera de même que $AG$ est la racine fausse, & $AH$ la vraie de l'égalité $xx - ax - bc = 0$.

FIG. 216. 2°. Soit $xx \mp ax + bc = 0$. Ayant décrit un cercle quelconque $ABD$, dont le diametre ne soit pas moindre que les données $a$ & $b+c$, on inscrira dans ce cercle, à commencer par un de ses points quelconques $A$, deux cordes $AB = a$, $AD = b+c$ : & ayant pris sur $AD$ la partie $DF = c$, on décrira de son centre $C$ & du rayon $CF$ un autre cercle concentrique qui coupera les cordes $AD$, $AB$, aux points $F, E, G, H$. Je dis que $AG$ & $AH$ sont les deux racines vraies de l'égalité $xx - ax + bc = 0$, & les deux fausses de $xx + ax + bc = 0$. Cela se démontre de même que dans le premier cas.

Si le cercle qui a pour rayon $CF$ ne touchoit ni ne rencontroit la ligne $AB$ en aucun point, il s'ensuivroit que les deux racines de l'égalité seroient imaginaires.

## AVERTISSEMENT.

Tout l'artifice dont je me sers pour construire les égalités qui n'ont qu'une inconnuë, ou pour en trouver les racines, consiste à introduire dans cette égalité une nouvelle inconnuë; en sorte qu'on en puisse tirer plusieurs équations qui renferment chacune les deux inconnuës & qui soient telles que deux quelconques de ces équations renferment ensemble toutes les quantités connuës de la proposée; car autrement en faisant évanoüir l'inconnuë nouvellement introduite, on ne retrouveroit pas l'égalité proposée. Je choisis ensuite entre ces équations deux des plus simples, & en ayant construit separément les lieux, leurs points d'intersections me donnent les racines que je cherche. Il y a de l'art à introduire l'inconnuë; car il faut que les lieux que l'on tire de la proposée, soient les plus simples qu'il se puisse: par exemple, si l'égalité est du quatriéme degré, il faut que les lieux des équations qu'on tire ne passe point le second degré; que parmi ces lieux il y ait toûjours un cercle comme étant le plus simple, & aussi une Parabole, une Hyperbole équilatere &c. Or c'est ce que j'ai tâché d'executer dans les Lemmes & les Propositions qui suivent.

## LEMME FONDAMENTAL.

*Pour la construction des Egalités du troisiéme & du quatriéme degré, par le moyen d'un cercle, & d'une Parabole donnée.*

383. SOIT proposée l'égalité $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$, dans laquelle $x$ est l'inconnuë, & $a, b, c, d, f,$ sont les données; & soit supposée une autre inconnuë $y$ telle que son rectangle par la connuë $a$, soit égal au rectangle de $x + b$ par $x$. Ce qui donne les équations suivantes.

1°. $ay = xx + bx$, de laquelle quarrant chaque membre, on trouve $x^4 + 2bx^3 + bbxx = aayy$; &

mettant à la place de $x^4 + 2bx^3$, sa valeur $aayy - bbxx$ dans l'égalité proposée $x^4$ &c. on la changera en cette seconde équation.

2e. $yy - \frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0$, dans laquelle mettant à la place de $xx$ sa valeur $ay - bx$ trouvée par le moyen de la premiere équation, 1°. Dans $-\frac{bb}{aa}xx$. 2°. Dans $\frac{c}{a}xx$. 3°. Dans $-\frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx$, on arrive à ces trois differentes équations.

3e. $yy - \frac{bb}{a}y + \frac{b^3x}{aa} + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0$.

4e. $yy - \frac{bb}{aa}xx + cy - \frac{bc}{a}x - dx - af = 0$.

5e. $yy + cy - \frac{bb}{a}y - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = 0$. Si l'on retranche de cette cinquiéme équation, la premiere $xx + bx - ay = 0$, & qu'ensuite on la lui ajoûte, on aura ces deux autres.

6e. $yy + cy - \frac{bb}{a}y + ay - xx - bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = 0$.

7e. $yy + cy - \frac{bb}{a}y - ay + xx + bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = 0$.

Maintenant si l'on prend pour les inconnuës $x$ & $y$ deux lignes droites $AP$, $PM$, qui fassent entr'elles un angle quelconque $APM$; il est évident que le lieu de la premiere équation est * une Parabole: que celui de la seconde peut-être une Parabole, une Ellipse, ou une Hyperbole selon que $bb$ est égal, moindre, ou plus grand que $ac$; que celui de la troisiéme est une Ellipse, qui devient un cercle * lorsque $c = a$ & que l'angle $APM$ est droit: que celui de la quatriéme est une Hyperbole, qui devient équilatere * lorsque $b = a$: que celui de la cinquiéme est encore une Parabole: que celui de la sixiéme est une Hyperbole équilatere: & enfin que le lieu de la septiéme est un cercle, lorsque l'angle $APM$ est droit.

* Art. 310.

* Art. 328. & 329.

* Art. 335. & 336.

REMARQUE I.

384. S'il y avoit $-2bx^3$ dans l'égalité proposée au lieu de $+2bx^3$, il faudroit changer dans toutes les équations les signes des termes où $b$ se rencontre avec une dimension impaire ; & si le second terme manquoit, il faudroit effacer tous les termes ou $b$ se trouve. Il en est de même à l'égard des autres termes de l'égalité proposée par rapport aux lettres $c$, $d$, $f$, qu'ils renferment. Mais l'on doit remarquer que dans tous les differens changemens qui peuvent arriver, le lieu de la premiere équation sera une Parabole, celui de la sixiéme une Hyperbole équilatere, & enfin celui de la derniere toûjours un cercle lorsque l'angle $APM$ est droit.

REMARQUE II.

385. On a choisi pour premiere équation $xx+bx=ay$, plûtôt que $xx-bx=ay$ ou simplement $xx=ay$ ; parce qu'en quarrant chaque membre de cette équation, les deux premiers termes du premier membre sont les mêmes que les deux premiers termes de l'égalité proposée $x^4+2bx^3$ &c, & qu'ainsi on peut les faire évanoüir tout d'un coup. Ce qui donne une nouvelle équation dont le lieu n'est que du second degré, & qui étant combinée en differentes façons avec la premiere, sert à en trouver (comme l'on vient de voir) plusieurs autres, dont les lieux n'étant que du second degré, se construisent aisément, parce qu'elles ne renferment point le plan $xy$ ; & entre lesquels le lieu de la derniere équation, est toûjours un cercle, en supposant que les inconnuës $x$ & $y$ fassent entr'elles un angle droit.

## PROPOSITION IV.

### Problême.

386. TROUVER *les racines de l'égalité proposée* $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$, *par le moyen d'une Parabole & d'un cercle.*

FIG. 217. Ayant pris pour les inconnuës & indéterminées $x$ & $y$, les deux lignes droites $AP$, $PM$, qui fassent entr'elles un angle droit $APM$; je construis * d'abord la Parabole qui est le lieu de la premiere équation du Lemme, & ensuite le cercle qui est le lieu de la septiéme; & leurs interséctions me servent à découvrir les differentes valeurs de l'inconnuë $x$ qui seront les racines de l'égalité proposée. Cela se fait en cette sorte.

* Art. 310.

Ayant pris sur la ligne $AP$ prolongée de l'autre côté de $A$ la partie $AD = \frac{1}{2}b$, on menera par le point $D$ une parallele à $PM$, sur laquelle on prendra la partie $DC = \frac{bb}{4a}$ du côté opposé à $PM$; & on décrira de l'axe $CD$ qui ait son origine en $C$, & dont le parametre soit égal à la donnée $a$, une Parabole $MCM$. Cela fait on menera par le point fixe $A$ une parallele $AQ$ à $PM$, sur laquelle ayant pris la partie $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}c = \mp g$ pour abreger, on tirera parallelement à $AP$ la droite $BE = \frac{1}{2}d \pm \frac{bg}{a}$ sçavoir $- \frac{bg}{a}$ lorsque $AB = + g$ c'est à dire lorsque la valeur de $AB$ est positive, & $+ \frac{bg}{a}$ lorsque $AB = - g$; en observant de prendre ou mener ces deux lignes $AB$, $BE$, du côté de $PM$ lorsque leurs valeurs sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. Nommant enfin $EA$, $m$; on décrira du centre $E$, & du rayon $EM = \sqrt{mm + af}$ un cercle; & menant des points $M$ où il coupe la Parabole des perpendiculaires $MP$ sur la ligne $AP$: les par-

ties $AP$ de cette ligne marqueront les racines de l'égalité, sçavoir les vraies lorsque les points $P$ tombent du côté où l'on a supposé $PM$ en faisant la construction, & les fausses lorsqu'ils tombent du côté opposé.

Car prolongeant $MQ$ parallele à $AP$, & qui rencontre l'axe $CG$ au point $L$, on aura $ML$ ou $AP + AD = x + \frac{1}{2}b$, $CL$ ou $MP + DC = y + \frac{bb}{4a}$; & par la proprieté de la Parabole $\overline{ML}^2 = CL \times a$, c'est à dire $xx + bx + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb + ay$, ou $xx + bx = ay$ qui est la premiere équation du Lemme. Maintenant si l'on prolonge $EB$ jusqu'à ce qu'elle rencontre $PM$ en $R$, & qu'on tire le rayon $EM$, on aura à cause du triangle rectangle $ERM$ le quarré $\overline{EM}^2 = \overline{ER}^2 + \overline{RM}^2 = \overline{EB}^2 + 2EB \times BR + \overline{BR}^2 + \overline{PM}^2 - 2AB \times PM + \overline{AB}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BA}^2 + af$ par la construction; c'est à dire en effaçant de part & d'autre les quarrés $\overline{EB}^2$, $\overline{BA}^2$, & mettant pour $2AB$ sa valeur $a + \frac{bb}{a} - c$, & pour $2BE$ sa valeur $\frac{2bg}{a} - d$ ou $b + \frac{b^3}{aa} - \frac{bc}{a} - d$, & pour $BR$ ou $AP$ & $PM$ leurs valeurs $x$ & $y$, la septiéme équation $yy + cy - ay - \frac{bb}{a}y + xx + bx + \frac{b^3}{aa}x - \frac{bc}{a}x - dx = af$, dans laquelle si l'on met à la place de $y$ sa valeur $\frac{xx + bx}{a}$ trouvée par la premiere équation, & à la place de $yy$ le quarré de cette valeur, on retrouve l'équation même proposée $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$. D'où l'on voit que la ligne $AP$ exprime une racine vraie de cette égalité.

Si l'on observe de prendre $-x$ pour $AP$ & $-y$ pour $PM$, lorsque ces lignes tombent du côté opposé où on les a supposées en faisant la construction; on trouvera toûjours par la proprieté de la Parabole la premiere équation, & par la proprieté du cercle la septiéme. Donc &c.

## COROLLAIRE I.

387. Il est visible qu'on rendra la construction précedente generale pour toutes les égalités du troisiéme & du quatriéme degré, & qu'on y employera toûjours une Parabole qui ait pour le parametre de son axe une ligne donnée $a$; si l'on observe 1°. De multiplier par sa racine $x$ l'égalité lorsqu'elle n'est que du troisiéme degré; & de prendre une ligne * $2b$ égale à toutes celles qui multiplient $x^3$, un plan * $ac$ égal à ceux qui multiplient $xx$, un solide $aad$ égal aux solides qui multiplient $x$, & enfin un sursolide $a^3f$ égal aux termes entierement connus de l'égalité donnée. 2°. De changer dans les valeurs des lignes $AD$, $DC$, $AB$, $BE$, $EM$, qui déterminent la construction de la Parabole & du cercle, les signes des termes où $b$ se rencontre avec une dimension impaire s'il y a $-2bx^3$ dans l'égalité donnée, parce qu'il y avoit $+2bx^3$ dans celle du Problême; & d'effacer tous les termes où $b$ se trouve si le terme $2bx^3$ manque, parce qu'alors $b=0$: comme aussi de faire la même chose à l'égard des termes où $c$, $d$, $f$, se rencontrent. 3°. De prendre ou mener ces lignes du côté de $PM$ lorsqu'elles sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. On aura donc $AD = \pm \frac{1}{2}b$, sçavoir $-\frac{1}{2}b$ lorsqu'il y a $+2bx^3$, & $+\frac{1}{2}b$ lorsqu'il y a $-2bx^3$; $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} \pm \frac{1}{2}c = \mp g$, sçavoir $-\frac{1}{2}c$ lorsqu'il y a $+acxx$, & $+\frac{1}{2}c$ lorsque c'est $-acxx$; $BE = \pm\frac{bg}{a} \mp \frac{1}{2}d$, sçavoir $-\frac{bg}{a}$ lorsque $AB = +g$, & qu'il y a $+2bx^3$, ou bien lorsque $AB = -g$, & qu'il y a $-2bx^3$; & au contraire $+\frac{bg}{a}$ lorsque $AB = +g$ & qu'il y a $-2bx^3$, ou bien lorsque $AB = -g$ & qu'il y a $+2bx^3$ ( c'est à dire $-\frac{bg}{a}$ lorsque les valeurs de $AB$ & $AD$ sont l'une positive & l'autre negative, & $+\frac{bg}{a}$ lorsque ces valeurs sont toutes deux ou positi-

* Art. 376.

* Art. 377.

ves ou negatives); comme aussi $+\frac{1}{2}d$ lorsqu'il y a $-aadx$, & $-\frac{1}{2}d$ lorsque c'est $+aadx$: & enfin $EM = \sqrt{mm \mp af}$, sçavoir $+af$ lorsqu'il y a $-a^3f$, & $-af$ lorsque c'est $+a^3f$. D'où l'on tire cette construction geometrique qui est generale pour tous les cas.

Une Parabole $MCM$ qui a pour axe la ligne $CG$ dont le parametre est égal à la ligne $a$, étant donnée, & ayant reduit l'égalité proposée sous cette forme $x^4 \mp 2bx^3 \mp acxx \mp aadx \mp a^3f = 0$; on menera une ligne $AB$ parallele à l'axe $CG$ qui en soit distante de $\frac{1}{2}b$, du côté droit de cet axe lorsqu'il y a $+2bx^3$ dans l'égalité donnée, & du côté gauche lorsqu'il y a $-2bx^3$. On tirera par le point $A$ où la ligne $AB$ rencontre la Parabole, une perpendiculaire $AD$ sur l'axe $CG$; & on prendra sur cet axe les parties $DF = \frac{1}{2}a$, $FG = 2CD$ toûjours du côté opposé à son origine $C$, & la partie $GK = \frac{1}{2}C$ vers son origine $C$ lorsqu'il y a $+acxx$, & du côté opposé lorsqu'il y a $-acxx$. On menera ensuite par les points déterminés $A$, $F$, une ligne droite indéfinie $AF$, & par le point $K$ une perpendiculaire à l'axe qui rencontre $AF$ en $H$; & on prendra sur cette perpendiculaire la partie $HE = \frac{1}{2}d$ du côté droit lorsqu'il y a $-aadx$, & du côté gauche lorsqu'il y a $+aadx$. Cela fait, on décrira un cercle du centre $E$, & du rayon $EM = AE$, lorsque le terme $a^3f$ manque dans l'égalité donnée, c'est à dire, lorsqu'elle n'est que du troisiéme degré: mais lorsqu'elle est du quatriéme, on prendra (aprés avoir nommé $AE, m$;) le rayon $EM = \sqrt{mm \mp af}$, sçavoir $+af$ s'il y a $-a^3f$, & $-af$ s'il y a $+a^3f$. Enfin des points $M$ où ce cercle rencontre la Parabole donnée, menant des perpendiculaires $MQ$ sur la ligne $AB$; elles seront les racines de l'égalité donnée; sçavoir celles qui tombent du côté droit de cette ligne, les vraies; & celles qui tombent du côté gauche, les fausses. FIG. 217.

Car prolongeant $HK$ jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne $AB$ au point $B$, on a par la construction $BK$ ou

$AD = \pm \frac{1}{2}b$, sçavoir $-\frac{1}{2}b$ lorsqu'il y a $+2bx^3$, & $+\frac{1}{2}b$ lorsque c'est $-2bx^3$; & par la proprieté de la Parabole, $CD = \frac{bb}{4a}$. Donc $DG$ ou $DF + FG = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{4a}$, & $DK$ ou $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{4a} \pm \frac{1}{2}c = \mp g$, sçavoir $-\frac{1}{2}c$ lorsqu'il y a $+acxx$, & $+\frac{1}{2}c$ lorsqu'il y a $-acxx$; & l'on doit observer que le point $B$ tombe du côté de $PM$ lorsque $AB = +g$, c'est à dire lorsque sa valeur est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative. Or à cause des triangles semblables $ADF$, $ABH$, on aura $DF\ (\frac{1}{2}a)$. $DA\ (\pm\frac{1}{2}b)$ :: $AB\ (\mp g)$. $BH = \pm\frac{bg}{a}$, sçavoir $+\frac{bg}{a}$ lorsque les valeurs de $AD$ & de $AB$ sont toutes deux positives ou negatives, & $-\frac{bg}{a}$ lorsque l'une d'elles est positive & l'autre negative. Et partant $BE = \pm\frac{bg}{a} \pm \frac{1}{2}d$, sçavoir $-\frac{1}{2}d$ lorsqu'il y a $-aadx$, & $+\frac{1}{2}d$ lorsqu'il y a $+aadx$; & l'on doit encore observer que le point $E$ tombera du côté de $PM$ lorsque la valeur de $BE$ est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative. D'où il est évident que par le moyen de cette construction on déterminera dans tous les cas possibles toûjours comme il est requis, le centre $E$ du cercle.

Si le second terme $2bx^3$ manquoit dans l'égalité donnée, il est clair que les lignes $AB$, $AF$, tomberoient sur l'axe $CG$, en sorte que les points $A$, $D$, se confondroient avec l'origine $C$; puisque $b = 0$. Et par consequent le point $G$ tomberoit sur le point $F$, & les points FIG. 218. $H$, $B$, sur le point $K$: ce qui rend la construction generale beaucoup plus simple. Car il ne faudroit alors que prendre sur l'axe la partie $CF = \frac{1}{2}a$ toûjours vers le dedans de la Parabole, & la partie $FK = \frac{1}{2}c$ vers l'origine $C$ lorsqu'il y a $+acxx$, & du côté opposé lorsqu'il y a $-acxx$; mener $KE = \frac{1}{2}d$ perpendiculaire à l'axe, du côté gauche lorsqu'il y a $+aadx$, & du côté droit lorsqu'il y a $-aadx$; & achever le reste comme dans la construction generale, en observant qu'ici $EC = m$.

De même si le terme $acxx$ manque; le point $K$ tombera sur le point $G$; & si c'est le terme $aadx$, le centre $E$ du cercle tombera en $H$. FIG. 217.

## COROLLAIRE II.

388. On peut encore trouver une construction plus simple pour les égalités du troisiéme degré qui ont un second terme, en les multipliant par l'inconnuë plus ou moins la quantité connuë du second terme, sçavoir plus cette quantité quand le second terme est affecté du signe $-$; & moins cette quantité lorsqu'il y a le signe $+$; ce qui donne une équation du quatriéme degré où le second terme est évanoüi. Qu'il faille, par exemple, trouver les racines de l'égalité du troisiéme degré, $x^3 - bxx + apx + aaq = 0$: je la multiplie par $x + b$ pour avoir l'égalité du quatriéme degré, $x^4 + apxx + aaqx + aabq = 0$,
$\quad - bbxx + abpx$
dans laquelle le second terme est évanoüi; je me sers à present de la construction que l'on vient de donner pour ces sortes d'égalités où le second terme manque, & j'ai $CK\ (\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}c) = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$, $KE\ (\frac{1}{2}d) = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$, & le rayon du cercle $EM = \sqrt{mm - bq}$: ce qui donne cette construction.

Ayant mené une parallele à l'axe $CD$ qui en soit distante vers le côté gauche d'une ligne égale à $b$, & qui rencontre la Parabole au point $A$, je tire par l'origine $C$ de l'axe la droite $CA$, sur laquelle j'éleve par son point de milieu $O$ une perpendiculaire indéfinie $OG$ qui rencontre l'axe au point $G$. Je prends sur l'axe vers son origine $C$ la partie $GK = \frac{1}{2}p$, & ayant tiré par le point $K$ une perpendiculaire à l'axe qui rencontre la ligne $OG$ au point $H$, je prends sur cette perpendiculaire prolongée du côté de $H$ la partie $HE = \frac{1}{2}q$, & je décris du centre $E$ & du rayon $EA$ un cercle. Je dis qu'il coupera la Parabole en des points $M$, d'où ayant abaissé sur l'axe des perpendiculaires $MQ$; celles qui seront FIG. 219.

à droit, marqueront les vraies racines; & celles qui seront à gauche, les fausses de l'égalité proposée $x^3 - bxx + apx + aaq = 0$.

Car ayant mené les perpendiculaires $AD$, $OL$, sur l'axe; on aura par la construction $AD = b$, & par la proprieté de la Parabole $CD = \frac{bb}{a}$. Donc puisque $CA$ est divisée par le milieu en $O$, les triangles semblables $CAD$, $COL$, donneront $OL = \frac{1}{2}b$, $CL = \frac{bb}{2a}$; & à cause des triangles rectangles semblables $CLO$, $OLG$, on aura $CL\ (\frac{bb}{2a}) . LO\ (\frac{1}{2}b) :: LO\ (\frac{1}{2}b) . LG = \frac{1}{2}a$, & par consequent $CK$ ou $CL + LG - GK = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$. De plus à cause des triangles semblables $GLO$, $GKH$, on trouve $KH = \frac{bp}{2a}$, & $KH + HE$ ou $KE = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$ qui tend du côté gauche de l'axe, comme il est prescrit dans la construction lorsqu'il y a $+ aadx$. Le point $E$ est donc le centre du cercle lequel doit déterminer par ses intersections avec la Parabole donnée toutes les racines de l'égalité du quatriéme degré $x^4 + apxx$ &c. Or comme les racines de cette égalité sont celles de la proposée $x^3 - bxx + apx + aaq = 0$, avec une fausse $AD\ (b)$; il s'ensuit que ce cercle doit passer par le point $A$. Donc &c.

On peut encore s'assurer par le calcul que $EA$ est le rayon du cercle cherché. Car menant $EB$ parallele à l'axe, on aura (à cause des triangles rectangles $EBA$, $EKC$) les quarrés des hypothenuses $\overline{EA}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BA}^2$ & $\overline{EC}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{KE}^2$ & par consequent il s'agit de prouver que $\overline{EB}^2 + \overline{BA}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{KC}^2 - bq$; puisqu'on doit prendre $EM = \sqrt{mm - bq}$. Or en mettant à la place de ces lignes de part & d'autre leurs valeurs analytiques, on trouvera les mêmes quantités. Et c'est ce qui doit arriver, si le rayon cherché $EM = EA$.

Pour rendre cette construction generale, il faut ob-

ſerver, 1°. De mener du côté gauche de l'axe la paralle-le qui en eſt diſtante d'une ligne égale à $b$, lorſqu'il y a $-bxx$ dans l'égalité propoſée, & du côté droit lorſqu'il y a $+bxx$. 2°. De prendre ſur l'axe $GK = \frac{1}{2}p$ du côté de ſon origine $C$ lorſqu'il y a $+apx$, & du côté op-poſé lorſqu'il y a $-apx$. 3°. De prendre $HE = \frac{1}{2}q$ du côté gauche lorſqu'il y a $+aaq$, & du côté droit lorſ-qu'il y a $-aaq$. Tout cela eſt trop évident pour m'ar-rêter à le démontrer en détail.

## REMARQUE I.

389. Il eſt à propos de remarquer, 1°. Que ſi le cer-cle ne coupe la Parabole donnée qu'en deux points, il s'enſuivra que l'égalité propoſée n'aura que deux raci-nes réelles lorſqu'elle eſt du quatriéme degré, & qu'une ſeule lorſqu'elle eſt du troiſiéme, & les deux autres ima-ginaires: comme dans la figure 219. où le cercle ne cou-pe la Parabole qu'en deux points $A$, $M$; l'égalité $x^4 + apxx - bbxx$ &c. n'a que deux racines réelles $AD$, $MQ$, qui ſont toutes deux fauſſes, parce qu'elles tom-bent du côté gauche de l'axe. 2°. Que ſi le cercle ne coupoit ni ne rencontroit la Parabole en aucun point (ce qui ne peut arriver lorſque l'égalité eſt du troiſiéme degré comme l'on voit par les conſtructions préceden-tes) les quatre racines ſeroient imaginaires. 3°. Que s'il la touchoit en un point l'égalité propoſée auroit deux racines égales chacune à la perpendiculaire menée de ce point; ce qui vient de ce qu'on peut conſiderer un cercle qui touche une Parabole, comme s'il la coupoit en deux points infiniment proches l'un de l'autre, qui ſont regardés comme réünis dans le point touchant: mais alors l'égalité propoſée ſe pourroit abaiſſer à une du ſecond degré par les regles de l'Algebre ordinaire, de ſorte qu'on n'auroit point beſoin d'une Parabole pour en trouver les racines.

REMARQUE II.

390. Si l'on fait attention à ce qu'on démontre en Algebre qu'en toute égalité où le second terme manque, & qui a toutes ses racines réelles, la somme des vraies est égale à la somme des fausses; on verra naître ce Theorême.

FIG. 218. S'il y a un cercle qui coupe une Parabole en quatre points $M$ d'où l'on abaisse des perpendiculaires $MQ$ sur l'axe $CF$: je dis que la somme des perpendiculaires qui tombent du côté droit de l'axe, sera égale à la somme de celles qui tombent du côté gauche.

Car si l'on prend vers le dedans de la Parabole sur l'axe depuis son origine $C$ la partie $CF$ égale la moitié de son parametre que j'appelle $a$, & qu'ayant tiré du centre $E$ du cercle la perpendiculaire $EK$ sur l'axe, on fasse $FK = \frac{1}{2}c$, $KE = \frac{1}{2}d$, $\overline{EC}^2 - \overline{EM}^2 = af$; il est clair

* Art. 387. par la construction qui est à la fin * du Corollaire premier, que les perpendiculaires $MQ$ seront les racines de cette égalité $x^4 - acxx + aadx + a^3f = 0$ dans laquelle le second terme manque; sçavoir celles qui tombent du côté droit de l'axe, les vraies; & celles qui tombent du côté gauche, les fausses. Donc &c.

Si le cercle passoit par l'origine $C$ de l'axe, il est visible que l'une des perpendiculaires $MQ$ deviendroit nulle ou zero; & qu'ainsi il y auroit alors une perpendiculaire d'une part de l'axe égale aux deux autres de l'autre part.

Si le cercle touchoit la Parabole en un point & la coupoit en deux autres, il faudroit prendre le double de la perpendiculaire menée du point touchant; puisque (comme l'on vient * de dire) on peut regarder ce

* Art. 389. cercle comme s'il coupoit la Parabole en deux points infiniment proches l'un de l'autre, lesquels se réunissent au point touchant.

## REMARQUE III.

391. COMME l'on ne peut imaginer en Geometrie des produits qui ayent plus de trois dimensions; puisque le solide, qui est la quantité la plus composée, n'en a que trois; on pourra diviser, si l'on veut, tous les termes d'une égalité proposée qui passe le troisiéme degré, par telle ligne donnée qu'on voudra, élevée à une puissance moindre d'une unité que chacun de ses termes n'a de dimensions: ce qui ne troublera point l'égalité, & fera que chacun de ses termes, n'exprimera plus que des lignes droites. Soit, par exemple, l'égalité du quatriéme degré $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = o$; je la divise par $a^3$, ce qui donne $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{a} - f = o$, dont chaque terme n'a qu'une dimension, & n'exprime par consequent que des lignes droites. On choisit ordinairement la ligne qui se trouve repetée le plus souvent dans tous les termes de l'équation proposée, comme est ici la ligne $a$, & même quelquefois on la sousentend, en la regardant comme l'unité dans les nombres, qui ne change rien aux quantités qu'elle multiplie ou qu'elle divise: ainsi en faisant $a = 1$, on écrira $x^4 + 2bx^3 + cxx - dx - f = o$, au lieu de $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = o$ ou de $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{aa} - f = o$. Il en est de même des égalités du cinquiéme & du sixiéme degré, &c.

## REMARQUE IV.

392. SI aprés avoir construit le cercle qui est le lieu de la derniere équation du Lemme, on construit une Section conique qui soit le lieu de telle autre de ses équations qu'on voudra; ces deux lieux détermineront par leurs intersections les racines de l'égalité proposée; dont la raison est que faisant évanoüir par le moyen de leurs équations l'inconnuë $y$, on retrouve l'égalité même proposée.

De là il est évident qu'on peut construire cette égalité, 1°. Par le moyen d'un cercle & d'une Hyperbole équilatere, en se servant de la septiéme & de la sixiéme équation du Lemme. 2°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipse dont l'axe parallele à $AP$ est à son parametre comme $a$ est à $c$, en se servant de la septiéme & de la troisiéme équation. 3°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Hyperbole dont l'axe parallele à $AP$ est à son parametre comme $aa$ est à $bb$, en se servant de la septiéme & de la quatriéme équation. Or comme la ligne $a$, dont on se sert pour reduire sous l'expression $ac$ toutes les quantités qui multiplient $xx$, sous l'expression $aad$ celles qui multiplient $x$, & enfin sous l'expression $a^3f$ les quantités entierement connuës, est arbitraire; il s'ensuit qu'en prenant pour cette ligne $a$ une infinité de differentes grandeurs, on pourra construire l'égalité proposée par le moyen d'une infinité de cercles, & d'Ellipses, ou d'Hyperboles équilateres & non équilateres, toutes differentes entr'elles.

On a vû dans l'article 387. qu'en prenant pour l'unité arbitraire $a$ le parametre de l'axe d'une Parabole donnée, on peut en se servant de la premiere & de la septiéme équation construire l'égalité proposée par le moyen d'un cercle & de la Parabole donnée; & je vais faire voir qu'en déterminant cette ligne $a$ d'une certaine maniere, on peut construire l'égalité par le moyen d'un cercle & d'une Ellipse ou d'une Hyperbole semblable à une Ellipse ou à une Hyperbole donnée. Car la raison de ses axes étant donnée par la supposition, la raison de l'axe parallele à $AP$ avec son parametre sera aussi donnée. Si donc l'on nomme cette raison donnée $\frac{n}{m}$; on aura lorsqu'il s'agit de l'Ellipse $\frac{c}{a} = \frac{n}{m}$, & partant $aa = \frac{acm}{n}$; d'où il suit que si l'on prend pour l'unité arbitraire $a$, la racine d'un quarré $aa$ égal * à une
* Art. 378.
quantité connuë $ac$ qui multiplie $xx$ dans l'égalité donnée

donnée, & eſt multipliée par $\frac{m}{n}$, on conſtruira l'égalité en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la troiſiéme équation, par le moyen d'un cercle & d'une Ellipſe dont l'axe parallele à *AP*, ſera à ſon parametre comme *m* eſt à *n*, puiſque $\frac{n}{m} = \frac{c}{a}$. Mais lorſqu'il s'agit de l'Hyperbole, on aura $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$, & partant $a = b\sqrt{\frac{m}{n}}$; d'où l'on voit que ſi l'on prend pour l'unité *a* cette valeur, & qu'on conſtruiſe l'égalité en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la quatriéme équation, l'axe parallele à *AP* de l'Hyperbole qui eſt le lieu de la quatriéme, ſera à ſon parametre comme *m* eſt à *n*, puiſque $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

## REMARQUE V.

393. La ligne *a* qui fait l'office de l'unité, & qui eſt arbitraire, ſuffit comme l'on vient de voir pour conſtruire l'égalité propoſée, par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée, ou bien par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe, ou d'une Hyperbole ſemblable à une donnée. Mais lorſqu'il eſt queſtion de la conſtruire par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe, ou d'une Hyperbole donnée, une ſeule ligne arbitraire ne ſuffit pas; il faut en introduire d'autres dans l'égalité propoſée, afin de pouvoir les déterminer enſuite de maniere que la Section donnée ſerve. C'eſt ce que l'on va executer dans le Lemme ſuivant.

## LEMME FONDAMENTAL

*Pour la conſtruction des Egalités du troiſiéme & du quatriéme degré, avec un cercle & une Ellipſe, ou une Hyperbole donnée.*

394. Soit l'égalité du quatriéme degré $z^4 + abzz - aacz + a^3d = 0$, dans laquelle les lettres *a*, *b*, *c*, *d*,

marquent des lignes données, & la lettre $z$ exprime les racines inconnuës de l'égalité. Je prends une autre inconnuë $x = \frac{fz}{a}$ (la lettre $f$ marque une ligne prise à volonté), & substituant à la place de $z$, $zz$, & $z^4$ leurs valeurs $\frac{ax}{f}$, $\frac{aaxx}{ff}$, & $\frac{a^4x^4}{f^4}$ dans l'égalité précedente, je la change en cette autre $x^4 + \frac{bff}{a}xx - \frac{cf^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = 0$; je prends une troisiéme inconnuë $y$ telle qu'étant multipliée par $f$ son produit $fy$ soit égal au quarré $xx$ de la seconde; ce qui donne les équations suivantes.

1e. $xx - fy = 0$; & substituant à la place de $xx$, & de $x^4$ leurs valeurs $fy$ & $ffyy$ dans l'égalité $x^4 + \frac{bff}{a}xx$ &c, j'ai pour seconde équation.

2e. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = 0$, laquelle étant ajoûtée à la premiere, donne pour troisiéme équation.

3e. $yy + \frac{bf}{a}y - fy + xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = 0$, dont le
* Art. 324. & 329. lieu est * un cercle lorsque les inconnuës & indéterminées $x$ & $y$ font entr'elles un angle droit. Je multiplie la premiere équation par la fraction $\frac{g}{a}$ dans laquelle $g$ exprime une ligne telle qu'on veut de même que $f$, & j'ai $\frac{g}{a}xx - \frac{fg}{a}y = 0$; Et ajoûtant cette équation avec la seconde, & l'en ôtant ensuite, je forme la quatriéme & la cinquiéme équation.

4e. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{gf}{a}y + \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = 0$, dont
* Art. 324. le lieu est * une Ellipse.

5e. $yy + \frac{bf}{a}y + \frac{gf}{a}y - \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = 0$, dont
* Art. 332. le lieu est * une Hyperbole ou les Hyperboles opposées.

## REMARQUE.

395. S'il arrive que quelques termes de l'égalité proposée ayent des signes differens de celle-ci, ou qu'ils

manquent; les lieux de ces cinq équations seront toûjours neanmoins des Sections coniques de même nom: c'est à dire que les lieux de la premiere & de la seconde équation seront toûjours des Paraboles, celui de la troisiéme, un cercle, &c.

## PROPOSITION V.

### Problême.

396. CONSTRUIRE *l'égalité du quatriéme degré* $z^4 + abzz - aacz + a^3d = 0$, *avec un cercle donné & une Hyperbole semblable à une donnée; ou avec une Hyperbole donnée & un cercle.*

Je construis separément * les lieux de la troisiéme & de la cinquiéme équation, en prenant pour les inconnuës & indéterminées $x$ & $y$ les mêmes lignes $AP$, $PM$, qui fassent entr'elles un angle droit $APM$; & les intersections de ces deux lieux me servent à déterminer les valeurs de l'inconnuë $z$, de la maniere qui suit. * *Art.* 324. & 332. Fig. 220. & 221.

Soit menée par le point $A$ origine des $x$, la ligne $AD = \frac{af - bf}{2a}$ parallele à $PM$, & du même côté lorsque $a$ surpasse $b$, & au contraire du côté opposé lorsqu'il est moindre. Et ayant tiré la droite indéfinie $DG$ parallele à $AP$, soient prises sur cette ligne du côté de $PM$ la partie $DC = \frac{cf}{2a}$, & soit décrit du centre $C$ & du rayon $CF$ ou $CG = \frac{f}{2a}\sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}$, un cercle. Maintenant ayant mené $AH = \frac{bf + gf}{2a}$ parallele à $PM$ & du côté opposé, soit tirée la droite indéfinie $HK$ parallele à $AP$, sur laquelle soient prises la partie $HI = \frac{cf}{2g}$ du côté opposé à $PM$, & de part & d'autre du point $I$ les parties $IK$, $IL$, égales chacune à $\frac{f}{2g}\sqrt{cc - bg + 4dg}$ ou $\frac{f}{2g}\sqrt{bg - 4dg - cc}$ (on a

pris pour abreger $h = \frac{\overline{b+g}^2}{a}$). Soit enfin décrite de l'axe $LK$ (qui doit être le premier lorsque $cc + 4dg$ est plus grand que $hg$, & le second lorsqu'il est moindre) qui soit à son parametre $KO$ comme $a$ est à $g$, une Hyperbole ou les Hyperboles opposées qui rencontrent le cercle en des points $M$, $M$, d'où soient abaissées des perpendiculaires $MP$, $MP$, sur la ligne $AP$. Je dis que les parties $AP$, $AP$, de cette ligne seront les racines de l'égalité $x^4 + \frac{bff}{a} xx - \frac{cf^3}{a} x + \frac{df^4}{a} = 0$; en observant qu'elles sont vraies lorsque les points $P$ tombent du côté où l'on a supposé $PM$ en faisant la construction, & fausses lorsqu'ils tombent du côté opposé.

Car on trouvera par la proprieté du cercle la troisiéme équation; & par la proprieté de l'Hyperbole, la cinquiéme; & ôtant la troisiéme de la cinquiéme, on aura $\frac{gf}{a} y + fy - \frac{g}{a} xx - xx = 0$, d'où l'on tire $y = \frac{xx}{f}$; & mettant dans l'une ou dans l'autre de ces deux équations à la place de $y$ cette valeur $\frac{xx}{f}$, & à la place de $yy$ son quarré $\frac{x^4}{ff}$, on trouvera l'égalité $x^4$ &c. Mais ayant les valeurs de $x$, on a celles de $z$; puisque $z = \frac{ax}{f}$.

Maintenant pour satisfaire à la premiere demande du Problême, je nomme le rayon du cercle donné $CF$, $r$; & j'ai par consequent $r = \frac{f}{2a} \sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}$; d'où il suit que si l'on prend $f = \frac{2ar}{\sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}}$, le rayon $CF$ ou $CG$ du cercle qui est le lieu de la troisiéme équation, sera égal à la donnée $r$. Il reste à faire que l'Hyperbole soit semblable à une donnée, c'est à dire, que son premier ou second axe $LK$ soit à son parametre $KO$ en raison donnée de $m$ à $n$; & il est visible qu'il ne faut pour cela que prendre $g = \frac{an}{m}$, puisque $LK . KO :: a . g :: m . n$.

Enfin pour faire en sorte que l'Hyperbole soit donnée, ou, ce qui est la même chose que son premier ou second axe $LK$ & le parametre $KO$ de cet axe soient égaux à des lignes données; je nomme d'abord le premier axe $LK$, $2t$; son parametre $KO$, $p$; & j'ai $KO(p) = \frac{2gt}{a}$, & $LK(2t) = \frac{f}{g}\sqrt{cc+4dg-hg}$ (il faut se ressouvenir que $h = \frac{\overline{b+g}^2}{a}$); ce qui donne $g = \frac{ap}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc+4dg-hg}}$: d'où l'on voit que si $cc+4dg$ surpasse $hg$, & qu'on prenne pour $g$ & pour $f$ ces valeurs, on trouvera dans la construction de la cinquiéme équation pour le premier axe $LK$ & son parametre $KO$ les lignes données $2t$ & $p$. Mais s'il arrive que $cc+4dg$ soit moindre que $hg$, il faudra nommer le second axe $LK$, $2t$; & son parametre $KO$, $p$; ce qui donne comme ci-dessus $g = \frac{ap}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{hg-cc-4dg}}$; où l'on doit observer que $2t$ & $p$ ne marquent plus à present les mêmes lignes qu'auparavant: & s'il arrive que $hg$, dans cette derniere supposition où $2t$ marque le second axe, surpasse $cc+4dg$, il est visible qu'en prenant pour $g$ & $f$ ces valeurs dans la construction de la cinquiéme équation, on trouvera pour le second axe $LK$ & son parametre $KO$ les lignes données $2t$ & $p$.

Il faut bien remarquer qu'il peut arriver que la valeur de $f$ soit imaginaire dans l'une & dans l'autre de ces suppositions; & alors on voit que la construction devient impossible du moins par cette methode. Or comme tous les Auteurs qui s'en sont servis aprés M. Sluze qui en est l'inventeur, la donnent pour generale; j'en ferai une remarque à part, où je ferai voir en examinant par ordre tous les cas qui peuvent arriver, que dans cet exemple même il peut y en avoir une infinité où cette methode ne réüssit point.

Si c'étoient deux Hyperboles conjuguées qui fussent données, la construction seroit toûjours possible; car si

aprés avoir nommé le premier axe d'une de ces Hyperboles $LK$, $2t$; & son parametre $KO$, $p$; il se trouvoit que la valeur de $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc+4dc-bg}}$ fût imaginaire, c'est à dire, que $bg$ surpassât $cc+4dg$; il n'y auroit qu'à se servir dans la construction à la place de cette Hyperbole de sa conjuguée & de son second axe, puisque le second axe de celle-ci étant le même que le premier axe de l'autre, la valeur de $f$ ne renfermeroit plus aucune contradiction. Je dois encore avertir que s'il arrive que $cc+4dg = bg$, l'équation du quatriéme degré s'abaisse à une du second.

## REMARQUE.

397. 1°. Si l'Hyperbole donnée est équilatere. On aura $g = a$, & on se servira dans la construction du Problême de son premier axe, lorsque $cc+4dg$ surpasse $bg$, c'est à dire, en mettant pour $b$ sa valeur $\frac{\overline{b+g}^2}{a}$, & pour $g$ sa valeur $a$, lorsque $cc+4ad$ surpasse $\overline{b+a}^2$; & du second lorsqu'il est moindre. Et la construction sera toûjours possible.

2°. Si le premier axe de l'Hyperbole donnée surpasse son parametre. On se servira dans la construction du Problême de son premier axe, lorsque $cc+4ad$ surpasse $\overline{b+a}^2$; car il suit de là que $cc+4dg$ surpasse $bg$, c'est à dire (en multipliant par $\frac{a}{g}$ & mettant pour $b$ sa valeur $\frac{\overline{b+g}^2}{a}$) que $\frac{acc}{g}+4ad$ surpasse $\overline{b+g}^2$, puisque dans cette supposition $g$ $\left(\frac{ap}{2t}\right)$ étant moindre que $a$, la quantité $\frac{acc}{g}+4ad$ sera plus grande que $cc+4ad$, & $\overline{b+g}^2$ sera moindre que $\overline{b+a}^2$. Au contraire lorsque $cc+4ad$ est moindre que $\overline{b+a}^2$, il faudra se servir du second axe; car il suit de là que $cc+4dg$ est moindre que $bg$, ou que $\frac{acc}{g}+4ad$ est moindre que $\overline{b+g}^2$

puiſque $2t$ marquant à preſent le ſecond axe qui eſt moindre que ſon parametre $p$ la quantité $\frac{ap}{2t}$ eſt ici plus grande que $a$. D'où l'on voit que la conſtruction eſt toûjours poſſible, non ſeulement lorſque l'Hyperbole donnée eſt équilatere, mais encore lorſque le premier axe eſt plus grand que ſon parametre.

3°. Si le premier axe eſt moindre que ſon parametre. Il faudra neceſſairement lorſque $cc + 4ad$ ſurpaſſe $\overline{b+a}^2$, ſe ſervir du premier axe; car ſi l'on employoit le ſecond, il faudroit que $cc + 4dg$ fût moindre que $bg$, ou que $\frac{acc}{g} + 4ad$ fût moindre que $\overline{b+g}^2$; ce qui ne peut être, puiſque $2t$ qui exprimeroit alors le ſecond axe étant plus grand que $p$, la quantité $g$ $\left(\frac{ap}{2t}\right)$ ſeroit moindre que $a$. Mais en ſe ſervant du premier axe, il peut arriver que $\frac{acc}{g} + 4ad$ ſoit moindre que $\overline{b+g}^2$, puiſque $g$ $\left(\frac{ap}{2t}\right)$ eſt plus grand que $a$; & alors il eſt évident que la conſtruction du Problême devient impoſſible, parce que la valeur de $f$ $\left(\frac{2gt}{\sqrt{cc+4dg-bg}}\right)$ renferme une contradiction. De même lorſque $cc + 4ad$ eſt moindre que $\overline{b+a}^2$, il faut neceſſairement ſe ſervir du ſecond axe; & comme alors la valeur de $g$ $\left(\frac{ap}{2t}\right)$ eſt moindre que $a$, il peut arriver que $\frac{acc}{g} + 4ad$ ſoit plus grand que $\overline{b+g}^2$, & qu'ainſi la valeur de $f$ $\left(\frac{2gt}{\sqrt{bg-cc-4dg}}\right)$ ſoit imaginaire.

Il eſt donc évident qu'il peut arriver une infinité de cas, où la conſtruction de l'égalité propoſée dans le Problême devient impoſſible; & cela lorſque le premier axe de l'Hyperbole donnée eſt moindre que ſon parametre, car autrement elle réüſſira toûjours.

## COROLLAIRE I.

389. Si l'on prenoit dans le Problême précedent la quatriéme équation au lieu de la cinquiéme, & qu'on fiſt la conſtruction de même en ſe ſervant de l'Ellipſe qui eſt le lieu de cette équation, au lieu de l'Hyperbole qui eſt le lieu de la cinquiéme : il eſt viſible que l'on conſtruiroit l'égalité propoſée $z^4$ &c. par le moyen d'un cercle donné & d'une Ellipſe ſemblable à une donnée ; ou avec une Ellipſe donnée & un cercle.

## COROLLAIRE II.

399. Il eſt évident qu'on peut rendre la conſtruction précedente generale pour toutes ſortes d'égalités du troiſiéme & du quatriéme degré, en obſervant, 1°. De faire évanoüir le ſecond terme de l'égalité donnée, lorſqu'elle en a un ; de la multiplier enſuite par ſa racine $z$ lorſqu'elle n'eſt que du troiſiéme degré ; & de prendre un plan $ab$ égal à tous les plans qui multiplient $zz$, un ſolide $aac$ égal à tous les ſolides qui multiplient $z$, & enfin un surſolide $a^3d$ égal à tous les ſurſolides donnés. 2°. D'effacer dans les valeurs de $AD$, $DC$, $CF$, $AH$, $IH$, $LK$, les termes où ſe trouve $b$ lorſque $zz$ ne ſe rencontre point dans l'égalité donnée, ceux dans leſquels ſe rencontrent $c$ ou $d$ lorſque le quatriéme ou le cinquiéme terme manquent : & de changer de ſignes tous les termes où $b$ ſe rencontre avec une dimenſion impaire, ſi le troiſiéme terme de l'équation donnée a un ſigne different du troiſiéme de la précedente ; comme auſſi ceux dans leſquels $c$ ou $d$ ſe rencontrent avec une dimenſion impaire lorſque le quatriéme ou le cinquiéme terme ont des ſignes differens des quatriéme & cinquiéme de l'égalité précedente. 3°. De prendre du côté de $PM$ ces lignes lorſque leurs valeurs ſont poſitives, & du côté oppoſé lorſqu'elles ſont negatives.

REMARQ.

## REMARQUE.

400. On peut toûjours rendre la construction précedente plus simple dans les égalités particulieres qu'on se propose de construire, en faisant en sorte que $a$ soit égal à $b$; car il n'y a qu'à reduire l'égalité donnée sous cette forme $z^4 \mp aazz \mp aacz \mp a^3d = 0$, au lieu de cette autre $z^4 \mp abzz \mp aacz \mp a^3d = 0$. Ce qui a empêché de le faire d'abord, c'est qu'on avoit en vûë de rendre la construction du Problême generale pour tous les cas, comme l'on vient de faire dans le Corollaire précedent, & que pour cet effet il falloit que chaque terme de l'égalité renfermât des lettres differentes $b$, $c$, $d$, au premier degré.

## PROPOSITION VI.

### Problême.

401. Construire *les racines de l'égalité* $z^4 - bz^3 - aczz + aadz + aabb = 0$, *par le moyen d'une Hyperbole donnée entre ses Asymptotes, & d'un cercle.*

Ayant fait $z = \frac{ax}{f}$, on transfomera l'égalité donnée en cette autre $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{cff}{a}xx + \frac{df^3}{a}x + \frac{bbf^4}{aa} = 0$. FIG. 222.

Ayant mené d'un point quelconque $M$ de l'Hyperbole donnée qui a pour centre le point $A$, une parallele $MP$ à l'une des Asymptotes $AQ$, & qui rencontre l'autre au point $P$, on nommera les inconnuës & indéterminées $AP$, $x$; $PM$, $y$; lesquelles font entr'elles un angle donné $APM$, & on aura par la proprieté de l'Hyperbole $xy = mm$, en supposant que $mm$ en soit la puissance. Maintenant si l'on prend $f = m\sqrt{\frac{a}{b}}$, on aura $bff = amm$, & $\frac{bbf^4}{aa} = m^4 = xxyy$: & mettant à la place de $\frac{bbf^4}{aa}$ qui est le dernier terme de l'égalité précedente sa valeur

$xxyy$, & diviſant enſuite par $xx$, on trouvera $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{df^3}{ax} + yy = o$, qui ſe change (en mettant dans le terme $\frac{df^3}{ax}$ à la place de $x$ ſa valeur $\frac{bff}{ay}$ trouvée par le moyen de l'équation $xy = mm = \frac{bff}{a}$) en cette autre $xx$
* Art. 328. & 329. $- \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{df}{b}y + yy = o$, dont le lieu eſt * un cercle lorſque l'angle $APM$ eſt droit.

Mais lorſque l'angle $APM$ n'eſt pas droit, ou (ce qui revient au même) lorſque l'Hyperbole donnée n'eſt pas équilatere, il eſt évident que le lieu de la derniere équation n'eſt plus un cercle, mais une Ellipſe. C'eſt pourquoi afin de trouver une équation dont le lieu ſoit un cercle, je prens ſur l'Aſymptote $AP$ la partie $AB = 2a$: & ayant mené $BE$ parallele à l'autre Aſymptote $AQ$, je tire du centre $A$ la perpendiculaire $AE$ ſur $BE$: & nommant les données $BE$, $g$; $AE$, $e$; je multiplie l'équation $xy - mm = o$, dont l'Hyperbole donnée eſt le lieu, par $\frac{g}{a}$; & j'ai $\frac{gxy}{a} - \frac{gmm}{a} = o$. J'ajoûte enſuite cette équation à la précedente lorſque l'angle fait par les Aſymptotes eſt aigu, & je l'en retranche lorſqu'il eſt obtus comme je le ſuppoſe dans cette figure: cela me donne $yy - \frac{g}{a}xy + \frac{df}{b}y + xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff + gmm}{a} = o$,
* Art. 327. & 329. dont le lieu eſt un cercle * qui ſe conſtruit ainſi.

Fig. 222. Soit priſe ſur l'Aſymptote $AQ$ la partie $AD = \frac{df}{2b}$ du côté oppoſé à $PM$: ſoit tirée parallelement à $AE$, la ligne $DC = \frac{bf}{e} - \frac{dgf}{2eb}$ du côté de $PM$ lorſque cette valeur eſt poſitive, & du côté oppoſé lorſqu'elle eſt negative: Enfin du centre $C$ & du rayon $CM = \sqrt{\overline{AC}^2 + \frac{cff - gmm}{a}}$ ſoit décrit un cercle. Je dis qu'il coupera l'Hyperbole donnée & ſon oppoſée en des points $M$, d'où ayant mené des paralleles $MP$ à l'Aſymptote

*AQ*; les parties *AP* de l'autre Asymptote exprimeront les racines de l'égalité $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{cff}{a}xx + \frac{df^3}{a}x + \frac{bbf^4}{aa} = o$: sçavoir celles qui sont du côté de *PM*, les vraies; & celles qui sont du côté opposé, les fausses.

Car par la proprieté du cercle, on trouve cette équation $yy - \frac{g}{a}xy + \frac{df}{b}y + xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff + gmm}{a} =$ qui se réduit (en mettant pour $xy$ sa valeur $mm$) à cette autre $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{df}{b}y + yy = o$, dans laquelle mettant enfin pour $y$ sa valeur $\frac{mm}{x}$ ou $\frac{bff}{ax}$, & pour $yy$ le quarré de cette valeur, on retrouve l'égalité même proposée $x^4 - \frac{bf}{a}x^3$ &c.

Si l'angle fait par les Asymptotes étoit aigu; il faudroit changer dans les valeurs de *AD* & de *CM*, les signes des termes où $g$ se rencontre, dont la raison est que *BE* ($g$) devient negative de positive qu'elle étoit. Mais lorsque l'Hyperbole est équilatere, il faut effacer les termes où $g$ se rencontre & mettre pour $e$ sa valeur $2a$, parce que *AE* tombe alors sur *AB*: ce qui rend la construction beaucoup plus simple.

Lorsqu'on a les differentes valeurs de $x$, il est évident qu'on a aussi celles de $z$, en faisant $z = \frac{ax}{f}$. Et c'est ce qui étoit proposé.

## COROLLAIRE I.

402. Si le dernier terme de l'égalité proposée du quatriéme degré, avoit le signe −, il est clair qu'en operant comme ci-dessus, on trouveroit une équation dans laquelle le terme $yy$ auroit le signe −; & dont le lieu par consequent ne seroit pas un cercle, mais * une Hyperbole. D'où l'on voit que cette methode ne peut servir que pour les égalités du quatriéme degré qui ont leur dernier terme avec le signe +.

* *Art.* 332.

## COROLLAIRE II.

403. On pourra toûjours en se servant de la methode précedente, resoudre toute égalité donnée du troisiéme degré $x^3 \mp nxx \mp apx \mp aaq = o$; par le moyen d'une Hyperbole donnée entre ses Asymptotes, & d'un cercle. Car la multipliant par $x + r$ lorsqu'il y a $+ aaq$, & par $x - r$ lorsque c'est $- aaq$, on la changera toûjours en cette autre du quatriéme degré.

$$\begin{array}{l} x^4 \mp nx^3 \mp apxx \mp aaqx + aaqr = o, \\ \quad \mp r \quad \mp nr \quad\; \mp apr \end{array}$$

dont le dernier terme $aaqr$ aura toûjours le signe $+$, & qui sera par consequent du nombre de celles qu'on peut construire de la maniere précedente.

Mais on abregera beaucoup la construction en observant 1°. De prendre pour l'unité arbitraire $a$ la ligne $m$ racine de la puissance de l'Hyperbole donnée, qui est le lieu de l'équation $xy = mm = aa$, puisque $m = a$. 2°. De profiter de l'indéterminée $r$ pour égaler le dernier terme $aaqr$ avec $a^4 = xxyy$; ce qui donne $r = \frac{aa}{q}$. 3°. Que le cercle qui doit déterminer par ses intersections les racines de l'égalité coupera necessairement l'Hyperbole lorsqu'il y a $- aaq$, & son opposée lorsque c'est

Fig. 223. $+ aaq$, en un point $K$, d'où ayant mené une parallele $KH$ à l'Asymptote $AQ$, la partie $AH$ de l'autre Asymptote doit être égale à $r$, puisque l'égalité du quatriéme degré a pour une de ses racines $x = \mp r$. De là on tire cette construction qu'il est facile de rendre generale pour toutes les égalités du troisiéme degré.

Je suppose que l'angle fait par les Asymptotes de l'Hyperbole donnée soit aigu, & qu'ayant pris pour l'unité arbitraire $a$ la racine de la puissance de l'Hyperbole donnée, on ait réduit l'égalité donnée du troisiéme degré sous cette expression $x^3 - nxx - apx - aaq = o$. Ayant pris sur l'Asymptote $AP$ la partie $AB = 2a$, & mené $BE$ parallele à l'autre Asymptote $AQ$, on tire

du centre $A$ la perpendiculaire $AE$ sur $BE$; & ayant pris sur $AQ$ la partie $AL = q$ du côté de $PM$, parce-qu'il y a $-aaq$ dans l'égalité donnée, on tirera $LK$ parallele à $AP$, & qui rencontre l'Hyperbole au point $K$. Cela fait, on nommera les données $BE$, $g$; $AE$, $e$; $LK$, $r$; & on prendra sur l'Asymptote $AQ$ la partie $AD = \frac{pr}{2a} - \frac{1}{2}q = \mp d$ pour abreger, & on tirera $DC = \frac{an + ar \mp dg}{e}$ parallele à $AE$, en observant de prendre ou mener ces lignes du côté de $PM$ lorsque leurs valeurs sont positives & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. On décrira enfin du centre $C$, & du rayon $CK$, un cercle qui coupera les Hyperboles opposées en des points $M$, d'où ayant mené des droites $MP$ paralleles à l'Asymptote $AQ$; les parties $AP$ de l'autre Asymptote seront les racines de l'égalité proposée $x^3 - nxx - apx - aaq = 0$.

Car prolongeant les droites $MP$, $KH$, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne $DC$ aussi prolongée, s'il est necessaire, aux points $G$, $F$; on aura ( à cause des triangles rectangles $CFK$, $CGM$ ) ces deux égalités $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{CM}^2$, & $\overline{FK}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{CK}^2$ : & par consequent $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{CF}^2$, puisque les lignes $CM$, $CK$, sont rayons d'un même cercle. Or par la construction ( je suppose ici pour éviter l'embarras des signes $+$ & $-$, que $\frac{pr}{2a} - \frac{1}{2}q = +d$, c'est à dire, que cette valeur est positive ) $GM$ ou $PM + PG = y + \frac{g}{2a}x + d$, $CG$ ou $DG - DC = \frac{ex}{2a} - \frac{an - ar - dg}{e}$, $FK$ ou $KH + HF = q + \frac{g}{2a}r + d$; $CF$ ou $CD - DF = \frac{an + ar + dg}{e} - \frac{er}{2a}$. C'est pourquoi mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques dans l'égalité précedente $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{CF}^2$, on en formera d'abord celle-ci $yy + \frac{g}{a}xy + 2dy + \frac{gg + ee}{4aa}xx$

$-nx - rx = qq + \frac{g}{a}rq + 2dq + \frac{gg+ee}{4aa}rr - nr - rr$, en s'épargnant la peine d'écrire de part & d'autre les quarrés de $d$ & de $\frac{aa+ar+dg}{e}$ qui se détruisent mutuellement. Si l'on considere à present qu'à cause de l'Hyperbole, le rectangle $xy = rq$, & qu'à cause du triangle rectangle $AEB$ le quarré $4aa = gg + ee$, on changera l'équation précedente en celle-ci $yy + 2dy + xx - nx - rx = qq + 2dq - nr$, dans laquelle mettant d'abord à la place de $2d$ sa valeur $\frac{pr}{a} - q$, & ensuite à la place de $y$ & $yy$ leurs valeurs $\frac{aa}{x}$ & $\frac{a^4}{xx}$, & ordonnant l'égalité il vient

$$\begin{array}{l} x^4 - nx^3 - apxx - aaqx + a^4 = 0, \\ \quad\; - r \;\; + nr \quad\;\; + apr \end{array}$$

qui étant divisée par $x - r$, donne enfin $x^3 - nxx - apx - aaq = 0$, qu'il falloit construire.

Pour rendre cette construction generale il faut observer, 1°. De prendre la partie $AL$ sur l'Asymptote $AQ$ du côté opposé à $PM$ lorsqu'il y a $+aaq$ dans l'égalité donnée ; & de changer de signes les termes où $q$ & $r$ se rencontrent dans les valeurs de $AD$, $DC$, 2°. De changer de signes le terme où $p$ se rencontre dans la valeur de $AD$ lorsqu'il y a $+apx$ dans l'égalité donnée, & de l'effacer lorsque ce terme y manque : il faut faire la même chose à l'égard du terme où $n$ se rencontre dans la valeur de $DC$, lorsqu'il y a $+nxx$. 3°. De changer de signe le terme où $g$ se rencontre dans la valeur de $DC$, lorsque l'angle fait par les Asymptotes est obtus, & de l'effacer lorsqu'il est droit, en observant alors que $e = 2a$.

## REMARQUE.

404. L'ALGEBRE nous fournit des moyens faciles pour transformer toute égalité du quatriéme degré, en une autre du même degré dont les signes des termes soient alternatifs. Or comme alors son dernier terme

sera toûjours le signe $+$, il est visible qu'en se servant de cette préparation lorsque le dernier terme de l'égalité qu'on veut construire a le signe $-$, on rend la methode du Problême generale pour toutes sortes d'égalités du quatriéme degré. Mais parce que toutes les racines réelles d'une égalité sont vraies, lorsque les signes de ses termes sont alternatifs; il s'ensuit qu'on n'a besoin alors que de l'Hyperbole donnée, puisque son opposée qui ne sert que pour les racines fausses devient inutile.

## PROPOSITION VII.

### Problême.

405. SOIT *proposée à construire l'égalité du sixiéme degré* $x^6 - bx^5 + acx^4 + aadx^3 + a^3exx - a^4fx + a^5g = 0$, *ou* $x^6 - bx^5 + cx^4 + dx^3 + exx - fx + g = 0$ (*en sousentendant la ligne* a *qui rend le nombre des dimensions égal dans chaque terme, & que l'on regarde comme l'unité*); *par le moyen d'un cercle, & d'un lieu du troisiéme degré.*

Je prends pour le lieu du troisiéme degré $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, dans lequel les quantités $m, n, p, q$, que l'on regarde comme données, se doivent determiner d'une maniere convenable pour satisfaire au Problême; ce que je fais en cette sorte: en quarrant chaque membre, j'ai

$$\begin{array}{l} x^6 - 2mx^5 + mmx^4 + 2mnx^3 + nnxx - 2nqx + qq = ppxxyy, \\ \qquad\qquad\quad -2n \qquad\ +2q \qquad\quad -2mq \end{array}$$

& comparant les termes $-2mx^5$, $-2nqx$, $+qq$ avec leurs correspondans dans la proposée $-bx^5$, $-fx$, $+g$, je trouve $m = \frac{1}{2}b$, $q = \sqrt{g}$, $n = \frac{f}{2\sqrt{g}}$; & par consequent $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq = x^6 - bx^5 - fx + g$. Si l'on met à present à la place de $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq$ sa valeur $ppxxyy - mmx^4$ &c. trouvée par le moyen de l'équation précedente, & à la place de $x^6 - bx^5 - fx + g$ sa valeur $-cx^4 - dx^3$ &c. trouvée par le moyen de l'égalité donnée, & qu'ayant divisé par $xx$, on trans-

poſe toutes les quantités d'un même côté, on formera cette équation

$$\begin{array}{llll} ppyy - mmxx & - 2mnx & - nn = 0, \\ \quad\; + 2n & - 2q & + 2mq \\ \quad\; + c & + d & + e \end{array}$$

* *Art.* 328. & 329. dont le lieu ſera * un cercle ſi la quantité $c + 2n - mm$ (qui multiplie le quarré $xx$) eſt poſitive, & qu'on prenne $pp = c + \frac{f}{\sqrt{g}} - \frac{1}{4}bb$; car diviſant par $pp$, & faiſant pour abreger $2r = \frac{2mn + 2q - d}{pp}$ & $ss = \frac{2mq + e - nn}{pp}$ ou $\frac{nn - 2mq - e}{pp}$, on aura $yy + xx - 2rx \mp ss = 0$: ſçavoir $+ ss$ lorſque $2mq + e$ ſurpaſſe $nn$; & $- ss$, lorſqu'il eſt moindre.

Pour conſtruire la ligne courbe qui eſt le lieu de la premiere équation $x^3 - xx - nx + q = - pxy$, je ſuppoſe à l'ordinaire deux lignes droites inconnuës & indé-
Fig. 224. terminées $AP$ ($x$), $PM$ ($y$) qui faſſent entr'elles un angle droit $APM$; & je tire par l'origine $A$ des $x$, une ligne droite indéfinie $AQ$ parallele à $PM$, ſur laquelle ayant pris du côté de $PM$ la partie $AG \frac{n}{p}$, & du côté oppoſé la partie $GB = \frac{q}{mp}$, je mene du côté de $PM$ la droite $BC = m$ perpendiculaire à $AQ$. Cela fait, je décris ſur un plan ſeparé une Parabole $MEM$ qui ait pour parametre de ſon axe la ligne $p = \sqrt{c + 2n - mm}$, & ayant placé ce plan ſur celui-ci en ſorte que l'axe de la Parabole ſe confonde avec la ligne $AQ$ & que la Parabole s'étende vers le côté oppoſé à $PM$, je prends ſur cet axe depuis ſon origine $E$ vers le dedans de la Parabole la partie $EF = BG = \frac{q}{mp}$. Je me ſers enfin d'une longue regle indéfinie $CF$ mobile autour du point fixe $C$, & qui paſſe toûjours par le point $F$, & la faiſant tourner autour du point $C$, en ſorte qu'elle faſſe gliſſer la partie $EF$ de l'axe de la Parabole le long de la ligne $AQ$. Je dis que les deux interſections continuelles $M$, $M$, de cette regle avec la Parabole $MEM$ décriront dans ce mouvement deux lignes courbes qui ſeront le lieu qu'on

qu'on demande. Car par la construction $AB$ ou $AG - GB = \frac{n}{p} - \frac{q}{mp}$, & par la proprieté de la Parabole $EQ = \frac{xx}{p}$ puisque $AP$ ou $MQ = x$. Or les triangles semblables $FQM$, $MDC$, donnent $FQ$ ou $EQ - EF$ $\left(\frac{xx}{p} - \frac{q}{mp}\right)$. $QM(x)$ :: $DM$ ou $PM - AB$ $\left(y + \frac{q}{mp} - \frac{n}{p}\right)$. $CD(m - x)$. Donc en multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$. Et si l'on prend successivement les points $M$ dans les trois angles qui suivent celui-ci, on trouvera toûjours la même équation, en observant de faire $AP = -x$ & $PM = -y$ lorsque les points $P$ & $M$ tombent du côté opposé à celui-ci: de sorte que ces deux lignes courbes, qu'on peut appeller *conchoïdes paraboliques*, seront le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë $y$, qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë $x$, dans l'égalité $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$.

Pour construire le cercle qui est le lieu de la seconde équation $yy + xx - 2rx \mp ss = 0$, il n'y a qu'à prendre sur la droite indéfinie $AP$ la partie $AH = r$ du côté de $PM$ lorsque la valeur de $r$ est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative; ensuite du centre $H$ & du rayon $HM = \sqrt{rr \pm ss}$, sçavoir $-ss$ lorsqu'il y a $+ss$ dans l'équation, & $+ss$ lorsque c'est $-ss$, décrire un cercle; car à cause du triangle rectangle $HPM$, on aura toûjours $\overline{HM}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{PM}^2$, c'est à dire en mettant les valeurs analytiques, & transposant tous les termes d'un côté $yy + xx - 2rx \mp ss = 0$.

Je dis maintenant que si des points $M$ où ce cercle rencontre les conchoïdes paraboliques on mene des perpendiculaires $MQ$ sur la droite indéfinie $AQ$; ces lignes seront les racines de l'égalité proposée : sçavoir celles qui tombent à droit, les vraies; & celles qui tombent à gauche, les fausses. Car menant des paralleles

Tt

$MP$ à $AQ$, on trouve par la proprieté des conchoïdes cette équation $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, c'est à dire, en quarrant chaque membre, $ppxxyy = -x^6 - 2mx^5$ &c ; & par la proprieté du cercle, cette autre $yy + xx - 2rx \mp ss = o$, laquelle étant multipliée par $ppxx$ donne $ppxxyy = -ppx^4 + 2pprx^3 \pm ppssxx$. Et comparant ensemble ces deux valeurs de $ppxxyy$, on formera une égalité dans laquelle si l'on met à la place de $2r$, $ss$, $pp$, $m$, $n$, $q$, leurs valeurs, on retrouvera l'égalité proposée $x^6 - bx^5$ &c.

S'il y avoit dans l'égalité proposée $-dx^3$ au lieu de $+dx^3$, il est visible qu'en prenant alors $2r = \frac{2mn + 2q + d}{pp}$, le reste de la construction ne changeroit point, puisque $d$ ne se rencontre que dans la valeur de $r$. Et comme alors tous les signes des termes de l'égalité proposée sont alternatifs ; c'est une maxime receuë en Algebre que toutes ses racines réelles seront vraies ; c'est à dire, que si cette égalité a deux racines réelles & quatre imaginaires, les deux réelles seront vraies ; si elle en a quatre réelles & deux imaginaires, les quatre seront vraies ; & enfin si toutes les six sont réelles, elles seront toutes vraies. D'où l'on voit qu'on n'a besoin alors que de la conchoïde qui est décrite par la moitié de la Parabole qui tombe du côté du point fixe $C$, puisque l'autre ne sert que pour les racines fausses.

S'il arrivoit que la valeur du rayon du cercle fût nulle ou imaginaire, ou enfin si petite qu'il ne touchât, ni ne coupât les deux conchoïdes en aucun point ; ce seroit une marque infaillible que toutes les racines de l'égalité seroient imaginaires. S'il les coupoit en six points, toutes les racines seroient réelles. Et enfin s'il ne les coupoit qu'en quatre ou en deux, il n'y auroit que quatre ou deux racines réelles, & les autres seroient imaginaires. Il faut toûjours prendre garde que si le cercle touchoit l'une des conchoïdes en quelque point, on doit regarder ce point comme s'il réünissoit deux points infiniment proches, en sorte que l'égalité proposée auroit deux racines égales à la perpendiculaire menée de ce point sur $BE$.

REMARQUE I.

406. Il suit de la deſcription des deux conchoïdes paraboliques, 1°. Qu'elles ont pour Aſymptote commune la droite $BE$ infiniment prolongée de part & d'autre. 2°. Qu'une des conchoïdes paſſe par le point fixe $C$, & qu'alors la regle $CF$ la touchera en ce point; puiſque le point $M$ ſe réüniſſant au point $C$, la regle paſſe par deux points infiniment proches de cette ligne courbe. 3°. Que lorſque le point $F$ tombe ſur $B$, la regle $CF$ qui décrit par les interſections $M$, $M$, avec la Parabole les conchoïdes, tombe ſur $CB$; & qu'ainſi la ligne $MFM$ devient la double ordonnée qui part du point $F$: c'eſt à dire que la ligne $CB$ rencontre les conchoïdes en deux points $K$, $L$, tels que $BK$ & $BL$ ſont égales chacunes à l'ordonnée à l'axe de la Parabole qui part du point $F$. D'où il eſt clair que ſi $BC$ étoit égale à cette ordonnée, le point $K$ tomberoit alors ſur le point $C$; & qu'ainſi la ligne $BC$ qui paſſeroit par deux points infiniment proches $K$, $C$ de la conchoïde la toucheroit en ſe réüniſſant toute entiere dans le ſeul point $C$.

Il n'eſt pas neceſſaire de ſe ſervir de la Parabole $MEM$ FIG. 225. pour trouver les points des conchoïdes; car ayant pris ſur $BE$ la partie $BO$ égale au parametre de la Parabole, & décrit d'un diametre quelconque $OR$ plus grand que $OB$ un cercle qui coupe $BC$ aux points $D$, $D$; on prendra ſur ce diametre la partie $RS$ égale à $EF$, & on tirera par le point fixe $C$ les deux droites $CM$, $CM$, paralleles à $DS$, $DS$, qui rencontreront les paralleles $DM$, $DM$, à $EB$ en des points $M$, $M$, qui ſeront aux deux conchoïdes. Car ayant prolongé $CM$ juſqu'à ce qu'elle rencontre l'Aſymptote $BE$ au point $F$; & mené $MQ$ parallele à $BC$; il eſt clair que les triangles rectangles $MQF$, $DBS$, ſeront égaux, & qu'ainſi $FQ$ eſt égale à $BS$. Or ayant pris $RS$ égale à $EF$; on aura $EF + FQ$, ou $EQ = RS + SB$ ou $RB$; & la Parabole $EM$ qui a pour ſommet le point $E$, & pour

parametre une ligne égale à $BO$, passera par le point $M$; puisque par la proprieté du cercle le quarré de $BD$ ou $MQ$, est égal au rectangle de $BR$ ou $EQ$ par le parametre $BO$; ce que donne aussi la proprieté de la Parabole. D'où il suit que le point $M$ trouvé par cette construction, n'est pas different de celui que donneroit l'interfection de la regle $CF$ avec la demie Parabole $EM$. *Et c'est ce qu'il falloit démontrer.*

Si le point $D$ étoit donné, il ne faudroit pour avoir le point $R$, que mener $DR$ perpendiculaire à $OD$; & le reste de la construction ne changeroit point.

J'avertirai ici en passant, 1°. Que si l'on prend sur $BC$ du côté du point $C$, une partie $BD$ égale à la vraie racine de l'égalité du troisiéme degré $x^3 - \frac{1}{2}mxx - \frac{1}{2}mnp = o$ (les données $BC = m$, $EF = n$, $BO = p$); & qu'on trouve ensuite le point $M$ comme l'on vient d'enseigner: ce point sera plus éloigné de la droite $BC$ que tous les autres points de la portion $KMC$, de sorte que la tangente qui passe par ce point sera parallele à $BC$. 2°. Que si l'on prend sur $BC$ prolongée de l'autre côté du point $B$, une partie $BD$ égale à la vraie racine de l'égalité $x^3 - mnp = o$; le point $M$ de la conchoïde qui répond au point $D$, en sera le point d'inflexion: c'est à dire, le point où de concave elle devient convexe. Comme ceci dépend des principes que j'ai établis dans mon Livre des Infiniment petits, on doit le supposer comme vrai, & remetre à en chercher la raison aprés avoir lû ce Livre ou quelque chose d'équivalent, d'autant plus que cela est inutile pour la resolution des égalités du sixiéme degré dont il est ici question.

## REMARQUE II.

407. Il est visible que pour décrire les deux conchoïdes paraboliques, il faut 1°. Que la ligne $BC$ ($\frac{1}{2}b$) ait quelque grandeur, & qu'ainsi l'égalité proposée doit avoir un second terme. 2°. Que le terme $q$ ne peut être

nul dans l'équation $x^3 - mxx - nx + q = - pxy$, puisqu'en divisant par $x$, elle deviendroit cette autre $xx - mx - n = - py$, dont le lieu est une Parabole; d'où il est clair que le dernier terme $g$ se doit trouver dans l'égalité proposée avec le signe $+$, puisque $q = \sqrt{g}$.

De plus si le terme $fx$ avoit le signe $+$, on lui donneroit le signe $-$ en changeant aussi les signes du deuxiéme & du quatriéme terme; ce qui ne troubleroit point l'égalité, mais changeroit seulement les racines fausses en vraies & les vraies en fausses. Et afin que le lieu de la deuxiéme équation pût être un cercle, il faudroit que $\frac{f}{\sqrt{g}} \mp c$ (sçavoir $+ c$ lorsqu'il y a $+ cx^4$, & $- c$ lorsqu'il y a $- cx^4$) surpassât $\frac{1}{4} bb$. D'où l'on voit que le terme $fx$ manquant, il faut que le terme $cx^4$ ait le signe $+$, & que $c$ surpasse $\frac{1}{4} bb$; & que si le terme $cx^4$ manque, $\frac{f}{\sqrt{g}}$ doit surpasser $\frac{1}{4} bb$.

Il est donc évident que ce sont-là les conditions que doit avoir necessairement l'égalité proposée du sixiéme degré, afin qu'on la puisse construire immediatement par le moyen des conchoïdes paraboliques, & du cercle, comme l'on vient de faire la précedente.

## REMARQUE III.

408. LORSQUE l'égalité donnée n'est que du cinquiéme degré, on peut souvent en l'élevant au sixiéme, lui donner en même temps toutes les conditions necessaires pour être construite immediatement. En voici quelques exemples.

Soit 1°. $x^5 - a^4 b = o$, où l'on suppose que $a$ surpasse $b$. Je multiplie cette égalité par $x - b$, pour avoir celle du sixiéme $x^6 - bx^5 - a^4 bx + a^4 bb = o$, qui a toutes les conditions requises dans la remarque précedente.

Soit 2°. $x^5 - 5aax^3 + 5a^4 x - a^4 b = o$, dans laquelle $a$ surpasse $b$. Je multiplie cette égalité par $x - b$, & j'ai $x^6 - bx^5 - 5aax^4 + 5aabx^3 + 5a^4 xx - 6a^4 bx + a^4 bb = o$,

qui a toutes les conditions necessaires.

Soit 3°. $x^5 - ax^4 - 4aax^3 + 3a^3xx + 3a^4x - a^5 = 0$. Je multiplie cette égalité par $x - 4a$; ce qui me donne $x^6 - 5ax^5 + 19a^3x^3 - 9aaxx - 13a^5x + 4a^6 = 0$, qui est une égalité du sixiéme degré, dans laquelle toutes les conditions necessaires se rencontrent.

Il est bon d'avertir que la premiere égalité $x^5 - a^4b = 0$, sert à trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux extrêmes $A$, $B$; que la seconde $x^5 - 5aax^3$ &c. sert à diviser un angle donné en cinq parties égales; & enfin que la troisiéme $x^5 - ax^4$ &c. sert à inscrire dans un cercle donné un Polygone regulier de onze côtés: & c'est ce qu'on verra dans les articles du Livre suivant. Je vais donner la construction de la premiere de ces égalités, afin qu'on la puisse comparer avec celle qu'on trouve à la fin du troisiéme Livre de la Geometrie de M. Descartes.

FIG. 226. Ayant décrit une Parabole $ME$ qui ait pour le parametre de son axe une ligne $p = \sqrt{aa - \frac{1}{4}bb}$, & pris du côté que l'on voit dans la figure les lignes $AG = \frac{aa}{2p}$, $GB$ ou $EF = 4AG$, $BC = \frac{1}{2}b$, $AH = \frac{5aab}{4pp}$, & une ligne $s = \frac{a}{2p}\sqrt{4bb - aa}$, ou $\frac{a}{2p}\sqrt{aa - 4bb}$; on décrira d'abord une conchoïde parabolique $COM$ (comme l'on a enseigné dans l'article 404.) à l'aide de la Parabole $ME$, & d'une longue regle $CF$ qui tourne librement autour du point fixe $C$, & qui passe toûjours par le point $F$, pendant que la partie $EF$ de l'axe de la Parabole glisse le long de la ligne $AQ$; & ensuite un cercle du centre $H$ & du rayon $HM = \sqrt{\overline{AH}^2 \mp ss}$, sçavoir $+ss$ lorsque $4bb$ surpasse $aa$, & $-ss$ lorsqu'il est moindre. Je dis que si des points $O$, $M$, où ce cercle rencontre la conchoïde, on mene des perpendiculaires $OR$, $MP$, sur $AP$; les parties $AR$, $AP$, seront les racines de l'égalité $x^6 - bx^5 - a^4bx + a^5bb = 0$. Cela se prouve comme dans l'article 404.

On peut s'épargner la peine de trouver une ligne $s = \frac{a}{2p}\sqrt{4bb - aa}$, ou $\frac{a}{2p}\sqrt{aa - 4bb}$; si l'on fait attention que le cercle décrit du centre *H*, doit couper la conchoïde *COM* en un point *O*, tel qu'ayant mené *OR* perpendiculaire sur *AP*, on a la partie $AR = b$; puisque l'une des racines de cette égalité est $x = b$. C'est pourquoi ayant pris sur *AP* la partie $AR = b$, & tiré *RO* perpendiculaire à *AP* & qui rencontre en *O* la conchoïde *COM*; il n'y a qu'à décrire du centre *H* & du rayon *HO* un cercle. Car il la coupera en un autre point *M*, tel, qu'ayant mené *MP* perpendiculaire sur *AP*, la ligne *AP* sera la plus grande des quatre moyennes proportionnelles qu'on demande. Comme le cercle décrit du centre *H* ne coupe la conchoïde qui passe par le point *C* qu'en deux points *O*, *M*, & ne rencontre point l'autre; il s'ensuit que l'égalité proposée $x^6 - bx^5$ &c. n'a que deux racines vraies *AR*, *AP*, & les quatre autres imaginaires.

## REMARQUE IV.

409. LORSQUE l'égalité donnée du sixiéme degré, n'a point les conditions necessaires pour être construite immediatement par la methode que l'on vient d'expliquer, ou bien qu'étant du cinquiéme degré, la remarque précedente se trouve inutile, on pourra se servir de la préparation qu'enseigne M. Descartes dans le troisiéme Livre de sa Geometrie. On y trouve la maniere de transformer toute égalité du cinquiéme ou du sixiéme degré en une autre du sixiéme, dans laquelle tous les termes se rencontrent avec des signes alternatifs, & où la quantité connuë du troisiéme terme surpasse le quarré de la moitié de la quantité connuë du second: ce qui rend la construction du Problême generale pour toutes sortes d'égalités du cinquiéme & du sixiéme degré. Je ne m'arrêterai point ici à expliquer cette préparation, parce qu'elle dépend de l'Algebre pure dont je n'ai point

entrepris de parler, & que d'ailleurs je vais donner dans la Proposition suivante une construction generale pour toutes sortes d'égalités du cinquiéme & du sixiéme degré, qui ne suppose point d'autre préparation que celle de faire évanoüir le second terme.

## PROPOSITION VIII.

### Problême.

410. TROUVER *les racines de l'égalité* $x^6 - bx^4 - cx^3 + dxx - fx + g = 0$, *par le moyen d'une premiere Parabole cubique donnée, & d'une Section conique.*

FIG. 227. Soit $aay = x^3$ l'équation dont le lieu est la premiere Parabole cubique $MAM$ ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$). Je mets dans l'égalité proposée à la place de $x^6$ sa valeur $a^4yy$, à la place de $x^4$ sa valeur $aaxy$, & à la place de $x^3$ sa valeur $aay$; ce qui la change en cette équation du second degré $yy - \frac{b}{aa}xy - \frac{c}{aa}y + \frac{d}{a^4}xx - \frac{f}{a^4}x + \frac{g}{a^4}$

*Art. 323. $= 0$, dont le lieu est une Ellipse *lorsque $d$ surpasse $\frac{1}{4}bb$, c'est à dire, lorsque la quantité connuë qui multiplie $xx$ surpasse le quarré de la moitié de la quantité connuë qui multiplie $x^4$, comme je le suppose ici. Et si l'on veut que la ligne qui fait l'office de l'unité dans l'égalité proposée, & qui y est sousentenduë, soit égale au parametre $a$ de la Parabole cubique donnée; cette équation se changera en celle-ci $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + ag = 0$, dont voici la construction.

Ayant pris sur la droite indéfinie $AP$ la partie $AB = a$, on tirera parallelement à $PM$ & du même côté les droites $BE = \frac{1}{2}b$, $AD = \frac{1}{2}c$: & on menera par le point $A$ la droite $AE$ ($e$), & par le point $D$ une parallele $DG$ à $AE$, sur laquelle on prendra du côté de $PM$ la partie $DC$ ($s$) $= \frac{2afe + bce}{4ad - bb}$, & de part & d'autre du point $C$ les

parties

parties $CK$, $CL$, égales chacune à $t = \sqrt{ss + \frac{ttee - 4agee}{4ad - bb}}$. Cela fait, du diametre $LK$ ($2t$) qui ait pour parametre une ligne $KH = \frac{4adt - bbt}{2ee}$, & pour ordonnées des droites paralleles à $PM$, on décrira l'Ellipse cherchée.

Maintenant si des points de rencontre de cette Ellipse avec la Parabole cubique donnée, on abaisse des lignes $MP$ qui fassent avec $AP$ l'angle donné ou pris à volonté $APM$, les parties $AP$ de la droite indéfinie sur laquelle s'étend l'indéterminée $x$ seront les racines cherchées ; sçavoir celles qui tombent du côté où l'on a supposé $PM$ en faisant la construction, les vraies ; & celles qui tombent du côté opposé, les fausses. Car par la proprieté de la Section conique il vient $yy - \frac{b}{a}xy - ey + \frac{d}{a}xx - fx + ag = 0$, & par la proprieté de la Parabole cubique, $y = \frac{x^3}{aa}$ ; & mettant cette valeur à la place de $y$ & son quarré à la place de $yy$ dans l'équation précedente, on retrouve l'égalité donnée $x^6 - abx^4 - aacx^3$ &c. $= 0$.

## REMARQUE I.

411. TOUTE égalité du cinquiéme ou du sixiéme degré étant donnée, si l'on en fait évanoüir le second terme, & qu'aprés l'avoir multipliée par l'inconnuë $x$ lorsqu'elle n'est que du cinquiéme degré, on se serve du parametre $a$ de la Parabole cubique donnée pour réduire sous l'expression $ab$ les quantités connuës qui multiplient $x^4$, sous l'expression $aac$ celles qui multiplient $x^3$ &c ; il est visible qu'en faisant la substitution comme ci-dessus, on transformera toûjours l'égalité donnée en un lieu du second degré. D'où l'on voit qu'ayant une fois décrit avec exactitude une Parabole cubique qui ait pour parametre une ligne quelconque $a$, & dont l'angle $APM$ que font les appliquées $PM$ avec le diametre $AP$, peut-être pris à volonté ; on pourra toûjours par

son moyen, en décrivant de plus une Section conique convenable, resoudre toutes sortes d'égalités du cinquiéme & du sixiéme degré.

## REMARQUE II.

412. LORSQU'APRÉS avoir fait évanoüir le second terme d'une égalité donnée du cinquiéme & du sixiéme degré, & l'avoir multipliée par l'inconnuë $x$ si elle n'est que du cinquiéme; la quantité connuë qui multiplie le quarré $xx$ est positive, & surpasse le quarré de la moitié de celle qui multiplie $x^4$: on arrivera toûjours en faisant la substitution par le moyen de $aay = x^3$, à une équation du second degré dont le lieu est une Ellipse, comme l'on a vû dans ce Problême. Or l'on pourra toûjours faire en sorte que cette Ellipse devienne un cercle, mais alors la Parabole cubique ne peut plus être donnée. Voici comment il s'y faudra prendre.

* Art. 378. Ayant trouvé une ligne $a$ * dont le quarré de quarré $a^4$ soit égal à la quantité connuë qui multiplie $xx$, on se servira de cette ligne $a$ pour reduire sous l'expression $ab$ toutes les quantités connuës qui multiplient $x^4$, sous l'expression $aac$ celles qui multiplient $x^3$ &c. ce qui reduira l'égalité donnée sous cette forme $x^6 \pm abx^4 \pm aacx^3 + a^4xx \pm a^4fx \pm a^5g = 0$. Et mettant $a^4yy$, $aaxy$ & $aay$ à la place de $x^6$, $x^4$ & $x^3$, on trouvera cette équation du second degré $yy \pm \frac{b}{a}xy \pm cy + xx \pm fx \pm ag = 0$, dont le lieu sera * un cercle, si l'on fait en sorte que l'angle $AEB$ soit droit; ce qui est facile en cette maniere.

* Art. 327. & 329.

FIG. 228. Ayant pris sur la droite indéfinie $AP$ la partie $AB = a$, on décrira de cette ligne comme diametre un demi cercle $AEB$, du côté où l'on suppose que $PM$ doit tomber, lorsqu'il y a $- \frac{b}{a}xy$, & du côté opposé lorsqu'il y a $+ \frac{b}{a}xy$. On portera sur la demi circonfe-

rence de $B$ en $E$, une ligne $BE = \frac{1}{2}b$; & ayant tiré $AB$ ($e$), la ligne $PM$ doit être parallele à $BE$, & on achevera le reste de la construction comme pour l'Ellipse, qui deviendra alors un cercle; puisque l'angle $CGM$ sera droit, & qu'à cause du triangle rectangle $AEB$ il vient $ee = aa - \frac{1}{4}bb$, qui doit exprimer la raison du diametre $LK$ à son parametre. La figure qui est ici à côté represente la construction de l'équation $yy - \frac{b}{a}xy - cy + xx - fx - ag = 0$, qui n'est differente de celle du Problême qu'en ce que $d = a$.

Maintenant ayant pris sur la ligne $AB$ autant de parties $AP$, $AP$, &c. qu'on voudra, & mené des paralleles $PM$, $PM$, &c. à $BE$; on prendra chaque $PM$ égale à la quatriéme proportionnelle à sa correspondante $AP$ & la donnée $AB$. Et faisant passer une ligne courbe $MAM$ par tous les points $M$ ainsi trouvés, il est évident qu'elle sera le lieu de l'équation $x^3 = aay$, & par consequent la premiere Parabole cubique qui par ses points d'intersection $M$, $M$, avec le cercle, servira à découvrir les racines $AP$, $AP$, de l'égalité proposée.

## REMARQUE III.

413. COMME l'on a parlé souvent dans ce Livre des Paraboles de tous les degrés, & qu'on vient même d'employer la premiere Parabole cubique pour resoudre les égalités du cinquiéme & du sixiéme degré; je crois qu'il n'est pas hors de propos d'examiner les differentes figures qu'elles peuvent avoir. Soient donc données de position deux lignes droites indéfinies $BC$, $DE$, qui s'entrecoupent au point $A$, & soit dans l'angle $BAD$ FIG. 229. une Parabole $AM$ de tel degré qu'on voudra, dont la nature est telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques $M$ une parallele $MP$ à $DE$, qui rencontre $BC$ au point $P$; & ayant nommé les indéterminées $AP$, $x$; $PM$, $y$; la donnée $AB$, 1; on ait toûjours $x^m = y^n$ (les lettres $m$ & $n$ marquent les exposans des puissances de

$x$ & $y$ qui peuvent être tels nombres positifs entiers qu'on voudra ; & l'on suppose seulement que $m$ surpasse $n$). Il est évident 1°. Que $AP$ ($x$) étant nulle ou zero, $PM$ ($y$) l'est aussi, & que plus $AP$ ($x$) croît, plus aussi $PM$ ($y$) augmente ; & cela à l'infini. 2°. Que la soutangente $PT$* ($\frac{n}{m}x$) est toûjours moindre que $AP$ ($x$), puisque l'on suppose ici que $n$ soit moindre que $m$. D'où il suit que la Parabole $AM$ de tel degré qu'elle puisse être, passera toûjours par le point $A$ ; qu'elle s'éloignera de plus en plus à l'infini de la droite $BC$ que l'on regarde comme son diametre ; & enfin qu'elle tournera sa convexité du côté de ce diametre. Mais comme la ligne courbe $AM$ qui tombe dans l'angle $DAB$, n'est qu'une portion de cette Parabole, il reste à examiner dans lequel des angles $DAC$, $CAE$, $EAB$, elle doit se continuer ; & pour cela il faut distinguer trois differens cas.

* Art. 237.

*Premier cas.* Lorsque l'exposant $m$ de la puissance de $x$ est un nombre pair, & l'exposant $n$ de la puissance de $y$ un nombre impair. La racine $m$ de $x^m$ sera $\mp x$, & la racine $n$ de $y^n$ sera seulement $+y$ ; car soit par exemple, $m = 4$ & $n = 3$, il est clair que le quarré de quarré où la puissance quatriéme de $\mp x$ est toûjours $x^4$, & qu'il n'en est pas de même du cube de $\mp y$ ; puisque le cube de $+y$ est $y^3$, & celui de $-y$ est $-y^3$. De là il est évident que $AP$ ($x$) peut être positive & negative, & $PM$ ($y$) toûjours positive ; d'où l'on voit que la Parabole $AM$ doit se continuer dans l'angle $DAC$, qui est à côté de l'angle $BAD$, en sorte que si par un point quelconque $K$ de la ligne $AD$, on tire une parallele à $BC$, elle rencontrera la Parabole $MAM$ en deux points $M$, $M$, qui seront également éloignés du point $K$. Telle est la Parabole ordinaire qui est le lieu de l'équation $xx = ay$, ou $xx = y$ en faisant le parametre $a = 1$.

FIG. 229.

*Second cas.* Lorsque les exposans $m$ & $n$ sont des nombres impairs. La racine $m$ de $x^m$ sera seulement $+x$, & de même la racine $n$ sera $+y$ ; mais parceque l'équation

$-x^m = -y^n$ eſt la même que $x^m = y^n$, & que la racine $m$ de $-x^m$ eſt $-x$, & la racine $n$ de $-y^n$ eſt $-y$; il s'enſuit que *AP* ($x$) peut être poſitive & negative de même que *PM* ($y$), en obſervant que lorſque *AP* eſt poſitive, *PM* l'eſt auſſi, & au contraire. D'où l'on voit que la Parabole *AM* doit alors ſe continuer dans l'angle *CAE* oppoſé au ſommet à l'angle *BAD*, dans une poſition toute ſemblable, mais renverſée; en ſorte que prenant *AP* égale à *AP*, & menant *PM* qui faſſe avec *AP* l'angle *APM* égale à l'angle *APM*; cette ligne *PM* rencontre la portion *AM* qui tombe dans l'angle *CAE*, en un point *M* tel que *PM* eſt égal à *PM*. Telle eſt la premiere Parabole cubique $x^3 = aay$, ou $x^3 = y$ en faiſant $a = 1$. FIG. 230.

*Troiſiéme cas.* Lorſque l'expoſant $m$ de la puiſſance de $x$ eſt un nombre impair, & l'expoſant $n$ de la puiſſance de $y$ un nombre pair. La racine $m$ de $x^m$ ſera toûjours $+x$, & la racine $n$ de $y^n$ ſera $\mp y$; car ſoit par exemple, *AM* une ſeconde Parabole cubique qui eſt le lieu de l'équation $x^3 = ayy$, ou $x^3 = yy$, il eſt clair que la racine cubique de $x^3$ eſt ſeulement $+x$, & que celle de $yy$ eſt $\mp y$. D'où il ſuit que la Parabole *AM* doit ſe continuer dans l'angle *BAE* qui eſt à côté de l'angle *BAD*; en ſorte que ſi l'on mene par un point quelconque *P* de la ligne *AB* une parallele à *DE*, elle rencontrera la Parabole entiere *MAM* en deux points *M*, *M*, également éloignés du point *P*. FIG. 231.

Or l'équation generale $x^m = y^n$ appartient toûjours à l'un de ces trois cas; car ſi $m$ & $n$ étoient deux nombres pairs, on extrayeroit de part & d'autre la racine quarrée autant de fois qu'il ſeroit poſſible; ce qui la reduiroit à une équation dont l'un des expoſans ſeroit neceſſairement impair. Et l'on peut toûjours ſuppoſer que $m$ ſurpaſſe $n$; car s'il étoit moindre, & qu'on eût par exemple, $aax = y^3$, on trouveroit en rapportant les points de la Parabole *AM* à ceux de la ligne *DE*, & nommant alors *AK*, $x$; *KM*, $y$; cette autre équation $x^3 = aay$ FIG. 232.

qui exprimeroit aussi la nature de la même Parabole *AM*, & dans laquelle l'exposant de la puissance de $x$ est plus grand que celui de la puissance de $y$; de sorte qu'on pourroit faire alors le même raisonnement par rapport à la ligne *DE*, qu'on vient de faire par rapport à la ligne *BC*. De là il est évident que toutes les Paraboles de tel degré qu'elles puissent être, auront toûjours l'une des trois figures précedentes.

## PROPOSITION IX.

### Problême.

414. SOIT *proposée à construire l'égalité du huitième degré* $x^8 - bx^7 + cx^6 - dx^5 + ex^4 - fx^3 + gxx - hx + l = o$, *dans laquelle aucun terme ne manque, par le moyen de deux lieux geometriques; l'un du second degré, & l'autre du quatrième.*

Ayant pris $xx = av$ pour le lieu du second degré, on substituëra à la place de $x^8$, $x^7$, $x^6$, $x^5$, $x^4$, $x^3$, & $xx$, leurs valeurs $a^4y^4$, $a^3y^3x$, $a^3y^3$, $aayyx$, $aayy$, $ayx$, $ay$, & en prenant la droite donnée $a$ pour l'unité, on aura cette autre équation $y^4 - \frac{b}{a}xy^3 + cy^3 - dxyy + aeyy - afxy + aagy - aahx + a^3l = o$ dont le lieu est du quatriéme degré, & des plus simples; puisque l'une des inconnuës $x$ n'étant qu'au premier degré, on pourra en déterminer tous les points en ne se servant que de cercles & de lignes droites.

Si l'on construit à present la Parabole qui est le lieu de la premiere équation $xx = ay$, & qu'ayant pris pour $y$ autant de differentes grandeurs que l'on voudra, on détermine les valeurs de $x$ qui leur répondent dans la seconde équation; le lieu qui passera par les extrêmités de toutes les $y$, & qui sera par consequent celui de la seconde équation, déterminera par le moyen des points où il rencontre la Parabole, les valeurs cherchées des racines de l'équation donnée. Ce qui est visible; puisque mettant dans cette seconde équation pour $y$ sa valeur

$\frac{xx}{a}$, & pour les puissances de $y$ les puissances de cette valeur, on retrouve l'équation donnée $x^8 - bx^7$ &c $= 0$.

### COROLLAIRE I.

415. COMME l'unité $a$ est arbitraire, on peut supposer qu'elle est donnée, & qu'ainsi la Parabole qui est le lieu de la premiere équation $xx = ay$ est donnée. Or il est évident qu'on pourra toûjours par le moyen de cette équation transformer toute égalité du septiéme ou huitiéme degré, en une autre équation du quatriéme, dans laquelle l'inconnuë $x$ ne se trouve qu'au premier degré. D'où il suit que toute égalité du septiéme ou du huitiéme degré, dans laquelle ou tous les termes se rencontrent ou seulement une partie, se pourra toûjours construire par le moyen d'une Parabole donnée & d'un lieu du quatriéme degré, dans lequel l'une des inconnuës ne se trouvera qu'au premier; & cela sans autre préparation que de prendre pour l'unité le parametre $a$ de la Parabole donnée, afin de reduire sous l'expression $ac$ les quantités connuës qui multiplient $x^6$, sous l'expression $aad$ celles qui multiplient $x^5$, &c.

### COROLLAIRE II.

416. ON prouvera de même que toute égalité du neuviéme ou du dixiéme degré se pourra toûjours construire par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du cinquiéme degré dans lequel l'une des inconnuës ne se trouvera qu'au premier degré: que les égalités de l'onziéme & du douziéme degré se construiront encore par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du sixiéme degré; & ainsi de suite pour les autres à l'infini.

## PROPOSITION X.

### Problême.

417. CONSTRUIRE *l'égalité du neuviéme degré* $x^9 - bx^7 + cx^6$ &c $= 0$, *dans laquelle tous les termes se rencontrent excepté le second; par le moyen de deux lieux geometriques chacun du troisiéme degré.*

Ayant pris $x^3 = aay$ pour l'un des lieux du troisiéme degré, on substituëra à la place de $x^9$, $x^7$, $x^6$, &c. leurs valeurs $a^6y^3$, $a^4xyy$, $a^4yy$, &c, & l'on aura pour l'autre lieu du troisiéme degré, en prenant $a$ pour l'unité;

$y^3 - \frac{b}{a}xyy + cyy$ *&c* $= o$ dans lequel l'inconnuë $x$ ne peut monter qu'au second second degré, puisqu'on suppose que par tout où il y a $x^3$ dans la proposée, on substituë à sa place $aay$.

Or il est visible que si l'on construit ce lieu avec la Parabole cubique, qui est le lieu de l'autre équation $x^3 = aay$, leurs points de rencontre détermineront les racines de l'égalité donnée.

### COROLLAIRE.

418. TOUTE égalité du sixiéme, du huitiéme ou du neuviéme degré étant donnée, il est visible qu'aprés avoir fait évanoüir son second terme, & l'avoir multipliée par sa racine $x$ lorsqu'elle est du huitiéme degré, & par son quarré $xx$ lorsqu'elle n'est que du septiéme, on la transformera toûjours en un lieu du troisiéme degré en se servant de l'équation $x^3 = aay$ dont le lieu est une Parabole cubique donnée, & faisant la substitution comme ci-dessus: de sorte que cette maniere est generale pour toutes les égalités du septiéme, du huitiéme, & du neuviéme degré. On trouvera de même que toute égalité du douziéme degré dont le second terme est évanoüi, se transformera en un lieu du quatriéme, en se servant encore de l'équation $x^3 = aay$; comme aussi celles du

du dixiéme & du onziéme degré en les élevant au douziéme.

Mais si l'on propose une égalité du seiziéme degré dans laquelle tous les termes se rencontrent, excepté le deuxiéme, on trouvera qu'en se servant du lieu du quatriéme degré $x^4 = a^3y$, on la transformera en un lieu du cinquiéme. On trouvera de même qu'une égalité du vingtiéme degré se transformera en un lieu du sixiéme, en se servant encore du lieu du quatriéme degré $x^4 = a^3y$; comme aussi celles du dix-septiéme, dix-huitiéme & dix-neuviéme degré: que les égalités du vingt-cinquiéme degré dans lesquelles tous les termes se rencontrent, excepté le deuxiéme, se transformeront en un lieu du sixiéme degré, en se servant du lieu du cinquiéme $x^5 = a^4y$; comme aussi toutes les égalités du vingt-uniéme, vingt-troisiéme vingt-quatriéme degré. Et l'on peut continuer cette recherche autant qu'on voudra.

## Remarque. I.

419. Il est à propos de remarquer que si dans une égalité du seiziéme degré non seulement le second terme manquoit, mais le troisiéme & le sixiéme; le lieu du cinquiéme degré lequel joint avec celui du quatriéme $x^4 = a^3y$ sert à construire l'égalité se transformeroit en un du quatriéme, & on peut faire des remarques semblables sur les égalités des degrés plus élevés. Mais quoiqu'il soit vrai de dire qu'une égalité du seiziéme degré dans laquelle il n'y a que le deuxiéme terme qui manque, ne se peut transformer qu'en un lieu du cinquiéme, si l'on employe à cet effet le lieu du quatriéme $x^4 = a^3y$ qui n'a que deux termes; on n'en doit pas conclure en general, que les lieux les plus simples pour resoudre une équation complette du seiziéme degré, doivent être, l'un du quatriéme & l'autre du cinquiéme. Car au contraire, il me paroît évident que si l'on se sert d'un lieu du quatriéme degré composé de plusieurs termes à la

place de $x^4 = a^3 y$ qui n'en n'a que deux, on pourra choisir ce lieu en ſorte qu'il ſervira à transformer l'égalité complette du ſeiziéme degré en un autre lieu du quatriéme. En voici la raiſon. Si l'on prend deux lieux du quatriéme degré dans l'un deſquels l'inconnuë $x$ monte au quatriéme degré, & dans l'autre l'inconnuë $y$, il eſt conſtant par les regles de l'Algebre, qu'en faiſant évanoüir l'inconnuë $y$ par le moyen de ces deux équations, on arrivera à une égalité dans laquelle l'inconnuë $x$ montera au ſeiziéme degré. Or comme deux lieux du quatriéme degré, peuvent avoir enſemble plus de ſeize termes, puiſque chacun en peut avoir quinze differens, il s'enſuit qu'ils peuvent contenir toutes les quantités connuës de l'égalité donnée: ce qui ſuffit pour faire voir la poſſibilité de conſtruire une égalité complette du ſeiziéme degré par deux lignes du quatrieme.

On doit de même penſer que les deux lieux les plus ſimples pour conſtruire une égalité complette du vingtiéme, dix-neuviéme, & dix-ſeptiéme degré, ſeront, l'un du quatriéme, & l'autre du cinquiéme, parce que la reduiſe de ces deux lieux montera au vingtiéme degré, & qu'ils pourront contenir enſemble plus de termes que la propoſée, & renfermer par conſequent toutes les quantités connuës qui s'y rencontrent. Et ſi l'inconnuë avoit 21, 22, 23, 24, ou 25 dimenſions dans l'égalité propoſée, il faudroit deux lieux de cinq degrés chacun. De là on forme la regle ſuivante, qui ſert à trouver les degrés des deux lieux qui peuvent reſoudre une égalité propoſée; en ſorte qu'ils ſoient les plus ſimples qu'il eſt poſſible.

Il faut extraire la racine quarrée de la plus haute dimenſion de l'inconnuë. Si elle eſt exacte, chacun des deux lieux doit avoir autant de degrés que cette racine contient d'unités; & ſi elle ne l'eſt pas, ou le reſte eſt égal, ou moindre que la racine, & alors l'un des lieux aura pour degré le nombre de la racine, & l'autre ce même nombre augmenté de l'unité: ou le reſte eſt plus grand que la racine, & alors chacun des deux lieux aura

pour degré le nombre de la racine augmenté de l'unité.

Soit proposé par exemple, de trouver les deux lieux les plus simples, qui peuvent resoudre une égalité, dont la plus haute dimension de l'inconnuë soit de trente-sept degrés. Comme la racine quarrée de 37 est 6, & que le reste 1 est moindre que ce nombre 6, il faudra que l'un des lieux soit du sixiéme degré, & l'autre du septiéme; on trouvera la même chose, si la plus haute dimension est 38, 39, 40, 41 & 42. Mais si elle étoit 43, comme la racine quarrée de 43 est 6, & que le reste 7 est plus grand que cette racine, il faudroit deux lieux qui fussent chacun du septiéme degré; & il en est de même si la plus haute dimension étoit 44, 45, 46, 47, 48 & 49.

## REMARQUE II.

420. Il arrive quelquefois qu'on peut construire une égalité donnée par le moyen d'une seule & même courbe mise en deux differentes positions; & c'est ce qu'on verra clairement dans cet exemple.

Soit proposée à construire l'égalité du neuviéme degré $x^9 + a^8x - a^8b = o$, dans laquelle tous les termes moyens manquent excepté le penultiéme. Je prends l'équation $x^3 = aay$, dont le lieu est une Parabole cubique $MAM$ qui a pour parametre la ligne droite donnée $AB = a$, & pour appliquées des lignes droites $PM$ ($y$) qui font avec les parties correspondantes $AP$ ($x$) de son axe ou diametre un angle pris à volonté $APM$ que je suppose ici droit; & en cubant chaque membre, j'ai $x^9 = a^6y^3$: ce qui change par la substitution l'égalité proposée en cette équation $y^3 = aab - aax$, dont le lieu se construit ainsi.

Soit prise sur $AP$ prolongée du côté de $A$ la partie $AC = b$; & ayant mené par le point $C$ la droite indéfinie $CK$ parallele à $PM$, soit décrite une autre Parabole cubique $MCM$ qui ait pour axe $CK$, & pour appliquées des droites $KM$ paralleles à $AP$, & dont le pa- FIG. 233.

rametre $CD = a$. Je dis qu'elle ſera le lieu requis.

Car par la conſtruction $MK$ ou $CP = b - x$, & par la proprieté de la courbe $\overline{CK}^3 = MK \times \overline{CD}^2$, c'eſt à dire en termes analytiques $y^3 = aab - aax$. Or il eſt évident 1°. Que ſi des points $M$ où cette derniere Parabole cubique $MCM$ rencontre l'autre $MAM$, on mene des paralleles $MP$ à $CE$; les parties $AP$ exprimeront les racines $x$ de l'égalité propoſée $x^9 + a^8x - a^8b = 0$. 2°. Que les Paraboles cubiques $MCM$, $MAM$, ſont préciſément les mêmes; puiſque leurs parametres $AB$, $CD$, ſont égaux, & que les angles $APM$, $CKM$, que font leurs appliquées avec leurs axes le ſont auſſi.

La ſituation des deux Paraboles cubiques $MAM$, $MCM$, fait connoître que l'égalité propoſée $x^9 + a^8x - a^8b = 0$, n'a qu'une racine réelle $AP(x)$, qui eſt toûjours vraie & moindre que $AC(b)$; de ſorte que les huit autres ſont imaginaires.

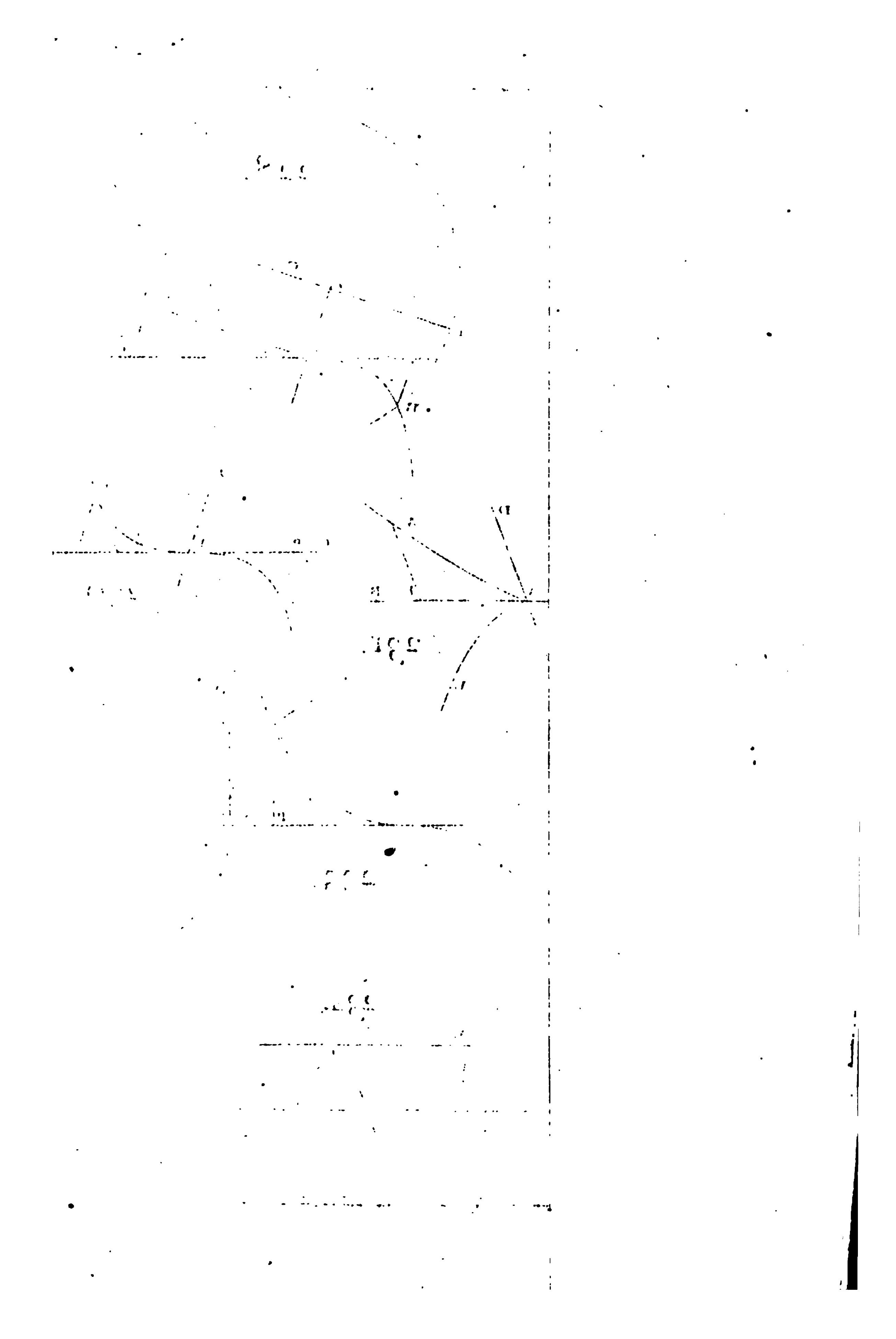
## PROPOSITION XI.

### Problême.

421. CONSTRUIRE *toute égalité de tel degré qu'elle puiſſe être, par le moyen d'une ligne droite, & d'un lieu du même degré, duquel lieu toutefois on puiſſe déterminer tous les points en n'employant que des lignes droites.*

Il faut mettre le dernier terme de l'égalité propoſée tout ſeul d'un côté en le rendant égal à tous les autres, & diviſer enſuite toute l'égalité par la ligne qui fait l'office de l'unité, repetée autant de fois qu'il ſera neceſſaire, afin que chaque terme n'exprime que des lignes: comme ſi l'on propoſoit $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3ex - a^4f = 0$, on auroit $f = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$.

FIG. 334. Cela fait, on prendra ſur une ligne droite indéfinie $AB$ dont l'origine fixe ſoit au point $A$, une partie quelcon-



que $AP$ pour la valeur de $x$; & ayant mené parallelement à la ligne $AC$ donnée de position une droite $PM = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$ ( ce qui se peut toûjours faire * en n'employant que des lignes droites), son extremité $M$ sera l'un des points d'une ligne courbe $ADEM$; dont les intersections $M, M, M$, &c. avec une ligne droite $KM$ menée parallelement à $AB$ par le point $K$ tel que $AK = f$, détermineront des parties $KM, KM, KM$, &c. qui seront les valeurs cherchées de l'inconnuë $x$ dans l'égalité donnée. * Art. 376.

Car menant les droites $MP, MP, MP$, &c. paralleles à $AC$, & nommant les indéterminées $AP, x$; $PM, y$; on aura par la proprieté de la courbe $ADEM$ cette équation $PM\ (y) = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$ qui est un lieu du cinquiéme degré; & par la proprieté de la droite $KM$ cette autre $y = f$. Ce qui, en substituant pour $y$ sa valeur $f$, & multipliant par $a^4$, donne l'égalité même proposée $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadx + a^3ex - a^4f = 0$.

Ces sortes de constructions peuvent être trés-utiles pour trouver les limites des égalités. Supposons, par exemple, qu'on ait une methode pour déterminer sur la ligne $AC$ les parties $AF, AG$, telles que les droites $FD, GE$, paralleles à $AB$ touchent la courbe en des points $D, E$; il est clair 1°. Que si $AK\ (f)$ est moindre que $AF$ & plus grande que $AG$, comme on le suppose dans cette figure, l'égalité proposée aura trois racines vraies $KM, KM, KM$, & les deux autres imaginaires; parce que la figure de la courbe est telle que la ligne $KM$ la rencontrera en trois points, & jamais en davantage. 2°. Que si $AK\ (f)$ est moindre que $AG$, la ligne $KM$ coupera la courbe en cinq points; c'est à dire que l'égalité aura cinq racines vraies. 3°. Que si $AK$ surpasse $AF$, l'égalité n'aura qu'une racine vraie, & les quatre autres imaginaires. 4°. Que si $AK = AF$, l'égalité aura trois racines vraies, dont il y en aura deux

égales entr'elles ; ſçavoir $FD$, $FD$. 5°. Et enfin que ſi $AK = AG$, l'égalité aura cinq racines vraies, dont il y en aura deux égales, ſçavoir $GE$, $GE$.

La même ligne courbe $ADEM$ étant continuée du côté du point $A$, ſervira à trouver les racines de l'égalité $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3ex + a^4f = 0$, qui ne differe de la précedente qu'en ce que le dernier terme a le ſigne $+$ ; ce qui fait voir qu'on doit mener alors la droite $KM$ au deſſous de $AB$, puiſque ſon lieu doit être $y = -f$.

### REMARQUE.

422. On peut varier la conſtruction précedente en differentes manieres ; car au lieu du dernier terme qu'on égale à tous les autres, on pourroit prendre tel autre des termes qu'on voudroit, ou même deux quelconques qui ſe ſuivent immediatement, & les diviſer enſuite d'une maniere convenable, afin que les égalant à l'inconnuë $y$, le lieu de l'équation ne fût que du premier degré. Soit par exemple, l'égalité du troiſiéme degré $x^3 - abx - aac = 0$ ; je fais $\frac{bx}{a} + c = \frac{x^3}{aa}$, & j'ai ces deux équations $x^3 = aay$, & $y = \frac{bx}{a} + c$, dont les lieux étant conſtruis ſeparément donneront les racines de l'égalité propoſée. Voici comment.

FIG. 235. Ayant pris à l'ordinaire pour inconnuës & indéterminées les deux droites $AP$ ($x$), $PM$ ($y$) qui font entr'elles un angle quelconque $APM$, ſoit décrite une premiere Parabole cubique $MAM$ qui ſoit le lieu de la premiere équation $x^3 = aay$. Soit menée par le point $A$ origine des $x$ une ligne droite parallele à $PM$, ſur laquelle ſoient priſes les parties $AC = b$, $AD = c$ du côté où s'étend $PM$ ; & ayant pris ſur $AP$ prolongée du côté de $A$ la partie $AB = a$, ſoit tirée par le point $D$ une parallele indéfinie à $BC$. Je dis que ſi des points $M$ où elle rencontre la premiere Parabole cubique $MAM$, on mene des paralleles $MP$ à $AC$ ; les cou-

pées $AP$ seront les racines de l'égalité donnée $x^3 - abx - aac = 0$.

Car menant $DE$ parallele à $AP$, les triangles semblables $BAC$, $DEM$, donneront $BA(a)$. $AC(b)$ :: $DE(x)$. $EM = \frac{bx}{a}$, & par consequent $PM(y) = \frac{bx}{a} + c$. Or à cause de la premiere Parabole cubique $MAM$, l'on aura $x^3 = aay$. Si donc l'on met à la place de $y$ sa valeur $\frac{bx}{a} + c$, on retrouvera l'équation donnée $x^3 - abx - aac = 0$.

S'il y avoit $+b$ dans l'égalité donnée, il faudroit prendre $AC$ du côté opposé à $PM$, & il en est de même de $AD$ lorsqu'il y a $+c$: de sorte que cette construction est generale pour toute égalité donnée du troisiéme degré. Car il est évident qu'aprés en avoir fait évanoüir le deuxiéme terme, on peut toûjours la reduire sous l'une de ces formes.

Il est visible qu'on peut se servir d'une Parabole cubique donnée, puisqu'il n'y a qu'à prendre l'unité arbitraire $a$ égale à son parametre.

## PROPOSITION XII.

### Problême.

423. APPROCHER *de plus en plus à l'infini de la juste valeur des racines de toute égalité du troisiéme & du quatriéme degré; & des égalités qui passent le quatriéme degré lorsqu'elles n'ont que deux termes: en ne se servant que de lignes droites & de cercles*

Soit donnée l'égalité du troisiéme degré $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$; je la multiplie par $x$ pour l'élever au quatriéme & transposant le terme $aaqx$, j'ai $x^4 \mp 2apxx = aaqx$; j'ajoûte de part & dautre $aapp$ pour faire que le premier membre soit un quarré, ce qui me donne $x^4 \mp 2apxx + aapp = aapp + aaqx$, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $xx \mp ap$,

$=a\sqrt{pp+qx}$; transposant enfin $ap$, & extrayant de nouveau la racine quarrée, je trouve $x=\sqrt{\pm ap+a\sqrt{pp+qx}}$. Je considere à present que si au lieu de la juste valeur de la racine vraie $x$, je prends une grandeur qui l'excede, comme par exemple $c$; il s'ensuit 1°. Que $c$ surpasse $\sqrt{\pm ap+a\sqrt{pp+qc}}$. 2°. Que $\sqrt{\pm ap+a\sqrt{pp+qc}}$ sera encore plus grande que la juste valeur de $x$. Cette seconde proposition est visible, mais pour la premiere elle se prouve ainsi.

Si l'égalité du troisiéme degré a $+2apx$, il est clair que $c^4+2apcc$ * $> aaqc$, d'où il vient en ajoûtant de part & d'autre le quarré $aapp$, & achevant le calcul comme ci-dessus, $c>\sqrt{-ap+a\sqrt{pp+qc}}$. Mais lorsqu'il y a $-2apx$, on aura en transposant $2apx$ & divisant par $x$ cette égalité $xx=2ap+\frac{aaq}{x}$, d'où il suit que si l'on met dans $\frac{aaq}{x}$ pour $x$ une valeur $c$ plus grande que la racine vraie de l'égalité $x^3-2apx-aaq=0$, la quantité $2ap+\frac{aaq}{c}$ sera moindre que le quarré $xx$ (puisque $\frac{aaq}{c}$ est moindre que $\frac{aaq}{x}$) & à plus forte raison que le quarré $cc$. On aura donc $cc>2ap+\frac{aaq}{c}$, & multipliant par $cc$, il vient $c^4-2apcc>aaqc$, d'où l'on tire (en operant comme l'on vient de faire) $c>\sqrt{ap+a\sqrt{pp+qc}}$. Or ceci supposé, je forme cette suite: $\sqrt{\pm ap+a\sqrt{pp+qc}}$, $\sqrt{\pm ap+a\sqrt{pp+qf}}$, $\sqrt{\pm ap+a\sqrt{pp+qg}}$ &c, dans laquelle $f$ exprime le terme $\sqrt{\pm ap+a\sqrt{pp+qc}}$ qui le précede immediatement, & de même $g$ exprime le terme $\sqrt{\pm ap+a\sqrt{pp+qf}}$ &c.

* *Ce signe ainsi tourné veut dire, surpasse.*

Il est donc évident par ce que l'on vient de démontrer, que tous les termes de cette suite seront plus grands que la juste valeur de la vraie racine $x$, & qu'ils en ap-

prochent

prochent toûjours de plus en plus. Je dis à present que si on la continuë à l'infini, le terme infinitiéme (s'il est permis de s'exprimer ainsi) ou le dernier terme de cette suite, sera précisément égal à la valeur cherchée de l'inconnuë $x$. Car soit $z$ ce dernier terme, il est certain par la nature de la suite qu'il approchera de plus prés de l'inconnuë $x$ que tous les autres termes, & qu'ainsi le terme $\sqrt{\pm ap -+ a\sqrt{pp -+ qz}}$ qui le suivroit immediatement, s'il n'étoit pas le dernier, ne peut être moindre que lui; puisque s'il étoit moindre il approcheroit de plus prés de l'inconnuë $x$, & seroit par consequent le dernier terme, ce qui est contre la supposition. Or il ne peut être plus grand, car on vient de démontrer que tous les termes de la suite vont en diminuant. Il faudra donc qu'il lui soit égal, & on aura par consequent $z = \sqrt{\pm ap -+ a\sqrt{pp -+ qz}}$, c'est à dire en ôtant les incommensurables $z^4 \pm 2apz - aaq = 0$, d'où l'on voit que $z = x$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On prouvera par un raisonnement semblable, que si l'on prend une grandeur $c$ plus petite que la juste valeur de $x$, tous les termes de cette suite iront toûjours en augmentant en sorte que le dernier sera précisément égal à la valeur cherchée de $x$. Voici maintenant comment on peut construire par Geometrie cette suite, en n'employant que des lignes droites & des cercles.

Ayant mené deux lignes droites indéfinies $BD$, $CP$, qui s'entrecoupent à angles droits au point $A$, on prendra sur l'une d'elles les parties $AB = a$, $AD = p$, du même côté du point $A$ lorsqu'il y a $-+ 2apx$, & de part & d'autre lorsqu'il y a $-2apx$, comme on le suppose dans ces deux figures; & sur l'autre les parties $AC = q$, $AP = c$, toûjours de part & d'autre de point $A$. Ayant décrit du diametre $CP$ un demi cercle qui coupe $AD$ en $E$, on prendra sur $AC$ la partie $AF$ égale à $AE$, & on portera sur $AD$ depuis le point $D$ vers le point $A$ dans le premier cas, & vers le côté opposé dans le FIG. 236. 237.

second, la partie $DG$ égale à $DF$. On décrira enfin du diametre $BG$ un demi cercle qui coupe $AP$ en $Q$, je dis que $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Car à cause du demi cercle $CEP$ la ligne $AE$ ou $AF = \sqrt{qc}$, & à cause du triangle rectangle $FAD$ l'hypothenuse $FD$ ou $DG = \sqrt{pp + qc}$, & par consequent $AG = p + \sqrt{pp + qc}$, & à cause du demi cercle $BQG$ la ligne $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Nommant à present $AQ$, $f$; & réïterant la même operation en se servant de $AQ$ au lieu de $AP$, on trouvera $AR = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qf}}$, & ensuite par le moyen de $AR$ que j'appelle $g$, on trouvera $AS = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qg}}$ en réïterant encore la même operation : de sorte que la continuant autant que l'on voudra, on trouvera des lignes $AP$, $AQ$, $AR$, $AS$, &c. qui approcheront de plus en plus à l'infini de la juste valeur de la vraie racine $x$ de l'égalité proposée $x^3 - 2apx - aaq = 0$.

Il est à remarquer que l'on peut prendre d'abord pour $AP$ ($c$) telle grandeur que l'on veut, car si cette grandeur se trouve plus grande que la racine $x$, les autres lignes $AQ$, $AR$, $AS$, &c. vont toûjours en diminuant; & au contraire si $AP$ est moindre que $x$, elles iront en augmentant : de sorte que la vraie racine est renfermée entre $AP$ de l'une de ces deux figures & $AP$ de l'autre, $AQ$ & $AQ$, $AR$ & $AR$, $AS$ & $AS$. D'où l'on voit qu'en formant deux suites convergentes, dans l'une desquelles le premier terme soit plus grand que la vraie racine, & dans l'autre plus petit, l'on aura toûjours en prenant les termes correspondans de ces deux suites, des limites entre lesquelles se doit trouver cette racine; de sorte que la difference de ces limites diminuë de plus en plus à l'infini.

Si l'on demandoit les deux autres racines de l'égalité proposée $x^3 - 2apx - aaq = 0$. Nommant $m$ la racine approchée que l'on vient de trouver, on la regardera

comme étant exacte : c'est pourquoi divisant cette égalité par $x - m$, la division se fera au juste (car le reste $m^3 - 2apm - aaq = o$, puisqu'on suppose $x = m$), & on aura pour quotient l'égalité $xx + mx + mm - 2ap = o$, dont la resolution fournira les deux racines qu'on demande.

Toutes les égalités du troisiéme degré peuvent se reduire à l'une ou à l'autre de ces deux formes; car aprés avoir fait évanoüir le second terme, s'il y avoit $+ aaq$ en mettant $- aaq$, on ne feroit que changer les racines vraies en fausses & les fausses en vraies. D'où l'on voit que les constructions précedentes suffisent pour trouver les racines approchées de toute égalité donnée du troisiéme degré. Passons maintenant au quatriéme.

Soit proposée l'égalité du quatriéme degré $x^4 - 3apxx - aaqx - a^3r = o$, dont il faille trouver les racines approchées. Je cherche, comme l'on vient d'enseigner, les racines approchées de l'égalité du troisiéme degré

$$\begin{array}{l} y^3 - 3ppy + 2p^3 = o \\ \quad + 4ary + 8apr \\ \qquad\qquad - aqq \end{array}$$

où l'on doit observer d'écrire $- 2p^3$ lorsqu'il y a dans la proposée $+ 3apxx$; $- 4ar$ lorsqu'il y a $+ a^3r$; & enfin $- 8apr$ lorsque les signes des termes $3apxx$ & $a^3r$ sont differens. Je regarde ensuite l'une de ces racines approchées $y$ comme étant exacte, & ayant trouvé une ligne $v = \sqrt{ay \mp 2ap}$, sçavoir $+ 2ap$ lorsqu'il y a $- 3apxx$, & $- 2ap$ lorsqu'il y a $+ 3apxx$; j'ai pour les quatre racines approchées de la proposée, celles de ces deux égalités du second degré $xx - vx + \frac{ay \mp ap}{2} - \frac{aaq}{2v} = o$ & $xx + vx + \frac{ay \mp ap}{2} + \frac{aaq}{2v} = o$ (en observant de prendre $- ap$ lorsqu'il y a $- 3apxx$ dans l'égalité proposée, & $+ ap$ lorsque c'est $+ 3apxx$) que l'on construira aisément en n'employant que des cercles & des lignes droites. Tout ceci n'est qu'une suite de la regle que donne M. Descartes dans le troisiéme Livre de sa

Geometrie pour reduire toute égalité du quatriéme degré à une du troisiéme, de laquelle connoissant une des racines, on a les quatre de la proposée ; & comme cela dépend de l'Algebre pure, je pourrois le supposer ici comme démontré. En voici cependant la raison en peu de mots.

On regarde l'égalité du quatriéme degré $x^4 - 3apxx - aaqx - a^3r = o$, comme le produit des deux planes $xx - vx + ab - ac = o$ & $xx + vx + ab + ac = o$, dans lesquelles les lettres $v, a, b, c$, marquent des inconnuës qui doivent être déterminées dans la suite, en sorte que le produit de ces deux égalités qui est $x^4 \begin{smallmatrix} -vvxx \\ +2abxx \end{smallmatrix} - 2acvx \begin{smallmatrix} +aabb \\ -aacc \end{smallmatrix} = o$, soit en effet l'égalité même proposée. Pour cela j'en compare les termes correspondans, & j'ai 1°. $c = \frac{aq}{2v}$. 2°. $b = \frac{vv - 3ap}{2a}$. 3°. $bb - cc = -ar$, ou $bb - cc + ar = o$; c'est à dire en mettant pour $b$ & pour $c$ les valeurs que l'on vient de trouver & ordonnant, l'égalité $v^6 - 6apv^4 \begin{smallmatrix} +9aappvv \\ +4a^3rvv \end{smallmatrix} - a^4qq = o$. Et si l'on fait $vv = ay + 2ap$, on trouvera par la substitution l'égalité du troisiéme degré

$$y^3 \begin{smallmatrix} -3ppy \\ +4ary \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} +2p^3 \\ +8apr \\ -aqq \end{smallmatrix} = o,$$ de laquelle connoissant une racine $y$, on aura, en prenant la racine quarrée de $ay + 2ap$, la valeur de $v$, & ensuite celles de $b$ & de $c$, lesquelles étant mises dans les deux égalités planes que l'on a supposées d'abord, on en formera deux autres dont le produit sera l'égalité même proposée, & dont la resolution par consequent fournira les quatre racines qu'on demande. S'il n'étoit question que de trouver une racine vraie d'une égalité du quatriéme degré, on pourroit la trouver immediatement par une suite en cette sorte.

Soit $x^4 \pm 2apxx - aaqx - a^3r = o$, on trouvera en operant de même que pour le troisiéme degré $x = \sqrt{\mp ap + a\sqrt{qx + pp + ar}}$, ce qui donne, en faisant pour abreger $pp + ar = nn$, cette suite conver-

gente $c$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qc}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qf}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qg}}$, &c, dont la construction n'est differente des precedentes qu'en ce qu'il faut prendre $AF = n$ & $DG = FE$.

Si l'on avoit $x^4 \pm 2apxx - aaqx + a^3r = 0$, on trouveroit $x = \sqrt{\mp ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$, & on formeroit lorsque $pp$ surpasse $ar$ (en faisant $pp - ar = nn$) la même suite convergente que ci-dessus. Mais il est à remarquer que lorsqu'il y a $+ 2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que $\sqrt{qx + pp - ar}$ surpasse $p$ afin que $\sqrt{- ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$ valeur de la racine vraie $x$ ne renferme point de contradiction ; ce qui donne $x > \frac{ar}{q}$, & par consequent il faudra prendre $c$ plus grande que $\frac{ar}{q}$.

Si $pp$ est moindre que $ar$, l'on formera alors, en faisant $ar - pp = qn$, cette suite convergente $c$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qc - qn}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qf - qn}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qg - qn}}$, &c, où l'on doit remarquer que lorsqu'il y a $- 2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que $x$ surpasse $n$ ou $\frac{ar - pp}{q}$ afin que $\sqrt{ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$ valeur de $x$ ne renferme point de contradiction, & qu'ainsi on doit prendre $c$ plus grand que $n$.

Il peut arriver lorsqu'il y a $+ r$ dans l'égalité donnée que ces racines soient toutes quatre imaginaires, & alors on tombera infailliblement dans quelque contradiction en construisant la suite ; car on n'a démontré qu'elle est convergente qu'en supposant qu'il y eut une racine vraie dans l'égalité donnée. Au reste la construction de la derniere suite est un peu differente des autres, mais comme elle n'est pas plus difficile, je ne m'y arrêterai pas.

Cette methode devient embarrassée lorsqu'on la veut étendre à des égalités complettes qui passent le quatrié-

me degré; c'eſt pourquoi je me contenterai de l'appliquer à une égalité du cinquiéme degré qui n'a que deux termes, & qui ſervira de methode pour les autres plus composées qui n'ont pareillement que deux termes.

Soit $x^5 - a^4 b = o$; multipliant par $x$, & tranſpoſant il vient $x^6 = a^4 bx$, & extrayant la racine quarrée on aura $x^3 = aa\sqrt{bx}$ ou $x^4 = aax\sqrt{bx}$, & extrayant de nouveau deux fois de ſuite la racine quarrée, on trouvera enfin $x = \sqrt{a\sqrt{x\sqrt{bx}}}$; ce qui fournit cette ſuite convergente, $c$, $\sqrt{a\sqrt{c\sqrt{bc}}}$, $\sqrt{a\sqrt{f\sqrt{bf}}}$, $\sqrt{a\sqrt{g\sqrt{bg}}}$, &c, dont voici la conſtruction geometrique.

FIG. 238. Ayant mené deux lignes droites indéfinies $BD$, $CP$, qui s'entrecoupent à angles droits au point $A$, on prendra ſur l'une d'elles la partie $AB = a$, & ſur l'autre, les parties $AC = b$, $AP = c$, de part & d'autre du point $A$. Du diametre $PC$ ayant décrit un demi-cercle qui coupe $BA$ prolongée du côté de $A$ en $D$, & ayant pris ſur $AC$ la partie $AF = AD$, on décrira du diametre $PF$ un autre demi-cercle qui coupe $AD$ en $E$. On décrira enfin du diametre $BE$ un troiſiéme demi-cercle qui coupe $AP$ en $Q$; il eſt viſible que $AQ = \sqrt{a\sqrt{c\sqrt{bc}}}$. Nommant à preſent $AQ$, $f$; & réïterant la même operation en ſe ſervant de $AQ$ au lieu de $AP$, on trouvera $AR = \sqrt{a\sqrt{f\sqrt{bf}}}$, & de même $AS = \sqrt{a\sqrt{g\sqrt{bg}}}$. Et les droites $AP$, $AQ$, $AR$, &c. approcheront de plus en plus à l'infini de la juſte valeur de l'inconnuë $x$ de l'égalité donnée $x^5 - a^4 b = o$. Cela ſe prouve de la même maniere que pour les égalités du troiſiéme degré.

M. Bernoulli celebre Profeſſeur des Mathematiques à Bâle, eſt l'Auteur de ces ſuites. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipſic de l'année 1689. page 455.

## PROPOSITION XIII.

### Problême.

424. UNE *portion de Section conique étant donnée, trouver par son moyen les racines d'une égalité donnée du troisiéme ou du quatriéme degré.*

On a vû dans le Problême précedent qu'une égalité du quatriéme degré étant donnée, on en peut toûjours trouver une du troisiéme, de laquelle connoissant une racine on a les quatre de la proposée; en ne se servant que de lignes droites, & de cercles. On sçait de plus que toute égalité du troisiéme degré se peut réduire sous cette forme $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$, dont l'une des racines est vraie, & les deux autres ou fausses ou imaginaires. Cela posé; soit $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$, dont il faille trouver les racines, par le moyen de la portion donnée FIG. 259. $BD$ d'une Parabole, qui a pour axe la ligne $CH$ dont l'origine est au point $C$. Des points $B$, $D$, extremités de la portion donnée ayant mené les perpendiculaires $BG$, $DH$, sur l'axe, il est manifeste que si la vraie racine étoit plus grande que $BG$, & moindre que $DH$, le cercle décrit du centre $E$, trouvé comme l'on a enseigné à la fin de l'article 387. pour les égalités qui n'ont point de second terme, & du rayon $EC$, couperoit infailliblement la portion $BD$ en quelque point $M$; d'où menant la perpendiculaire $MQ$ sur l'axe, cette ligne $MQ$ en feroit la vraie racine. Il est donc question lorsque ce cercle ne coupe point la portion $BD$, de transformer cette égalité en une autre dont la vraie racine soit renfermée entre les limites $BG$, $DH$. Pour le faire, je nomme les données $BG$, $f$; $DH$, $g$; & je suppose que l'on ait deux limites $m$, $n$, entre lesquelles la vraie racine $x$ soit resserrée ($m$ est moindre que $n$, & $f$ moindre que $g$). Ce qui donne $x$ plus grand que $m$ & moindre que $n$, & multipliant chaque terme par $f$ & divisant

par $m$, il vient $\frac{fx}{m}$ plus grand que $f$ & moindre que $\frac{fn}{m}$. Si l'on fait à present $z=\frac{fx}{m}$, & qu'on mette dans l'égalité $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$, à la place de $x$ sa valeur $\frac{mz}{f}$, on la transformera en celle-ci $z^3 \mp \frac{2apff}{mm} - \frac{aaqf^3}{m^3} = 0$, qui aura sa vraie racine $z = \frac{fx}{m}$ plus grande que $f$ & moindre que $\frac{fn}{m}$. D'où il suit que si les limites $m$, $n$, étoient telles que $\frac{fn}{m}$ fût égale ou moindre que $g$, il n'y auroit qu'à construire cette derniere égalité selon l'article 387. pour avoir sa vraie racine $MQ$ ($z$) par le moyen de la portion donnée $BC$. De là on tire la construction suivante.

On fera par le Problême précedent deux suites convergentes qui approcheront l'une en dessus & l'autre en dessous de la vraie racine $x$ de l'égalité donnée $x^3 \pm 2apx - aaq = 0$. On choisira deux termes correspondans dans ces deux suites $m$, $n$, qui soient tels que $\frac{fn}{m}$ soit égale ou moindre que $g$: ce qui se pourra toûjours faire, puisque $f$ est moindre que $g$, & que la difference qui est entre $m$ & $n$ diminuë continuellement à l'infini. Cela fait, on transformera l'égalité donnée en une autre $z^3 + \frac{2apff}{mm} z - \frac{aaqf^3}{m^3} = 0$, dont l'inconnuë sera $z = \frac{fx}{m}$; & en la construisant selon la fin de l'article 387. le cercle coupera infailliblement la portion donnée $BC$ en un point $M$; duquel ayant mené sur l'axe la perpendiculaire $MQ$, elle sera la vraie racine $z$ de cette seconde égalité: & faisant ensuite $x = \frac{mz}{f}$, cette ligne $x$ sera la vraie racine de l'égalité $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$.

Si l'on veut trouver les deux autres racines de cette égalité lorsqu'elles ne sont pas imaginaires; il n'y a qu'à

la

la diviſer par l'inconnuë $x$ moins celle que l'on vient de découvrir pour l'abaiſſer à une du ſecond degré, dont on découvrira les deux racines par le moyen d'un cercle, en ſe ſervant de l'article 380.

Tout ceci eſt trop évident pour m'y arrêter davantage, je remarquerai ſeulement que ſi la portion donnée *BD* étoit d'une Ellipſe ou d'une Hyperbole, il faudroit ſe ſervir de l'article 398. ou 403. & que toute la difficulté ſe réduiroit à transformer l'égalité donnée en une autre, dont la vraie racine eut des limites données : & c'eſt ce que l'on feroit comme dans la Parabole.



# LIVRE DIXIE'ME.

## *Des Problêmes déterminés.*

### PROPOSITION GENERALE.

425. UN *Problême de Geometrie déterminé étant proposé, en trouver la solution.*

On regardera d'abord le Problême proposé comme s'il étoit resolu, & on tirera les lignes que l'on jugera les plus propres pour faire connoître ce qui n'est que supposé. On nommera ensuite toutes ces lignes (qui font pour l'ordinaire des triangles rectangles ou semblables) par des lettres de l'Alphabet, sçavoir les lignes qui sont connuës par les premieres lettres, & les lignes inconnuës par les dernieres lettres; & on parcourra toutes les conditions du Problême, en comparant ces lignes entr'elles dans l'ordre le plus simple & le plus naturel qu'il sera possible: ce qui doit servir à former autant de differentes égalités qu'il y a d'inconnuës. On employera enfin les regles ordinaires de l'Algebre pour réduire ces differentes égalités à une seule dans laquelle il ne se trouve plus qu'une inconnuë, & pour l'abaisser s'il se peut à un moindre degré; & l'ayant resoluë par les regles prescrites dans le Livre précedent, on en tirera la solution cherchée du Problême. Ceci s'éclaircira parfaitement par les exemples qui suivent.

#### EXEMPLE I.

FIG. 240. 426. LA ligne droite $AB$ étant donnée, trouver hors de cette ligne le point $C$ tel qu'ayant mené les droites $AC$, $CB$; 1°. La somme de leurs quarrés soit au triangle $ACB$ en la raison donnée de $f$ à $g$, 2°. L'angle $ACB$ qu'elles comprennent soit égal à l'angle donné $GDK$.

Je suppose que le point $C$ soit celui qu'on cherche, & je mene $CH$ perpendiculaire sur $AB$ que je divise par le milieu au point $E$. Je nomme la donnée $AE$ ou $EB$, $a$; & les inconnuës $EH$, $x$; $HC$, $y$; & j'ai $AH = a - x$, $BH = a + x$. Donc à cause des triangles rectangles $AHC$, $BHC$, les quarrés des hypothenuses $\overline{AC}^2 = aa - 2ax + xx + yy$, & $\overline{BC}^2 = aa + 2ax + xx + yy$; & par consequent $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2aa + 2xx + 2yy$. Or puisque le triangle $ACB = AE \times CH$ $(ay)$, il s'ensuit par la premiere condition du Problême que $2aa + 2xx + 2yy . ay :: f . g$; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens, & divisant par $2g$, cette équation $aa + xx + yy = \frac{af}{2g} y = 2my$ en prenant (pour ôter les fractions) une ligne $m = \frac{af}{4g}$.

Il reste maintenant à accomplir la seconde condition, sçavoir que l'angle $ACB$ soit égal à l'angle donné $GDK$. Pour y réüssir, je mene d'un point $G$ pris à discretion dans la droite $GD$, la perpendiculaire $GF$ sur le côté $DK$, prolongée, s'il est necessaire, & du point $A$ la perpendiculaire $AL$ sur le côté $BC$ prolongé aussi, s'il est necessaire, afin d'avoir deux triangles rectangles semblables $ACL$, $GDF$, dont l'un $GDF$ est donné. Cela fait, je nomme les données $DF$, $b$; $FG$, $c$; & faisant, pour abreger, $BC = n$, je trouve à cause des triangles rectangles semblables $BCH$, $BAL$, ces proportions $BC (n) . CH (y) :: BA (2a) . AL = \frac{2ay}{n}$. Et $BC (n) . BH (a + x) :: BA (2a) . BL = \frac{2aa + 2ax}{n}$. Et par consequent $CL$ ou $BL - BC = \frac{2aa + 2ax - nn}{n}$. Donc puisque l'angle $ACL$ doit être égal à l'angle $GDF$, il faut que $CL \left(\frac{2aa + 2ax - nn}{n}\right) . AL \left(\frac{2ay}{n}\right) :: DF (b) . FG (c)$; d'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens $2aac + 2acx - cnn = 2aby$, c'est à dire, en mettant pour $nn$ sa valeur $aa + 2ax + xx + yy$, cette seconde

équation $aac - cxx - cyy = 2aby$ qui renferme la seconde condition du Problême.

Comme l'on a trouvé autant d'égalités qu'il y avoit d'inconnuës, & que l'on a satisfait à toutes les conditions du Problême; il ne faut plus que se servir des regles ordinaires de l'Algebre, pour reduire ces égalités à une seule qui ne renferme qu'une inconnuë $y$ ou $x$: & c'est ce qu'on peut faire en cette sorte. J'ai pour premiere équation $aa + xx + yy = 2my$, & pour seconde, $aac - cxx - cyy = 2aby$ ou $aa - xx - yy = \frac{2aby}{c}$; c'est pourquoi ajoûtant ensemble d'une part les deux premiers membres, & de l'autre les deux seconds, je trouve $2aa = \frac{2aby}{c} + 2my$, d'où je tire $y = \frac{aa}{m+f}$ en prenant $f = \frac{ab}{c}$. Et mettant cette valeur à la place de $y$ & son quarré à la place de $yy$ dans l'une ou l'autre des équations precedentes, je trouve $xx = \frac{aamm - aaff - a^4}{mm + 2mf + ff}$ & $x = \frac{a\sqrt{mm - ff - aa}}{m+f}$; d'où je connois que si $mm$ étoit moindre que $aa + ff$ le Problême seroit impossible. En voici la construction.

FIG. 241. Par le point $E$ milieu de $AB$ ayant tiré une perpendiculaire indéfinie $ON$ à $AB$, on menera par le point $A$ la ligne $AM$ qui fasse avec $AB$ l'angle $EAM$ égal à l'angle $DGF$ qui est donné. Du point $M$ où cette ligne rencontre la perpendiculaire $ON$, comme centre, & du rayon $MA$, on décrira un arc de cercle $ACB$. On prendra ensuite sur $EM$ prolongée du côté de $M$ la partie $MN = m$; & ayant joint $NA$, on lui menera la perpendiculaire $AO$ qui rencontre $NO$ au point $O$, par lequel on tirera une parallele à $AB$. Je dis que cette parallele rencontrera l'arc de cercle $ACB$ au point cherché $C$.

Car ayant mené $CH$ perpendiculaire sur $AB$, il est clair que $CH = EO = \frac{aa}{m+f}$, puisqu'à cause des triangles rectangles semblables $NEA$, $AEO$, il vient $NE$ $(m+f)$. $AE$ $(a)$ :: $AE$ $(a)$. $EO = \frac{aa}{m+f}$. De plus à

cause du cercle $\overline{CM}^2 = \overline{AM}^2 = aa + ff$; & partant puisque $MO = f + \frac{aa}{m+f}$, il s'ensuit à cause du triangle rectangle $MCO$ que $\overline{CO}^2$ ou $\overline{EH}^2$ $(xx) = aa + ff - ff - \frac{2aaf}{m+f} - \frac{a^4}{mm+2mf+ff} = \frac{aamm - aaff - a^4}{mm+2mf+ff}$. Donc &c.

## REMARQUE.

427. LORSQU'APRE'S avoir satisfait à toutes les questions d'un Problême, on est arrivé à deux équations qui renferment chacune les deux mêmes inconnuës; il n'est pas necessaire, si l'on veut, de les réduire à une seule qui ne renferme plus qu'une inconnuë, comme il est prescrit dans la proposition generale: mais l'on peut resoudre le Problême, en construisant séparément les lieux de ces deux équations, car leurs points d'intersection serviront à trouver les valeurs de ces deux inconnuës. C'est ce qui se voit clairement dans cet exemple, où l'on a pris pour inconnuës les droites $EH$ $(x)$, $HC$ $(y)$ qui font entr'elles un angle droit $EHC$; & où aprés avoir satisfait aux conditions requises, on est arrivé à ces deux équations $aa + xx + yy = 2my$, & $aa - xx - yy = 2fy$; car les cercles qui en font les lieux étant décrits séparément donneront par leurs interséctions des points qui satisferont: voici comment.

Ayant décrit comme dans la premiere construction l'arc de cercle $ACB$, on décrira du centre $A$, & du rayon $AP = m$, un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire $EM$ en $P$. On prendra sur cette perpendiculaire la partie $EQ = m$ du côté de l'arc $ACB$, & on décrira du centre $Q$ & du rayon $QC = EP$, un cercle qui coupera l'arc $ACB$ en des points $C$ qui satisferont.

Car à cause de ce dernier cercle on aura $\overline{QC}^2$ ou $\overline{EP}^2$ $(mm - aa) = \overline{QO}^2$ $(mm - 2my + yy) + \overline{OC}^2$ $(xx)$, c'est à dire la premiere équation $aa + xx + yy = 2my$;

& à cauſe de l'autre cercle $ACB$ il vient $\overline{MC}^2$ ou $\overline{MA}^2$ $(ff+aa)=\overline{MO}^2$ $(ff+2fy+yy)+\overline{OC}^2$ $(xx)$, c'eſt à dire, la ſeconde équation $aa-xx-yy=2fy$. D'où il ſuit que le point cherché $C$ ſe doit trouver en même temps ſur ces deux cercles, c'eſt à dire, qu'il doit ſe confondre avec leurs points d'interſection.

Il eſt viſible qu'il y a deux differens points $C$ qui ſatisfont à la queſtion, lorſque ces deux cercles ſe coupent en deux points comme dans cette figure; qu'il n'y en a qu'un, lorſqu'ils ſe touchent; & qu'enfin il n'y en peut avoir aucun, lorſqu'ils ne ſe coupent ni ne ſe touchent.

Il faut bien prendre garde qu'en reſolvant un Problême par le moyen de deux lieux, on ne tombe pas dans une conſtruction plus compoſée, que ſi étant arrivé à une ſeule égalité qui ne renferme qu'une inconnuë $x$, on l'eut conſtruite ſelon les regles du Livre précedent. Je m'explique : qu'il faille, par exemple, reſoudre un Problême (c'eſt le troiſiéme exemple qui ſera propoſé) dont les conditions ſoient renfermées dans ces deux équations $y=\frac{cd-cx}{b}$, & $\frac{bb}{ff}yy=aa+xx$; ſi l'on ſe ſervoit des lieux de ces deux équations, il eſt clair qu'il faudroit
* Art. 306. mener une ligne droite * qui ſeroit le lieu de la premie-
* Art. 330. re équation, & décrire une Hyperbole * qui ſeroit le
& 332. lieu de la ſeconde, pour avoir par leurs interſections les valeurs des deux inconnuës $x$ & $y$. Mais parce qu'en réüniſſant ces deux équations en une ſeule, on trouve l'égalité du ſecond degré $xx-\frac{2ccd}{cc+ff}x+\frac{ccdd-aaff}{cc-ff}=0$, qui ſe conſtruit en n'employant que des lignes droites & des cercles; ce ſeroit une faute conſiderable de ſe ſervir d'une Hyperbole.

EXEMPLE II.

Fig. 242. 428. Le quarré $ABCD$ étant donné; il faut mener d'un de ſes angles $A$ la ligne droite $AE$, en ſorte que ſa partie $FE$ compriſe entre les côtés $BC$, $CD$, oppo-

sés à cet angle soit égale à une ligne donnée $b$.

Je suppose que le point $E$ pris sur le côté $DC$ prolongé, soit tel que la partie $FE$ de la ligne $AE$ soit égale à $b$, c'est à dire que je suppose la question resoluë; & je nomme la donnée $AB$ ou $AD$ ou $DC$ ou $CB$, $a$; l'inconnuë $DE$, $x$. Cela fait, les triangles semblables $EDA$, $ECF$, donnent $ED\,(x) . DA\,(a) :: EC\,(x-a) . CF = \frac{ax-aa}{x}$, & le triangle rectangle $ECF$ donne $\overline{FE}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{CF}^2 = xx - 2ax + aa + \frac{aaxx - 2a^3x + a^4}{xx}$. Mais puisque par la condition du Problême $FE$ doit être égale à $b$, on aura $xx - 2ax + aa + \frac{aaxx - 2a^3x + a^4}{xx} = bb$, ou $x^4 - 2a^3x + 2aaxx - bbxx - 2a^3x + a^4 = 0$. D'où l'on voit que la resolution de cette égalité doit fournir pour $DE\,(x)$, une valeur telle que menant la droite $AE$, sa partie $FE$ comprise entre les côtés $CB$, $DC$, soit égale à la donnée $b$.

L'égalité que l'on vient de trouver étant du quatriéme degré, il faudroit employer pour la resoudre une Section Conique. C'est pourquoi je dois chercher auparavant par les regles que fournit l'Algebre, si elle ne se peut point abaisser à un degré plus simple, & je trouve en effet que si l'on prend $cc = aa + bb$, elle sera le produit des deux égalités $xx + aa - ax - cx = 0$, & $xx + aa - ax + cx = 0$, qui sont chacune du second degré; de sorte que pour avoir les quatre racines de l'égalité du quatriéme degré $x^4 - 2ax^3$ &c, il ne faut que trouver les racines de chacune de ces deux égalités. Je ne m'arrête point à chercher les racines de l'égalité $xx + aa - ax + cx = 0$; parce que $c$ surpassant $a$, la disposition des signes me fait connoître qu'elles sont toutes deux fausses : mais je trouve celles de l'autre égalité $xx + aa - ax - cx = 0$, que je connois être toutes deux vraies, de la maniere qui suit.

Soit prise sur le côté $AB$ prolongé la partie $BG = c$, & soit décrit du diametre $AG$ un demi-cercle qui cou-

pe en $E$ le côté $DC$ prolongé. Je dis que ce point ſera celui qu'on cherche.

Car nommant $DE, x$; & menant la perpendiculaire $EH$, on aura $HG = a + c - x$, & par la proprieté du cercle $AH \times HG\,(ax + cx - xx) = \overline{EH}^2\,(aa)$.

REMARQUE I.

429. LORSQU'APRE'S avoir ſatisfait aux conditions d'un Problême, on arrive à une égalité compoſée qui a pluſieurs racines réelles, il eſt viſible qu'il n'y a qu'une de ces racines qui exprime la valeur de l'inconnuë qu'on cherche: mais on doit bien remarquer que les autres peuvent auſſi ſervir à la reſolution de la queſtion, dans un ſens qui ne peut être different de celui qu'on s'eſt imaginé que dans quelques circonſtances particulieres. Ainſi dans cet exemple la petite racine vraie $DL\,(x)$ de l'égalité $xx - ax - cx + aa = 0$, donne ſur le côté $DC$ un point $L$ tel qu'ayant mené la droite $AL$ qui rencontre le côté $BC$ prolongé en $K$, ſa partie $LK$ eſt égale à la donnée $b$. De même ſi l'on prend $Bg = c$ ſur le côté $BA$ prolongé vers $A$, & qu'on décrive du diametre $Ag$ un demi-cercle, il coupera le côté $CD$ prolongé vers $D$ aux points $e, l$, en ſorte que $De$, & $Dl$ ſeront les deux racines fauſſes de l'égalité $xx + cx - ax + aa = 0$: & ſi l'on mene les droites $Ae, Al$, qui rencontrent le côté $CB$ prolongé aux points $f, k$; les droites $ef, lk$, ſeront encore chacune égale à la donnée $b$. De là on peut voir que quoiqu'en reſolvant le Problême on n'ait eu en vûë que de trouver la valeur de $DE$, on eſt cependant arrivé à une égalité dont les racines ont fourni d'autres valeurs $DL, De, Dl$, qui ont toutes ſervi à reſoudre le Problême en quelque ſens.

REMARQUE II.

430. S'IL y a lieu de croire que l'égalité qui renferme les conditions d'un Problême ſe peut abaiſſer à un moindre

moindre degré, il est à propos de tenter d'autres voies que celles qu'on a suivies quand même elles paroîtroient moins naturelles ; parce qu'il arrive souvent qu'elles conduisent à des égalités plus simples, & que d'ailleurs il est assés difficile d'abaisser des égalités composées. Voici deux autres manieres de resoudre le Problême précedent qui pourront servir à faire comprendre cette remarque.

Ayant supposé le Problême resolu, je mene $EG$ perpendiculaire sur $AE$ qui rencontre le côté $AB$ prolongé en $G$, & je prends pour inconnuës les deux droites $AF$ & $BG$ que je nomme $y$ & $z$. Cela fait, les triangles rectangles semblables $ABF$, $AEG$, donnent $AB(a)$. $AF(y)$ :: $AE(y+b)$. $AG(a+z)$. Et partant $yy+by = aa+az$. Or comme j'ai deux inconnuës & que le Problême est déterminé, il faut encore chercher une autre égalité. Pour la trouver, je considere que $EG = AF(y)$ ; car menant $EH$ perpendiculaire sur $AG$, le triangle rectangle $EHG$ est semblable au triangle rectangle $ABF$, & de plus égal, puisque les côtés homologues $AB$, $EH$, sont égaux entr'eux. J'aurai donc (à cause du triangle rectangle $AEG$) cette autre égalité $aa+2az+zz = yy+2by+bb+yy = 2yy+2by+bb$, dans laquelle mettant à la place de $2yy+2by$ sa valeur $2aa+2az$ trouvée par le moyen de la premiere égalité, il vient $aa+2az+zz = 2aa+2az+bb$ qui se reduit à cette égalité trés-simple $z = \sqrt{aa+bb}$, qui fournit d'abord la même construction que ci-dessus. FIG. 242.

## AUTRE MANIERE.

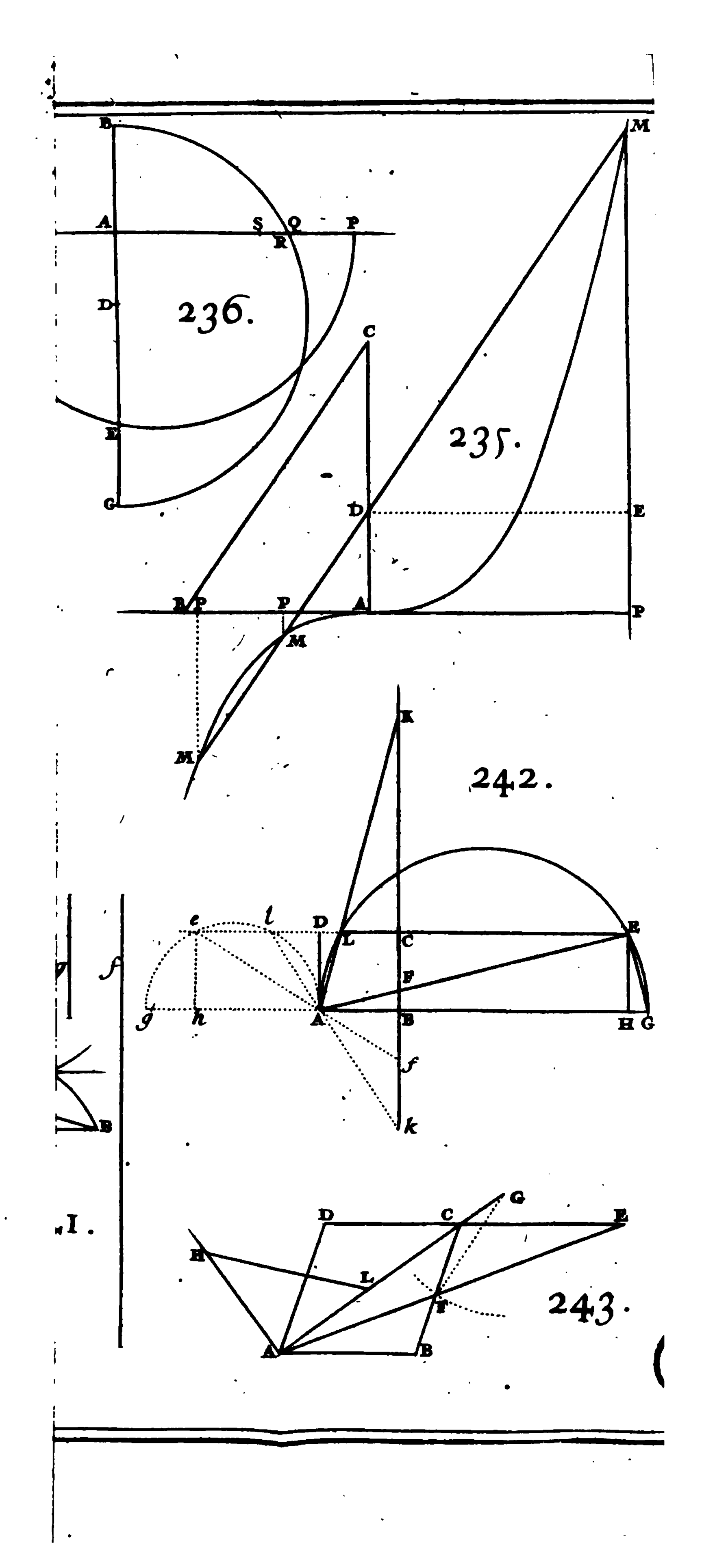
La maniere suivante a cela de particulier qu'elle réüssit également soit que la figure $ABCD$ soit un quarré, ou qu'elle soit un rhombe. Ayant mené par le point cherché $F$, que je regarde comme donné, la ligne $FG$ qui fasse avec $AF$ l'angle $AFG$ égal à l'angle donné $ACE$, & qui rencontre au point $C$ la diagonale $AC$ prolongée autant qu'il est necessaire ; on aura trois triangles $ACE$, $AFG$, FIG. 243.

$GCF$, qui seront semblables entr'eux. Car 1°. L'angle en $A$ étant commun aux deux triangles $ACE$, $AFG$, & les angles $ACE$, $AFG$, étant égaux par la supposition ; il est visible que ces deux triangles seront semblables. 2°. Le triangle $ADC$ étant isoscelle, l'angle $DCA$ ou $ECG$ sera égal à l'angle $DAC$ ou $ACF$, & ajoûtant de part & d'autre le même angle $FCE$, l'angle $FCG$ sera égal à l'angle $ACE$ ou $AFG$; & partant puisque l'angle en $G$ est commun, les deux triangles $AGF$, $FGC$, seront semblables. Cela posé, soient les inconnuës $CE = x$, $AG = z$, & les données $DC = a$, $FE = b$, $AC = c$ ; on aura (à cause des paralleles $AD$, $CF$,) cette proportion : $CE(x) . FE(b) :: CD(a) . AF = \frac{ab}{x}$. Or à cause des triangles semblables $ACE$, $AFG$, $GCF$, on trouvera $AC(c) . CE(x) :: AF\left(\frac{ab}{x}\right) . FG = \frac{ab}{c}$. Et $AG(z) . FG\left(\frac{ab}{c}\right) :: \frac{ab}{c} . CG(z - c)$. D'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens, l'égalité $zz - cz = \frac{aabb}{cc}$ qui fournit cette construction.

FIG. 243. Ayant mené du point $A$ perpendiculairement sur $AC$ la ligne $AH = \frac{ab}{c}$, on tirera par le point du milieu $L$ de la diagonale $AC$ la ligne $HL$, & on prendra sur cette diagonale prolongée du côté de $C$ la partie $LG$ égale à $LH$. On décrira ensuite du centre $G$ & du rayon $GF$ égal à $AH$, un arc de cercle qui coupera le côté $BC$ au point cherché $F$. Cela est évident ; puisque par la construction $zz - cz = \frac{aabb}{cc}$, & que $GF = \frac{ab}{c}$.

### EXEMPLE III.

FIG. 244. 431. TROUVER sur une ligne droite indéfinie $DE$ donnée de position, deux points $D$, $E$ ; desquels ayant mené à deux points donnés $O$, $C$, hors de cette ligne, les droites $DO$, $OE$, $DC$, $CE$ ; l'angle $DOE$ soit droit



236.
235.
242.
243.
I.

& l'angle $DCE$ égal à un angle donné $TPS$.

Supposons la chose faite, je décris du diametre $DE$ un demi-cercle qui passera par le point $O$, puisque l'angle $DOE$ est droit; & sur la corde $DE$ je décris un arc de cercle capable de l'angle donné, lequel passera par consequent par le point $C$. Du point $H$ centre de cet arc, & des points donnés $O$, $C$, je mene sur $DE$ les perpendiculaires $HK$, $OA$, $CB$, & je nomme les données $OA$, $a$; $CB$, $b$; $AB$, $c$; les inconnuës $AK$, $x$; $KH$, $y$. Cela posé, il est clair par les Elemens de Geometrie, 1°. Que le point $K$ sera le milieu de la ligne $DE$, & par consequent le centre du demi-cercle $DOE$. 2°. Que si par le sommet $P$ de l'angle donné $TPS$ on mene une perpendiculaire $PQ$ à l'un des côtés $PT$, l'angle $QPS$ qu'elle fait avec l'autre côté $PS$, sera égal à l'angle $KEH$. Or à cause du triangle rectangle $KAO$ le quarré $\overline{KO}^2$ ou $\overline{KE}^2 = aa + xx$, & à cause du triangle rectangle $HKE$ le quarré $\overline{HE}^2 = aa + xx + yy$: mais prolongeant $HK$ jusqu'à ce qu'elle rencontre en $R$ une parallele $CR$ à $DE$, on aura (à cause du triangle rectangle $CRH$) le quarré $\overline{CH}^2 = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$. Donc puisque les lignes $HE$, $HC$, sont rayons du même cercle, on formera par la comparaison de leurs valeurs analytiques cette équation $aa + xx + yy = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$, qui, en effaçant de part & d'autre $yy + xx$, & pour abreger, faisant $\frac{aa - bb - cc}{2c} = d$, se reduit à celle-ci; $y = \frac{cd - cx}{b}$.

Si l'on considere le chemin qu'on a suivi pour arriver à l'équation précedente, on verra qu'elle renferme cette condition, sçavoir que les cercles décrits des centres $K$, $H$, & des rayons $KO$, $HC$, se rencontrent sur la ligne $DE$ dans les mêmes points $D$, $E$; de sorte qu'il ne reste plus qu'à faire que l'angle $KEH$ soit égal à l'angle $QPS$. Pour en venir à bout.

Ayant pris sur la ligne $PQ$ la partie $PQ$ égale à $CB$, & tiré $QS$ parallele au côté $PT$, & terminée en $S$ par

l'autre côté $PS$; il est évident que le triangle rectangle $EKH$ doit être semblable au triangle rectangle $PQS$, & qu'ainsi, en nommant la donnée $QS$, $f$, on aura cette proportion; $EK(\sqrt{aa+xx}).\ KH(y) :: PQ(b).\ QS(f)$; d'où l'on tire $y = \frac{f}{b}\sqrt{aa+xx} = \frac{cd-cx}{b}$. Quarrant chaque membre pour ôter les incommensurables, & mettant par ordre l'égalité, on trouve $xx - \frac{2ccd}{cc-ff}x + \frac{ccdd-aaff}{cc-ff} = 0$, dont l'une des racines fournira pour $AK(x)$ une valeur telle que décrivant un cercle du centre $K$ & du rayon $KO$, il coupera la ligne $DE$ aux deux points cherchés $D$, $E$.

On peut trouver les racines de cette égalité, selon les articles 380. ou 382. (Liv. préced.): mais quoique les methodes qu'on y explique soient trés-simples eû égard à leur generalité, il arrive neanmoins trés-souvent qu'en considerant avec attention la nature d'une question particuliere, on trouve des constructions plus faciles. Par exemple, on peut remarquer ici, 1°. Que si par le point de milieu $F$ de la ligne $OC$ qui joint les deux points donnés, on mene la perpendiculaire $FG$ qui rencontre en $G$ la ligne $DE$ donnée de position, on aura $AG = d$; car nommant $AG$, $z$; les triangles rectangles $GAO$, $GBC$, donneront $\overline{GO}^2 = zz + aa$ & $\overline{GC}^2 = zz + 2cz + cc + bb$, & comparant ensemble ces deux valeurs qui doivent être égales entr'elles, puisque le point $G$ est dans la perpendiculaire $FG$ qui divise par le milieu la ligne $OC$, il vient $zz + aa = zz + 2cz + cc + bb$, d'où l'on tire $AG(z) = \frac{aa-bb-cc}{2c} = d$. 2°. Que l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ qui renferme les conditions du Problême, se reduit à cette proportion; $GK(d-x).\ KO(\sqrt{aa+xx}) :: QS(f).\ AB(c)$: de sorte que si l'on
* Art. 350. décrit * le lieu de tous les points $K$ tels qu'ayant mené aux deux points donnés $G$, $O$, les droites $KG$, $KO$, elles soient toûjours entr'elles en la raison donnée de

QS à AB; ce lieu coupera la ligne DE au point cherché K. Ce qui donne la construction suivante qui est trés-simple.

Par le point de milieu F de la ligne OC qui joint les deux points donnés ayant mené la perpendiculaire FG, qui rencontre en G la ligne DE donnée de position, on divisera la ligne OG au point M, en sorte que GM. MO :: QS. AB. Et on la prolongera du côté de G jusqu'au point N, en sorte que GN. NO :: QS. AB. Du diametre MN on décrira un cercle qui coupera la ligne DE en un point K, duquel point comme centre, & du rayon KO ayant décrit un cercle; ce cercle rencontrera la ligne DE aux deux points cherchés D, E.

Comme le cercle qui a pour diametre la ligne MN, coupe la droite DE non seulement au point K, mais encore en un autre point L; il s'ensuit qu'on peut se servir du point L de même que l'on a fait du point K, pour trouver sur la ligne DE deux autres points qui satisferont également, & qu'ainsi cette question peut avoir deux differentes solutions.

Si l'angle DCE devoit être droit aussi-bien que l'angle DOE, il est clair que QS (f) deviendroit nulle, & qu'ainsi l'égalité $f\sqrt{aa+xx}=cd-cx$ se changeroit en celle-ci $cd-cx=o$, d'où l'on tire $x=d$; c'est à dire que le centre K tomberoit alors sur le point G. Et si le point B tomboit sur le point A, l'égalité $f\sqrt{aa+xx}$ $=cd-cx$ se changeroit en celle-ci $f\sqrt{aa+xx}=\frac{aa-bb}{2}$, en mettant pour $cd$ sa valeur $\frac{aa-bb-cc}{2}$, & effaçant ensuite les termes où $c$ (qui devient en ce cas nul) se rencontre; d'où l'on voit que dans ce cas, si du point O comme centre, & du rayon $OK=\frac{aa-bb}{2f}$ on décrit un arc de cercle, il coupera la ligne DE au point cherché K. Ceci s'accorde parfaitement avec les articles 66. 67. 68. du Livre second, & la construction generale peut servir à trouver tout d'un coup dans une Ellipse dont

deux diametres conjugués sont donnés, deux autres diametres conjugués qui fassent entr'eux un angle donné; ce qui dans l'art. 65. avoit été renvoyé ici.

EXEMPLE IV.

FIG. 245. 432. TROIS points $A$, $B$, $C$, étant donnés, en trouver un quatriéme $M$, duquel ayant mené à ces points les droites $MA$, $MB$, $MC$; les differences de l'une d'elles aux deux autres soient données.

Cette question est susceptible de trois differens cas. Car ou les trois lignes $MA$, $MB$, $MC$, sont toutes égales entr'elles; ou il y en a seulement deux qui soient égales entr'elles; ou enfin toutes les trois sont inégales entr'elles.

*Premier cas*. Lorsque les trois lignes $MA$, $MB$, $MC$, sont égales entr'elles; ou ce qui est la même chose lorsque les deux differences données sont nulles. Il est clair que le point cherché $M$ sera le centre du cercle qui passe par les trois points donnés $A$, $B$, $C$.

FIG. 246. *Second cas*. Lorsque deux des trois lignes $MA$, $MB$, $MC$, comme $MA$, $MB$, doivent être égales entr'elles; ou (ce qui est la même chose) lorsqu'une des differences données est nulle.

Ayant tiré du point donné $C$, la perpendiculaire $CO$ sur la ligne $AB$ qui joint les deux autres points donnés $A$, $B$; du point $M$ que l'on suppose être celui qu'on cherche, ayant mené les droites $MP$, $MQ$, paralleles à $CO$, $OB$; il est clair que $AP$ sera égale à $PB$, puisque $AM$ doit être égale à $MB$. Nommant donc les données $AP$ ou $PB$, $a$; $OP$, $b$; $OC$, $c$; $AM-MC$, $f$; & les inconnuës $AM$, $z$; $PM$, $y$; les triangles rectangles $APM$, $MQC$, donneront ces deux égalités $zz = aa + yy$, & $zz - 2fz + ff = cc - 2cy + yy + bb$; d'où en retranchant par ordre chaque membre de la seconde de ceux de la premiere, il vient $2fz - ff = aa - cc + 2cy - bb$, qui se reduit à cette proportion $z . y + \frac{aa-bb-cc+ff}{2c} :: c . f$. De là on tire la construction suivante.

Soit menée par le point de milieu $P$ de la ligne $AB$, la perpendiculaire $PD = \frac{aa-bb-cc+ff}{2c}$. Soit divisée l'hypothenuse $AD$ prolongée du côté qu'il sera necessaire, aux points $E$, $F$; en sorte que $AE. ED :: c. f$, & $AF. FD :: c. f$. Du diametre $EF$ soit décrit un cercle; il coupera la ligne $PD$ au point cherché $M$.

Car ayant mené la droite $MA$, il est clair par la proprieté du cercle $EMF$,* que $AM$ $(z)$. $MD$ *Art. 350.
$\left(y + \frac{aa-bb-cc+ff}{2c}\right) :: c. f$; & par la proprieté de la perpendiculaire $PM$, que $zz = aa + yy$. Or comme ces deux équations renferment les conditions du Problême, il s'ensuit &c.

Si par l'autre point $N$, où la ligne $DP$ rencontre la circonference, on mene les droites $NA$, $NB$, $NC$; les deux $NA$, $NB$, seront égales entr'elles, & la difference de chacune de ces deux droites à la troisiéme $NC$ sera égale à la donnée $f$; de sorte que le point $N$ satisfait aussi, mais avec cette difference que $NC$ est la plus grande des trois droites $NA$, $NB$, $NC$, au lieu que $MC$ est la plus petite des trois $MA$, $MB$, $MC$.

On peut encore resoudre ce second cas sans aucun FIG. 247.
calcul. Je suppose comme auparavant que $M$ soit le point cherché, & ayant tiré les droites $MA$, $MB$, $MC$, je décris du centre $C$, & du rayon $CD = MA - MC$, un cercle $DEKFH$. Du point $D$ où la ligne $MC$ rencontre ce cercle, je mene aux deux points donnés $A$, $B$, les droites $DA$, $DB$ qui rencontrent le cercle aux points $E$, $F$; par où je tire les rayons $EC$, $CF$, & la corde $EF$. Cela fait, puisque $MC + CD$ ou $MD = MA$, & que les lignes $CD$, $CE$, sont rayons d'un même cercle, les triangles $DMA$, $DCE$, seront isoscelles; & par consequent semblables parce que l'angle en $D$ est commun: c'est pourquoi les lignes $CE$, $MA$, seront paralleles. On prouvera de même que les lignes $CF$, $MB$, seront aussi paralleles; ce qui donne $DA. DE :: DM. DC :: DB. DF$. Et de là on voit que toute la difficulté

ſe reduit à trouver ſur la circonference du cercle *DEKFH*, le point *D* tel qu'ayant mené les droites *DA*, *DB*, qui rencontrent la circonference aux points *E*, *F*; la corde *EF* ſoit parallele à la ligne *AB*. Or cela ſe peut faire ainſi.

Ayant décrit du point *C* un cercle qui ait pour rayon une ligne $CD = AM - MC$, & tiré *AC* qui rencontre ce cercle aux points *K*, *H*; on prendra ſur *AB* la partie *AG* quatriéme proportionnelle à *AB*, *AH*, *AK*; & on menera du point *G* la tangente *GE* au cercle *EDHFK*. Ayant mené par le point touchant *E* la ligne *AE* qui rencontre le cercle au point *D*, on tirera *DC*, ſur laquelle on prendra le point *M* tel que *DM*. *DC* :: *DA*. *DE*. Je dis qu'il ſera celui qu'on cherche.

Car par la proprieté du cercle *DEKFH* le rectangle $HA \times AK = DA \times AE$; Et par conſequent *BA*. *AD* :: *AE*. *AG*: c'eſt pourquoi les triangles *DAB*, *GAE*, qui ont l'angle en *A* commun, & les côtés autour de cet angle reciproquement proportionnels, ſeront ſemblables. L'angle *AEG* ſera donc égal à l'angle *ABD*; mais cet angle *AEG* étant fait par la tangente *EG* & par la corde *DE* prolongée du côté de *E*, a pour meſure la moitié de l'arc *DE*. Il ſera donc égal (en tirant par le point *F* où la ligne *DB* rencontre la circonference, la corde *EF*) à l'angle *DFE*; & par conſequent les lignes *FE*, *AB*, ſeront paralleles entr'elles. Or par la conſtruction *DC*. *DM* :: *DE*. *EA* :: *DF*. *FB*. Les triangles *DMA*, *DMB*, ſeront donc iſoſcelles; puiſque les triangles *DCE*, *DCF*, qui leur ſont ſemblables ſont iſoſcelles. Les lignes *AM*, *MB*, ſeront donc égales chacune à *DM*, & par conſequent entr'elles; & de plus *AM* ou *DM* ſurpaſſera *MC* de la grandeur donnée *CD*. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

FIG. 148. *Troiſiéme cas*. Lorſque les trois lignes *MA*, *MB*, *MC*, ſont inégales entr'elles. Du point donné *C*, je mene la perpendiculaire *CO* ſur la ligne *AB* qui joint les deux autres points donnés; & du point *M*, que je ſuppoſe

ſuppoſe être celui qu'on demande, les perpendiculaires $MP$, $MQ$, ſur les lignes $AB$, $CO$. Je nomme les données $AO$, $a$; $OB$, $b$; $CO$, $c$; $AM-MB$, $d$; $AM-MC$, $f$; & les inconnuës $OP$, $x$; $PM$, $y$; $AM$, $z$: ce qui donne $AP=a+x$, $BP=b-x$, $CQ=c-y$, $BM=z-d$, $CM=z-f$. Par le moyen des triangles rectangles $APM$, $BPM$, $CQM$, je trouve les trois équations ſuivantes; la premiere, $zz=aa+2ax+xx+yy$; la deuxiéme, $zz-2dz+dd=bb-2bx+xx+yy$; la troiſiéme, $zz-2fz+ff=cc-2cy+yy+xx$; & retranchant par ordre les membres des deux dernieres de ceux de la premiere, je forme une quatriéme, & une cinquiéme équation; ſçavoir la quatriéme, $2dz-dd=aa-bb+2ax+2bx$, & la cinquiéme, $2fz-ff=aa-cc+2ax+2cy$. Je mets dans la premiere équation à la place de $yy$ le quarré de la valeur de $y$ trouvée par le moyen de la cinquiéme; & enſuite à la place de $x$ ſa valeur trouvée par le moyen de la quatriéme, & à la place de $xx$ le quarré de cette valeur: ce qui donne enfin une égalité où il n'y a plus d'inconnuës que la ſeule $z$ qui ne monte qu'au quarré. C'eſt pourquoi on la pourra toûjours reſoudre en n'employant que des lignes droites & des cercles, comme l'on a enſeigné dans les articles 380, ou 382 (Liv. préced.) Or ayant la valeur de l'inconnuë $z$, il eſt facile de trouver le point cherché $M$; car il ſera dans l'interſection de deux arcs de cercle, dont l'un aura pour centre le point $A$, & pour rayon la ligne $AM$ ($z$); & l'autre pour centre le point $B$, & pour rayon la ligne $BM$ ($z-d$).

On voit aſſés qu'en achevant le calcul, on ſeroit arrivé à une égalité du deuxiéme degré qui auroit renfermé dans ſes termes des quantités trés-compoſées; de ſorte que pour les réünir ſous des expreſſions ſimples, comme le demandent les articles 380, & 382, on auroit beſoin d'un grand nombre d'operations; ce qui rendroit la conſtruction trés-longue. C'eſt pourquoi on ſe ſervira de celle-ci par le moyen de laquelle on reduit ce cas au précedent.

FIG. 249. Les deux droites $AB$, $AC$, qui joignent les points donnés étant divisées par le milieu aux deux points $D$, $F$, & ayant mené du point $M$ que je suppose être celui qu'on cherche, les perpendiculaires $MP$, $MQ$, sur ces deux lignes; on nommera les données $AB$, $2a$; $BC$, $2b$; $AM-MB$, $2c$; $AM-MC$, $2d$; & les inconnuës $DP$, $x$; $FQ$, $y$. Cela posé, si l'on nomme $2t$ la somme inconnuë des deux droites $AM$, $BM$; la plus grande $AM$ sera $t+c$ & la moindre $BM$ sera $t-c$. Or les triangles rectangles $APM$, $BPM$, donnent $\overline{PM}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AP}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{BP}^2$ c'est à dire en termes analytiques $tt+2ct+cc-aa-2ax-xx=tt-2ct+cc-aa+2ax-xx$, d'où l'on tire $t=\frac{ax}{c}$; & par consequent $AM\ (t+c)=\frac{ax}{c}+c$. On trouvera de même par le moyen des deux triangles rectangles $AQM$, $CQM$, que $AM=\frac{by}{d}+d$; ce qui, en comparant ensemble les deux valeurs de $AM$, donne cette équation $\frac{ax}{c}+c=\frac{by}{d}+d$, ou $\frac{ax}{c}=\frac{by}{d}+d-c=\frac{by}{d}+f$, en faisant pour abreger $d-c=f$. D'où il est clair que le point cherché $M$ doit être tel qu'ayant mené les perpendiculaires $MP$, $MQ$, sur les deux droites $AB$, $AC$; on ait cette équation $\frac{ax}{c}=\frac{by}{d}+f$, ou ce qui revient au même cette proportion $x.\ y+\frac{df}{b}::b.\ \frac{ad}{c}$. Or cela suffit pour trouver la construction suivante.

Ayant joint les points donnés par les deux droites $AB$, $AC$, & divisé ces droites par le milieu aux points $D$, $F$; on prendra sur $AC$ du côté du point $A$ la partie $FK=\frac{df}{b}$; & ayant tiré sur $AB$, $AC$, les perpendiculaires $DO$, $KS$, qui se rencontrent au point $H$, on menera dans l'angle $OHS$ la droite $HM$ qui soit le lieu des points $M$, tels qu'ayant tiré de chacun d'eux

les perpendiculaires *MO*, *MR*, ſur les côtés *HO*, *HS*; la droite *MO* ſoit toûjours à la droite *MR*, en la raiſon donnée de $b$ à $\frac{ad}{c}$. Enſuite l'on tirera *AE* perpendiculaire ſur *HM*, & l'ayant prolongée en *G* en ſorte que *EG* ſoit égale à *AE*, on trouvera par le ſecond cas le point *M*, tel qu'ayant mené les droites *MA*, *MG*, *MC*; les deux *MA*, *MG*, ſoient égales entr'elles, & la difference de *MA* à *MC* ſoit la donnée $2d$. Je dis qu'il ſatisfera à la queſtion.

Car par la proprieté de la droite *HM*, on aura toûjours *MO* ou *DP*$(x)$. *MR* ou *QK* $\left(y + \frac{df}{b}\right) :: b . \frac{df}{b}$; & par conſequent le point *M* ſe doit trouver dans cette ligne. Il ſera donc également éloigné des points *A*, *G*; mais de plus la difference de *AM* à *MC* doit être la donnée $2d$. Donc &c.

## REMARQUE.

433. Si au lieu que dans cet exemple, les deux differences de l'une de ces trois droites *MA*, *MB*, *MC*, aux deux autres ſont données; on vouloit à preſent que ce fuſſent les deux ſommes de l'une de ces droites avec chacune des deux autres, ou bien la ſomme de l'une d'elles avec une autre & la difference de la même avec la troiſiéme: la queſtion n'en deviendroit pas plus difficile, & on pourroit toûjours la reſoudre par les mêmes methodes. Ce que je n'expliquerai point en détail, afin de laiſſer quelque choſe à l'induſtrie des Lecteurs.

## COROLLAIRE I.

434. DE LA on voit comment on peut décrire un cercle qui touche trois cercles donnés.

Car ſoient les points *A*, *B*, *C*, les centres des cercles donnés, & le point *M* celui du cercle qu'on cherche, lequel touche les cercles donnés aux points *D*, *E*, *F*, du côté que l'on voit dans la figure. Soient les rayons FIG. 250.

des cercles donnés $AD=a$, $BE=b$, $CF=c$; & le rayon du cercle qu'on cherche $MD$ ou $ME$ ou $MF$ $=z$. Cela posé, on aura $AM=z+a$, $MB=z+b$, $MC=z-c$; & partant $AM-MB=a-b$, $MB-MC$ $=b+c$, $AM-MC=a+c$. D'où il est évident que la question se reduit à trouver un point $M$, duquel ayant mené aux trois points donnés $A$, $B$, $C$, les droites $MA$, $MB$, $MC$, leurs differences soient données.

## COROLLAIRE II.

FIG. 251. 252. 435. DE LA on tire encore la maniere de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné $F$, qui passe par deux autres points donnés $B$, $C$, & qui touche une ligne droite $DE$ donnée de position.

On doit distinguer ici deux differens cas, dont le premier est, lorsque les trois points donnés $F$, $B$, $C$, tombent du même côté de la droite indéfinie $DE$; & le second lorsqu'ils tombent de part & d'autre.

FIG. 251. *Premier cas*. Ayant mené $FD$ perpendiculaire sur $DE$, & l'ayant prolongée en $A$ en sorte que $DA$ soit égale à $DF$; on tirera les droites $FB$, $FC$. On trouvera le point $M$ tel que la difference de $AM$ & $BM$ soit égale à $FB$, & celle de $AM$ & $MC$ égale à $FC$. On décrira ensuite * une Section conique qui ait pour ses deux foyers les points $F$, $M$, & pour l'axe qui passe par les foyers une ligne égale à $AM$. Je dis qu'elle sera celle qu'on cherche.

* *Def.* 1. II. & 1. III.

Car 1°. Le point $E$ où la ligne $AM$ rencontre la droite $DE$ est à la Section, puisque $FE$ étant égale à $AE$, on aura dans l'Ellipse la somme des droites $FE$, $EM$, & dans l'Hyperbole la difference égale à l'axe qui passe par les foyers; & par la même raison les points $B$, $C$, seront aussi dans la Section. 2°. Par la construction les angles $FED$, $DEA$, sont égaux entr'eux; & par consequent la ligne $ED$ est * tangente en $E$.

* *Art.* 60. & 123.

Il faut remarquer dans ce cas que lorsqu'on cherche

le foyer *M* du même côté du foyer donné *F* par rapport à ligne *DE*, la Section qu'on trouve est une Ellipse; au lieu qu'elle sera une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées, lorsqu'on le cherchera de l'autre côté.

*Second cas.* Il est évident que dans ce dernier cas il ne peut y avoir d'Ellipse qui satisfasse, mais seulement deux Hyperboles opposées. Pour les trouver; ayant mené comme dans le premier cas *FD* perpendiculaire sur *DE*, & l'ayant prolongée en *A* en sorte que *DA* soit égale à *DF*; on cherchera le point *M* tel que la somme de *AM* & *BM* soit égale à la donnée *FB*, & la difference de *AM* & *MC* soit égale à la donnée *FC*. On décrira enfin deux Hyperboles opposées qui ayent pour foyers les deux points *F, M*, & dont le premier axe soit égal à *AM*. Je dis qu'elles ont les conditions requises. FIG. 252.

Car 1°. Le point *E*, où la ligne *AM* rencontre la ligne *DE*, sera à l'une de ces deux Hyperboles, puisque *FE* étant égale à *AE*, la difference des droites *FE*, *ME*, sera égale à *AM* valeur du premier axe; & par la même raison les points *B, C*, seront à ces Hyperboles. 2°. La ligne *DE* sera * tangente en *E*, puisque par la construction les angles *AED*, *DEF*, sont égaux entr'eux. * Art. 123.

Si le point *C* tomboit du même côté du point *B* par rapport à la ligne *DE*, la somme des deux droites *AM* & *MC* seroit égale à la donnée *FC*; au lieu que c'est la difference lorsque les points *B, C*, tombent de part & d'autre de la ligne *DE*, comme l'on a supposé dans cette figure.

Si l'on proposoit de décrire une Section conique qui eût pour foyer un point donné, pour tangentes deux lignes données de position, & qui passât par un autre point donné; on trouveroit par le moyen de ces deux lignes deux points comme l'on vient de faire le point *A*, desquels ayant mené deux droites qui aboutissent à l'autre foyer qu'on cherche, elles doivent être égales entr'elles, & leur difference ou leur somme avec celle qui part du

point où doit passer la Section & qui aboutit au même foyer, sera toûjours donnée : de sorte qu'on pourra toûjours resoudre la question par le moyen de l'Exemple précedent, & de sa Remarque. Enfin s'il falloit décrire une Section qui touchât trois lignes données de position, & qui eût pour foyer un point donné ; on trouveroit par le moyen de ces trois lignes trois points comme l'on a fait le point *A* par le moyen de la ligne *DE* dans les deux cas précedens, & le centre du cercle qui passeroit par ces trois points, seroit l'autre foyer de la Section, laquelle auroit pour premier axe une ligne égale au rayon de ce cercle.

On doit observer dans tous ces differens cas, que si le point cherché *M* étoit infiniment éloigné du point *F* ; la Section deviendroit alors une Parabole dont les diametres seroient paralleles aux lignes, qui, continuées à l'infini, aboutiroient au point cherché.

## EXEMPLE V.

FIG. 253. 436. UNE Parabole *NCS* étant donnée avec un de ses arcs *MN* ; trouver un autre arc *RS* qui soit à l'arc *MN*, en raison donnée de nombre à nombre.

Ayant prolongé l'axe de la Parabole du côté de son origine *C* jusques en *A*, en sorte que *CA* soit égal à la moitié de son parametre, & décrit une Hyperbole équilatere *EAF* qui ait pour centre le point *C* & pour la moitié de son premier axe la ligne *CA* ; on menera parallement à l'axe *CA* les droites *MB*, *NE*, *RD*, *SF*, qui rencontrent le second axe aux points *H*, *L*, *K*, *O*, & l'Hyperbole aux points *B*, *E*, *D*, *F*, desquels on tirera sur les Asymptotes les perpendiculaires *BP*, *EQ*, *DG*, *FI*. Cela fait, il est visible que le rectangle $AC \times MN$ ou * le Trapese hyperbolique *HBEL* est égal au Secteur hyperbolique *CBE* plus le triangle *CLE* moins le triangle *CHB* ; & de même que $AC \times RS = CDF + COF - CKD$. Or supposant que la raison donnée de l'arc

* Art. 246.

$MN$ à l'arc $RS$ soit comme $m$ est à $n$, les lettres $m$ & $n$ expriquent des nombres entiers quelconques) on aura par la condition du Problême $AC \times MN$ ou $CBE + CLE - CHB . AC \times RS$ ou $CDF + COF - CKD :: m . n$, & par consequent $nCBE + nCLE - nCHB = mCDF + mCOF - mCKD$. Si donc l'on nomme les données $CP, b$; $CQ, c$; l'inconnuë $CG, x$; & qu'on prenne $CI = x\sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, il est clair * que le Secteur hyperbolique $CBE . CDF :: m . n$, & qu'ainsi $nCBE = mCDF$; d'où l'on voit que l'égalité précedente se change en celle-ci $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$ qui ne renferme plus d'espaces hyperboliques, mais seulement des triangles rectangles dont il s'agit maintenant de trouver les valeurs analytiques. * Art. 223.

Les droites $CP$, $HB$, forment en s'entrecoupant au point $N$ deux triangles rectangles $VHC$, $VPB$, qui sont semblables; puisque les angles en $V$ étant opposés au sommet sont égaux; ce qui donne $HV . CV :: VP . VB$, & en multipliant les extrêmes & les moyens $HV \times VB = CV \times VP$. De plus à cause de l'Hyperbole équilatere $EAF$, l'angle $VCA$ ou $CVH$ * est demi droit, & par consequent le triangle rectangle $CHV$ est isoscelle, aussi-bien que son semblable $VPB$, ce qui donne $VP = PB$, $CH = HV$, & $\overline{CV}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HV}^2 = 2\overline{HV}^2$. Donc le quadruple du triangle rectangle $CHB$, c'est à dire $2CH \times HB = 2HV \times \overline{HV + VB} = 2\overline{HV}^2 + 2HV \times VB = \overline{CV}^2 + 2CV \times VP = \overline{CV}^2 + 2CV \times VP + \overline{VP}^2 - \overline{VP}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{PB}^2$, puisque $\overline{CV}^2 + 2CV \times VP + \overline{VP}^2$ est le quarré de $CV + VP$ ou de $CP$. Et par consequent le triangle $CHB = \frac{1}{4}\overline{CP}^2 - \frac{1}{4}\overline{PB}^2$. On prouvera de même que le triangle $CLE = \frac{1}{4}\overline{CQ}^2 - \frac{1}{4}\overline{QE}^2$, que le triangle $CKD = \frac{1}{4}\overline{CG}^2 - \frac{1}{4}\overline{GD}^2$, & enfin que le triangle $COF = \frac{1}{4}\overline{CI}^2 - \frac{1}{4}\overline{IF}^2$. C'est pourquoi nommant $aa$ la puissance de l'Hyperbole, * Def. 16. III.

on aura le triangle $CHB = \frac{1}{4} bb - \frac{a^4}{4bb}$, le triangle $CLE = \frac{1}{4} cc - \frac{a^4}{4cc}$, le triangle $CKD = \frac{1}{4} xx - \frac{a^4}{4xx}$, le
* *Art.* 101. triangle $COF = \frac{xx}{4} \sqrt[m]{\frac{c^{2n}}{b^{2n}}} - \frac{a^4}{4xx} \sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$; puiſque * $PB = \frac{aa}{b}$, $QE = \frac{aa}{c}$; $IF = \frac{aa}{x} \sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$: & mettant ces valeurs à la place des triangles qu'elles expriment dans l'égalité $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$, on en formera celle-ci $\frac{1}{4} n \times cc - \frac{a^4}{cc} - bb + \frac{a^4}{bb} = \frac{1}{4} m \times xx \sqrt[m]{\frac{c^{2n}}{b^{2n}}} - \frac{a^4}{xx} \sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}} - xx + \frac{a^4}{4xx}$ qui ſe reduit, en operant ſelon les regles ordinaires de l'Algebre, à cette égalité du deuxiéme degré $x^4 - \frac{na^4 - nbbcc \times cc - bb \times \sqrt[m]{b^{2n}}}{mbbcc \times \sqrt[m]{c^{2n}} - \sqrt[m]{b^{2n}}} xx + a^4 \sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}} = o$, dont la reſolution doit fournir pour $CG$ ($x$) une valeur telle qu'en prenant $CI = x \sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, & tirant les perpendiculaires $GD$, $IF$, qui rencontrent l'Hyperbole équilatere aux points $D$, $F$; l'arc $RS$ que les paralleles $DR$, $FS$ à l'axe coupent ſur la Parabole, ſera à l'arc $MN$ en la raiſon donnée de $n$ à $m$.

Il eſt à propos de remarquer, 1°. Que le ſecond terme de cette égalité eſt toûjours negatif, parce que $CQ$ ($c$) ſurpaſſe $CP$ ($b$); & qu'ainſi ces deux racines ſeront toutes deux vraies ou toutes deux imaginaires, ſelon que la moitié de la grandeur connuë au ſecond terme eſt plus grande ou moindre que $aa \sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$ racine quarrée du dernier terme : ce qui eſt une ſuite de la reſolution des égalités du ſecond degré. 2°. Que $\overline{CG}^2$ ($xx$) étant une des racines de cette égalité, $\overline{IF}^2$ en ſera l'autre. Car puiſque
* *Art.* 101. $CI = x \sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, il s'enſuit * que $IF = \frac{aa}{x} \sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$. Or on ſçait que le dernier terme d'une égalité, eſt le produit de ſes racines. Si donc on diviſe le dernier terme $a^4 \sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$ de l'égalité

l'égalité précedente, par le quarré $\overline{CG}^2$ $(xx)$ que l'on ſuppoſe être l'une de ſes deux racines; l'autre ſera $\frac{a^4}{xx} \sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$ qui eſt le quarré de $FI$. D'où l'on voit que ſi l'on prend ſur les deux Aſymptotes les parties $CG$, $CT$, égales aux deux racines de l'égalité précedente; & qu'ayant tiré les paralleles $GD$, $TF$, aux Aſymptotes, on mene par les points $D$, $F$, où elles rencontrent l'hyperbole équilatere $EAF$, les paralleles $DR$, $FS$, à l'axe: elles couperont ſur la Parabole l'arc cherché $RS$.

Si $m = n$, l'équation generale ſe changera en celle-ci $x^4 - \frac{bbcc - a^4}{cc} xx + \frac{a^4bb}{cc} = 0$, dont les deux racines fourniſſent $CG\,(x) = b = CP$, & $CT\,(x) = \frac{aa}{c} = QE$; d'où il ſuit qu'on trouve par leur moyen un arc $RS$, ſemblablement poſé de l'autre côté de l'axe, par rapport à l'arc $MN$. Or comme l'on ſçait d'ailleurs * que les deux arcs $RS$, $MN$, étant ſemblablement poſés de part & d'autre de l'axe ſont égaux entr'eux, cela ſert à confirmer les raiſonnemens que l'on vient de faire. De là il eſt aiſé de conclure qu'un arc parabolique $MN$ étant donné, on n'en peut trouver aucun autre $RS$ qui ſoit plus proche ou plus éloigné de l'origine $C$ de l'axe & qui lui ſoit égal; ſans ſuppoſer la quadrature de quelque Secteur hyperbolique, ou (ce qui revient au même) la rectification de quelque arc parabolique.

* *Art.* 86.

Si $m = 1$ & $n = 2$, on aura $x^4 - \frac{2a^4bb - 2ccb^4}{c^4 + bbcc} xx + \frac{a^4b^4}{c^4} = 0$; & ſi $m = 2$ & $n = 3$, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi l'arc $RS$ doit être à l'arc $MN$ comme 3 eſt à 2, on trouvera $x^4 - \frac{\overline{3a^4 - 3bbcc} \times \overline{bcc - b^3}}{2c^5 - 2ccb^3} xx + \frac{a^4b^3}{c^3} = 0$; & la reſolution de ces égalités fournira celle du Problême. Il en eſt de même des autres valeurs de $m$ & $n$.

M. *Bernoulli* celebre Profeſſeur des Mathematiques à Groningue, a reſolu le premier ce Problême d'une maniere differente de celle-ci. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipſic de l'année 1698. p. 261.

### EXEMPLE VI.

437. UN angle $BAC$ étant donné avec un point $D$
FIG. 254. au dedans de cet angle; décrire un cercle qui passe par le point donné $D$, qui touche le côté $AB$ en quelque point $P$, & qui coupe sur l'autre côté $AC$ une partie $OC$ égale à une ligne donnée $2a$.

Ayant supposé le Problême resolu, on menera du point donné $D$, la ligne $DA$ qui passe par le sommet $A$ de l'angle donné, la ligne $DP$ qui passe par le point touchant $P$ & rencontre en $H$ le côté $AC$ prolongé, la ligne $DE$ parallele à $AC$, & la perpendiculaire $DB$ sur le côté $AB$: & ayant divisé la partie interceptée $OC(2a)$ par le milieu en $Q$, on nommera les inconnuës $AP, x$; $AQ, z$; $DH, t$; & les données $AE, m$; $AB, g$; $BD, b$; $DE, f$; $AD, n$. Cela fait, on aura par la proprieté du cercle, $\overline{AP}^2\ (xx) = CA \times AO$ ou $\overline{AQ}^2\ (zz) - \overline{QO}^2\ (aa)$, & partant $zz = xx + aa$. De plus les triangles semblables $PED$, $PAH$, donnent $AE\ (m).\ AP(x) :: DH\ (t).\ HP = \frac{tx}{m}$. Et $PE\ (m-x).\ ED\ (f) :: AP\ (x).\ AH = \frac{fx}{m-x}$. Donc $HQ = z + \frac{fx}{m-x}$ & $CH \times HO$ ou $\overline{HQ}^2 - \overline{QO}^2 = zz + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{\overline{m-x}^2} - aa = xx + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{\overline{m-x}^2}$ (en mettant pour $zz$ sa valeur $xx + aa$) $= DH \times HP\ \left(\frac{ttx}{m}\right)$ par la proprieté du cercle; c'est à dire qu'en divisant par $x$, on aura cette égalité $x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{ffx}{\overline{m-x}^2} = \frac{tt}{m}$. Or $PD$ ou $DH - HP = \frac{mt-tx}{m}$; & (à cause du triangle rectangle $DBP$) son quarré $\frac{mmtt-2mttx+ttxx}{mm} = xx - 2gx + gg + bb = xx - 2gx + nn$ en mettant pour $bb + gg$ sa valeur $nn$; d'où l'on tire $\frac{tt}{m} = \frac{mxx-2gmx+mnn}{\overline{m-x}^2} = x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{ffx}{\overline{m-x}^2}$, & multipliant par $m-x$, &

transposant le terme $\frac{ffx}{m-x^2}$, il vient $mx - xx + 2fz = \frac{mxx - 2gmx - ffx + mnn}{m-x} = \frac{mxx - mmx - nnx + mnn}{m-x}$, puisque à cause du triangle rectangle $DEB$ on trouve $ff = bb + gg - 2gm + mm = nn - 2gm + mm$: c'est à dire, parce que la division se fait au juste, $mx - xx + 2fz = -mx + nn$ ou $2fz = xx - 2mx + nn$. Quarrant enfin chaque membre, & mettant pour $zz$ sa valeur $xx + aa$, on aura cette égalité

$$\begin{array}{l} x^4 - 4mx^3 + 4mmxx - 4mnnx + n^4 = 0 \\ \quad\; - 4ff \qquad\qquad\quad - 4aaff \\ \quad\; + 2nn \end{array}$$

qui est du quatriéme degré, & dont les racines que l'on trouvera par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée ou de telle autre Section conique qu'on voudra doivent fournir pour $AP$ $(x)$ des valeurs telles que menant $PM$ perpendiculaire sur $AP$, tirant $PD$, & faisant l'angle $PDM$ égal à l'angle $DPM$, le point $M$, où se rencontrent les côtés $DM$, $PM$ du triangle isoscelle $DPM$, soit le centre du cercle cherché, qui aura pour rayon la droite $MP$ ou $MD$. Ou bien si l'on prend sur le côté $AB$ la partie $AP = x$, & sur l'autre côté $AC$ la partie $AQ = \sqrt{xx + aa}$, & qu'on mene sur ces côtés les perpendiculaires $PM$, $QM$; le point $M$ où elles se rencontrent, sera le centre du cercle qu'on demande.

Comme rien n'est plus propre à donner de l'ouverture à l'esprit, que de faire voir les differens chemins qu'on peut suivre pour arriver à la connoissance de la même verité; je vais donner une autre maniere de resoudre cette question, qui me paroît encore plus naturelle que la précedente.

Ayant supposé que le point $M$ soit le centre du cercle cherché, on menera les perpendiculaires $MP$, $MQ$, sur les côtés de l'angle donné $BAC$, & les paralleles $MF$, $MG$, à ces côtés; & du point donné $D$, on tirera les paralleles $DB$, $DE$, $DK$, à $MP$, $MF$, $AB$. On nommera ensuite les données $DB$, $b$;

$BE$, $c$; $DE$, $f$; $AB$, $g$; $AE$, $m$; $AD$, $n$; & les inconnuës $AP$, $x$; $PM$ ou $MD$, $y$; & on aura $PB$ ou $DK = g - x$, $MK = y - b$: ce qui donne (à cause du triangle rectangle $MKD$) l'équation $yy = gg - 2gx + xx + yy - 2by + bb$, d'où l'on tire $y = \frac{xx - 2gx + bb + gg}{2b} = \frac{xx - 2gx + nn}{2b}$ en mettant pour $bb + gg$ sa valeur $nn$. Or à cause des triangles semblables $DBE$, $MPF$, on a cette proportion $DB\,(b)$. $BE\,(c)$ :: $PM\,(y)$. $PF = \frac{cy}{b}$, & partant $AF$ ou $MG = \frac{bx - cy}{b}$; & à cause des triangles semblables $DBE$, $MQG$, $DE\,(f)$. $DB\,(b)$ :: $MG\,\left(\frac{bx - cy}{b}\right)$. $MQ = \frac{bx - cy}{f}$; Donc puisque par les conditions du Problême, il faut que $QC$ moitié de la partie interceptée $OC$ soit égale à la ligne donnée $a$, & que les droites $MC$ & $MP$ soient rayons d'un même cercle cherché; il vient $\overline{MC}^2 = \frac{bbxx - 2bcxy + ccyy}{ff} + aa = \overline{MP}^2\,(yy)$, & multipliant par $ff$ on aura $bbxx - 2bcxy + ccyy + aaff = ffyy = bbyy + ccyy$, en mettant pour $ff$ sa valeur $bb + cc$, c'est à dire $ffxx + aaff = ccxx + 2bcxy + bbyy$, en effaçant de part & d'autre $ccyy$, & mettant pour $bbxx$ sa valeur $ffxx - ccxx$; ce qui donne par l'extraction de la racine quarrée, $f\sqrt{xx + aa} = cx + by = \frac{2cx - 2gx + xx + nn}{2}$ en mettant pour $y$ sa valeur $\frac{xx - 2gx + nn}{2b}$, & enfin si l'on met pour $g - c$ sa valeur $m$, on trouvera la même égalité que ci-dessus $2f\sqrt{xx + aa} = xx - 2mx + nn$.

Voici encore une nouvelle maniere de resoudre cette question, qui donne d'abord une construction fort aisée; mais qui demande la description de deux Paraboles. 1°. Je cherche le lieu des points $M$, tels qu'ayant mené de chacun de ces points au point donné $D$ une ligne droite $MD$, & sur la ligne $AB$ donnée de position la perpendiculaire $MP$; ces deux lignes $MD$, $MP$, soient toûjours égales entr'elles: & je vois sans aucun calcul que c'est * *Art. 1.

la Parabole qui a pour foyer le point $D$, & pour directrice la ligne $AB$. 2°. Je cherche le lieu des points $M$, tels qu'ayant décrit de chacun de ces points un cercle qui passe par le point donné $D$; ce cercle coupe sur la ligne $AL$ donnée de position, la partie $OC$ égale à une ligne donnée $2a$. Je mene à cet effet du point donné $D$ la perpendiculaire $DL$ sur $AL$, & d'un des points cherchés $M$ que je regarde comme donné, les perpendiculaires $MR$, $MQ$, sur $DL$, $AL$: & ayant nommé les inconnuës & indéterminées $DR$, $x$; $RM$, $y$; qui font entr'elles un angle droit $DRM$, & la connuë $DL$, $b$; j'ai à cause du triangle rectangle $MRD$ le quarré $\overline{MD}^2 = xx + yy$, & à cause du triangle rectangle $MQC$ le quarré $\overline{MC}^2 = \overline{MQ}^2 (bb - 2bx + xx) + \overline{QC}^2 (aa)$. Or les lignes $MD$, $MC$, étant rayons du même cercle sont égales entr'elles, & par consequent $xx + yy = bb - 2bx + xx + aa$, ou $yy = bb + aa - 2bx$. Si donc l'on construit la Parabole qui est le lieu de cette équation, il est visible qu'elle passera par le centre $M$ du cercle qu'on demande: mais la Parabole qui a pour foyer le point $D$ & pour directrice la ligne $AB$ devant aussi passer par ce centre, il s'ensuit que le centre du cercle cherché se trouvera dans l'intersection de ces deux Paraboles.

## EXEMPLE VII.

438. Un cercle qui a pour centre le point $A$ & pour rayon la droite $AM$, étant donné, avec deux points $E$, $F$, sur le même plan; trouver sur la circonference au dedans de l'angle $EAF$, le point $M$ tel qu'ayant mené les droites $AM$, $EM$, $FM$; les deux angles $AME$, $AMF$, soient égaux entr'eux. FIG. 255.

Si les lignes $AE$, $AF$, étoient égales entr'elles, il est visible que la ligne qui diviseroit par le milieu l'angle $EAF$, couperoit la circonference dans le point qu'on demande. C'est pourquoi on supposera que ces deux lignes sont inégales, & même pour éviter la confusion

que c'est la ligne $AE$ qui est moindre que la ligne $AF$. Or cela posé, je resouds ce Problême en deux differentes manieres.

### PREMIERE MANIERE.

Ayant supposé que le point $M$ soit celui qu'on cherche, on menera les droites $MB$, $MD$, qui fassent sur $AF$, $AE$, des angles $MBA$, $MDA$, égaux aux angles $AMF$, $AME$, & par consequent entr'eux ; & à cause des triangles semblables $AFM$, $AMB$, & $AEM$, $AMD$, on aura ces deux proportions $AF. AM :: AM. AB$. Et $AE. AM :: AM. AD$. Donc puisque les lignes $AF$, $AE$, sont données avec le rayon $AM$, les parties $AB$, $AD$, des droites $AF$, $AE$, le seront aussi. Maintenant, si l'on mene les droites $MP$, $MQ$, paralleles à $AE$, $AF$ ; les triangles $BPM$, $DQM$ seront semblables, puisque les angles $APM$, $AQM$, sont égaux, comme aussi les angles $PBM$, $QDM$, complemens à deux droits des angles égaux, $MBA$, $MDA$ ; & partant si l'on nomme les données $AB$, $a$ ; $AD$, $b$ ; & les inconnuës $AP$ ou $QM$, $x$ ; $PM$ ou $AQ$, $y$ ; on aura $BP (x-a). PM (y) :: DQ (y-b). QM (x) ::$ ce qui donne (en multipliant les extrêmes & les moyens) cette équation

*Art. 336. $xx - ax = yy - by$, ou $yy - by - xx + ax = o$, dont le lieu est * une Hyperbole équilatere qui se construit ainsi.

Soient prises sur les lignes $AF$, $AE$, les parties $AB$, $AD$, troisiémes proportionnelles à $AF$, $AM$, & à $AE$, $AM$ : soit tirée par le point $C$ milieu de $BD$ une ligne droite indéfinie $CH$ parallele à $AB$, sur laquelle soit prise la partie $CK = \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa}$ (la ligne $AD (b)$ sera plus grande que $BA (a)$, puisqu'on a supposé que $AE$ est moindre que $AF$) : soit décrite une Hyperbole équilatere qui ait pour centre le point $C$, & pour la moitié d'un second diametre la droite $CK$, dont les ordonnées $HM$ soient paralleles à $AD$. Je dis qu'elle rencontrera la circonference du cercle donné, au point cherché $M$.

Car menant $CL$ parallele à $AD$, il est clair que les

lignes $CH$, $CL$, diviseront par le milieu les droites $AD$, $AB$, aux points $O$, $L$; puisque le point $C$ coupe en deux parties égales la ligne $BD$, & qu'ainsi $CH$ ou $AP - AL = x - \frac{1}{2}a$, $HM$ ou $PM - AO = y - \frac{1}{2}b$. Or par la proprieté de l'Hyperbole équilatere, $\overline{HM}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CK}^2$, c'est à dire en termes analytiques $yy - by + \frac{1}{4}bb = xx - ax + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$; d'où l'on tire l'équation $yy - by = xx - ax$, qui étant reduite en proportion, donne $BP\,(x-a).\ PM\,(y) :: DQ\,(y-b).\ QM\,(x)$. Donc puisque les angles $BPM$, $DQM$, sont égaux, & que les côtés autour de ces angles sont proportionnels; les triangles $BPM$, $DQM$, seront semblables, & par consequent l'angle $MBP$ sera égal à l'angle $MDQ$, & leurs complemens à deux droits $ABM$, $ADM$, seront égaux. Mais puisque $AB.\ AM :: AM.\ AF$, & $AD.\ AM :: AM.\ AE$, les triangles $ABM$, $AMF$, & $ADM$, $AME$, seront semblables. L'angle $ABM$ sera donc égal à l'angle $AMF$, & l'angle $ADM$ à l'angle $AME$; & par consequent les angles $AMF$, $AME$, seront égaux entr'eux, puisqu'on vient de prouver que les angles $ABM$, $ADM$, le sont.

On prouvera de même que l'Hyperbole opposée à celle-ci coupera la circonference au dedans de l'angle opposé au sommet à l'angle $EAF$, en un point $M$ tel qu'ayant mené les droites $AM$, $ME$, $MF$; les angles $AME$, $AMF$, seront égaux entr'eux: comme aussi que ces deux Hyperboles équilateres opposées couperont la circonference au dedans des angles qui sont à côté de ces deux-ci, chacune en un point $M$ tel qu'ayant mené les droites $MA$, $ME$, $MF$; l'angle $AME$ sera égal au complement à deux droits de l'angle $AMF$.

Si l'on prend sur $CL$ la partie $CG$ égal à $CK$, il est clair * que $CG$ sera la moitié du premier diametre conjugué à $CK$, & qu'ainsi * l'une des Asymptotes de ces deux Hyperboles sera parallele à $KG$. Or dans le triangle isoscelle $GCK$, l'angle externe $GCO$ ou son égal $BAD$ vaut les deux internes opposés, c'est à dire le dou-

* Def. 16. III.
* Art. 114.

ble de l'angle $CGK$. Donc puiſque les lignes $CG$, $AD$, ſont paralleles, il s'enſuit que la ligne $KG$ & par conſequent l'une des Aſymptotes ſera parallele à la ligne qui diviſe par le milieu l'angle $DAB$. De plus il eſt évident que la ligne $AD$ eſt une double ordonnée au ſecond diametre $CK$, puiſque $\overline{OD}^2$ ou $\overline{OA}^2$ $(\frac{1}{4}bb) = \overline{CO}^2$ $(\frac{1}{4}aa) + \overline{CK}^2$ $(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa)$; & qu'ainſi l'une des Hyperboles équilateres oppoſées paſſe par le point $D$, & l'autre par le point $A$. Ces deux remarques donnent lieu à une nouvelle conſtruction qui eſt plus ſimple que la précedente : la voici.

FIG. 256. Ayant pris ſur les lignes $AF$, $AE$, les parties $AB$, $AD$, troiſiémes proportionnelles à $AF$, $AM$, & à $AE$, $AM$; on menera par le point de milieu $C$ de la ligne $BD$ deux droites indéfinies $CH$, $CK$, l'une parallele & l'autre perpendiculaire à la ligne $AP$, qui diviſe par le milieu l'angle donné $EAF$. On décrira enſuite entre ces deux lignes comme Aſymptotes, par les points $D$, $A$, deux Hyperboles oppoſées, qui couperont la circonference du cercle donné en des points $M$ tels qu'ayant mené les droites $MA$, $ME$, $MF$; les deux angles $AME$, $AMF$, ſeront égaux entr'eux lorſque le point d'interſection $M$ tombe dans l'angle $EAF$ ou dans ſon oppoſé au ſommet; & l'angle $AME$ ſera égal au complement à deux droits de l'angle $AMF$ lorſqu'il tombe dans l'un ou dans l'autre des angles à côté.

On n'eſt arrivé à cette derniere conſtruction qu'en ſuppoſant la premiere qui eſt fondée ſur le calcul, & en faiſant enſuite des remarques qui ſont aſſés recherchées. Il eſt cependant facile de la démontrer tout d'un coup, ſi l'on fait attention à une proprieté de l'Hyperbole équilatere qui ſe trouve dans l'article 361. (Liv. VIII.) & qui d'ailleurs ſe peut aiſément prouver. Car ſi l'on mene du point $M$ où l'Hyperbole équilatere $DM$ rencontre la circonference du cercle donné, aux deux extremités $B$, $D$, du premier diametre $BD$, les droites

$BM$, $DM$,

$BM$, $DM$, qui rencontrent l'Aſymptote $CH$ aux points $O$, $L$, & la ligne $AP$ qui lui eſt parallele aux points $S$, $R$; il eſt clair ſelon cet article, que $MO$ eſt égal à $ML$, & qu'ainſi l'angle $MOL$ ou $MSR$ ou $BSA$ eſt égal à l'angle $MLO$ ou $DRA$. Mais par la conſtruction l'angle $BAS$ eſt égal à l'angle $DAR$, puiſque la ligne $AP$ diviſe par le milieu l'angle $EAF$. Partant les angles reſtans $ABM$, $ADM$, dans les deux triangles $ABS$, $ADR$, ſeront égaux entr'eux; d'où il ſuit que les angles $AMF$, $AME$, le ſont auſſi. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

On peut trouver facilement par le moyen de cette derniere conſtruction, une égalité trés-ſimple qui ne renferme qu'une ſeule inconnuë, & dont la conſtruction qui ſe pourra faire par telle Section conique qu'on voudra ſuivant les regles preſcrites dans le Livre précedent, fournira la reſolution du Problême. Soit menée à cet effet du point $M$ la ligne $MP$ parallele à l'Aſymptote $CK$, & qui rencontre l'autre Aſymptote $CH$ au point $H$; & ſoient nommées les données $AM$, $a$; $AK$, $b$; $CK$, $c$; & les inconnuës $AP$, $x$; $PM$, $y$. Cela poſé, on aura par la proprieté du cercle l'équation $xx + yy = aa$, & par la proprieté des Hyperboles oppoſées * l'autre équation $CH \times HM$ $(xy - cx - by + bc) = CK \times KA$ $(bc)$; ce qui donne $xy - cx - by = o$, d'où l'on tire $y = \frac{cx}{x-b}$. Mettant le quarré de cette valeur à la place de $yy$ dans la premiere équation $xx + yy = aa$, & operant à l'ordinaire on formera cette égalité du quatriéme degré $x^4 - 2bx^3 \begin{array}{l} + bbxx \\ + cc \\ - aa \end{array} + 2aabx - aabb = o$. * Art. 100.

Or ſi l'on mene du centre $C$ des Hyperboles perpendiculairement à $AC$ la ligne $CG$ qui rencontre la circonference au point $G$; les triangles rectangles $ACG$, $AKC$, donneront $\overline{CG}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{AM}^2$ $(aa) - \overline{AK}^2$ $(bb) - \overline{CK}^2$ $(cc)$. C'eſt pourquoi nommant la donnée $CG$, $m$;

on changera l'égalité précedente en celle-ci $x^4 - 2bx^3 + mmxx + 2aabx - aabb = 0$, dans laquelle les données sont le rayon $AM(a)$, les lignes $AK(b)$, $CK(c)$, $CG(m)$, & l'inconnuë $x$ exprime des valeurs de $AP$ telles que menant les perpendiculaires $PM$, elles rencontreront la circonference aux points cherchés.

Pour distinguer entre les deux points ou chaque perpendiculaire $PM$ coupe la circonference du cercle, celui qui sert à la question presente; il faut observer de mener $PM$ du côté où l'on a supposé que tomboit le point $M$ par rapport à la ligne $AP$ en faisant le calcul, lorsque sa valeur $\frac{cx}{x-b}$ qu'on a trouvée ci-dessus est positive, c'est à dire, lorsque $x$ est en même temps vraie & plus grande que $b$, ou bien lorsqu'elle est fausse; & au contraire il la faut mener du côté opposé, lorsque sa valeur est negative, c'est à dire, lorsque $x$ est en même temps vraie & moindre que $b$.

## SECONDE MANIE'RE.

FIG. 257. Ayant mené par le point cherché $M$ que l'on regarde comme donné la droite $MD$ perpendiculaire au rayon $AM$, & par le point $D$ où elle rencontre $AF$ la droite $GH$ parallele à $AM$, laquelle rencontre en $H$ la ligne $MF$, & en $G$ la ligne $EM$ prolongée qui coupe en $C$ la droite $AF$; on aura à cause des triangles semblables $FAM$, $FDH$, cette proportion: $AM . DH :: AF . FD$. Et à cause des triangles semblables $CAM$, $CDG$, cette autre, $AM . DG :: AC . CD$. Or la ligne $DG$ est égale à $DH$, puisque par la condition du Problême les angles $AME$, $AMF$, devant être égaux, les angles $DMH$, $DMG$, le feront aussi. Donc $AF . FD :: AC . CD$, & $AF + FD . AF :: AC + CD$ ou $AD . AC$. Cela posé, soient menées $EB$, $MP$, perpendiculaires sur $AF$, & $MQ$ perpendiculaire sur $EB$: & soient nommées les données $AM$, $a$; $AB$, $b$; $BE$, $c$;

$AF$, $d$; & les inconnuës $AP$, $x$; $PM$, $y$. Les triangles rectangles semblables $APM$, $AMD$, donneront $AP$ ($x$). $AM$ ($a$) :: $AM$ ($a$). $AD = \frac{aa}{x}$. Et partant $FD = d - \frac{aa}{x}$; & les triangles semblables $EQM$, $MPC$, donneront $EQ$ ou $EB - MP$ ($c - y$). $QM$ ou $AP - AB$ ($x - b$) :: $MP$ ($y$). $PC = \frac{xy - by}{c - y}$. Donc $AC$ ou $AP + PC = \frac{cx - by}{c - y}$, & mettant dans la proportion precedente $AF + FD$. $AF$ :: $AD$. $AC$ à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques, on formera (en multipliant les moyens & les extrêmes) cette équation $2cdxx - aacx - 2bdxy + aaby + aady = aadc$, qui se reduit en divisant par $2cd$, & en faisant (pour abreger) $b + d = f$, à cette autre $xx - \frac{b}{c}yx - \frac{aa}{2d}x + \frac{aaf}{2cd}y - \frac{1}{2}aa = o$, dont le lieu qui est une Hyperbole entre ses Asymptotes étant construit selon l'article 339. (Liv. VII.) coupera la circonference du cercle au point cherché $M$.

Si l'on veut avoir une égalité qui ne renferme que l'inconnuë $x$, on se servira de l'équation au cercle $xx + yy = aa$, dans laquelle mettant à la place de $yy$ le quarré de $y$ trouvée par le moyen de l'équation precedente, on arrivera à une égalité du quatriéme degré qui ne renfermera que l'inconnuë $x$, & dont l'une des racines exprimera la valeur de la cherchée $AP$.

## EXEMPLE VIII.

439. UN cercle qui a pour centre le point $A$ étant donné avec deux autres points $E$, $F$; trouver sur la circonference le point $M$ tel qu'ayant mené les droites $AM$, $MF$, $ME$; le sinus droit de l'angle $AMF$ soit au sinus droit de l'angle $AME$, en la raison donnée de $m$ à $n$. FIG. 258.

Je resouds cette question en trois differentes manieres.

## PREMIERE MANIERE.

Ayant pris ſur les droites données $AF$, $AE$, les parties $AB$, $AD$, troiſiémes proportionnelles à $AF$, $AM$, & à $AE$, $AM$; on menera du point cherché $M$ que l'on regarde comme donné les droites $MB$, $MD$, les perpendiculaires $MG$, $MH$, ſur $AF$, $AE$, & les paralleles $MP$, $MQ$, à $AE$, $AF$. Ayant pris ſur $BM$ la partie $BK$ égale à $DM$, on tirera du point $K$ les droites $KO$, $KL$, paralleles à $MG$, $MP$, & du point donné $D$ la perpendiculaire $DC$ ſur $AF$. Cela fait, les triangles ſemblables $BMG$, $BKO$, donnent $BM. BK$ ou $DM :: MG. KO$. Or par la condition du Problême $m. n :: KO. MH$; puiſque prenant $DM$ pour rayon ou ſinus total, les droites $KO$, $MH$, ſeront les ſinus droits des angles $MBF$, $MDE$, ou de leurs complemens à deux droits $MBA$, $MDA$, égaux par la conſtruction aux angles $AMF$, $AME$. Donc en multipliant par ordre les antecedens & les conſequens de ces deux proportions, on aura $m \times BM. n \times MD :: MG \times KO. KO \times MH :: MG. MH :: MP. MQ$. à cauſe des triangles ſemblables $MPG$, $MQH$. Cela poſé.

On nommera les données $AD$, $a$; $AC$, $b$; $CD$, $c$; $AB$, $d$; $AM$, $x$; & les inconnuës $AP$ ou $MQ$, $x$; $PM$ ou $AQ$, $y$; & les triangles ſemblables $ADC$, $PMG$, $QMH$ donneront $PG = \frac{by}{a}$, $MG$ $MG = \frac{cy}{a}$, $QH = \frac{bx}{a}$, $HM = \frac{cx}{a}$, $AG = x + \frac{by}{a}$, $GB$ ou $AB - AG = d - x - \frac{by}{a}$, $DH$ ou $AQ + QH - AD = y + \frac{bx}{a} - a$: & à cauſe des triangles rectangles $BGM$, $DHM$, on aura $\overline{BM}^2$ ou $\overline{BG}^2 + \overline{GM}^2 = xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{bbyy}{aa} - 2dx - \frac{2bd}{a}y + dd + \frac{ccyy}{aa} = xx + \frac{2b}{a}xy + yy - 2dx - \frac{2bd}{a}y + dd$ en mettant pour

$bb+cc$ sa valeur $aa$ à cause du triangle rectangle $ACD$; & de même $\overline{DM}^2 = yy + \frac{2b}{a}xy + xx - 2ay - 2bx + aa$. Or par la proprieté du cercle, le quarré $\overline{AM}^2$ $(rr) = \overline{AG}^2$ $\left(xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{bbyy}{aa} + \overline{GM}^2\right.$ $\left(\frac{ccyy}{aa}\right)$ $= xx + \frac{2b}{a}xy + yy$ en mettant pour $bb+cc$ sa valeur $aa$. Si donc l'on substituë dans les valeurs de $\overline{BM}^2$ & de $\overline{DM}^2$ à la place de $yy + \frac{2b}{a}xy + xx$ cette valeur $rr$, & que pour abreger on fasse $rr+dd=ff$ & $rr+aa=gg$, on trouvera $BM = \sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y}$, & $DM = \sqrt{gg - 2ay - 2bx}$. Substituant enfin ces valeurs à la place de $BM$ & de $DM$ dans la proportion $m \times BM. n \times DM :: MP(y). MQ(x)$ que l'on a trouvée ci-dessus; & multipliant les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $mx\sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y} = ny\sqrt{gg - 2ay - 2bx}$ de laquelle quarrant chaque membre, & faisant évanoüir l'inconnuë $y$ par le moyen de l'équation au cercle $xx + \frac{2b}{a}xy + yy = rr$, on arrivera à une égalité du sixiéme degré qui ne renfermera plus que l'inconnuë $x$, & qui étant resoluë selon les regles du Livre précedent, donnera pour $AP(y)$ une valeur telle que menant $PM$ parallele à $AE$, le point $M$ où cette ligne rencontrera la circonference, sera celui qu'on cherche.

Si l'on suppose que $m=n$, il est évident que les angles $MBF$, $MDE$, seront égaux; & qu'ainsi les angles $ABM$, $ADM$, ou $AMF$, $AME$, le seront aussi. D'où l'on voit que le Problême précedent n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

## SECONDE MANIERE.

Ayant joint les deux points donnés $E$, $F$, par une FIG. 259.

ligne droite, on tirera du centre donné $A$ les droites $AD$, $AP$, l'une perpendiculaire & l'autre parallele à cette ligne, & par le point cherché $M$ que l'on regarde comme donné la parallele $PQ$ à $AD$, on menera aussi du même point $M$, le rayon $AM$ qui rencontre $EF$ en $O$, & les droites $EM$, $FM$, sur lesquelles on abaissera des points $O$, $F$, $E$, les perpendiculaires $OG$, $OH$, & $FC$, $EB$. Cela fait, les triangles semblables $EOG$, $EFC$, & $FEB$, $FOH$, donneront $EO. EF :: OG. FC$. Et $EF. FO :: EB. OH$, & partant $EO \times EF. EF \times FO$ ou $EO. FO :: OG \times BE. CF \times OH$, c'est à dire en raison composée de $OG$ à $OH$, ou de $m$ à $n$ (puisqu'en prenant $MO$ pour le rayon ou sinus total, les droites $OG$, $OH$, sont les sinus droits des angles $EMO$, $FMO$, complemens à deux droits des angles $AME$, $AMF$), & de $BE$ à $CF$ ou de $EM$ à $MF$ à cause des triangles rectangles semblables $BME$, $CMF$. On aura donc $EO. FO :: m \times EM. n \times MF$. Cela posé.

On nommera les données $AD$ ou $PQ$, $a$; $ED$, $b$; $DF$, $c$; $AM$, $r$; & les inconnuës $AP$, $x$; $PM$, $y$; & on aura à cause des triangles semblables $APM$, $ADO$, cette proportion, $MP(y). AP(x) :: AD(a). DO = \frac{ax}{y}$. Et partant $EO = \frac{by + ax}{y}$, $FO = \frac{cy + ax}{y}$. Or les triangles rectangles $EMQ$, $FMQ$, donnent $\overline{EM}^2 = \overline{EQ}^2 (bb + 2bx + xx) + \overline{MQ}^2 (aa - 2ay + yy) = ff + 2bx - 2ay$ (en mettant pour $xx + yy$ sa valeur $rr$ à cause du triangle rectangle $APM$, & faisant pour abreger $aa + bb + rr = ff$) & de même $\overline{FM}^2 = \overline{FQ}^2 (cc - 2cx + xx) + \overline{MQ}^2 (aa - 2ay + yy) = gg - 2cx - 2ay$ en mettant pour $xx + yy$ sa valeur $rr$, & faisant pour abreger $aa + cc + rr = gg$. Si dans la proportion précedente $EO. FO :: m \times EM. n \times MF$, on met à la place de ces lignes les valeurs analytiques que l'on vient de trouver, & qu'on multiplie les extrêmes & les moyens,

on formera cette équation $\overline{bny + anx}\sqrt{gg - 2cx - 2ay} = \overline{mcy - max}\sqrt{ff + 2bx - 2ay}$, de laquelle quarrant chaque membre & faiſant évanoüir l'inconnuë $y$ par le moyen de l'équation au cercle $xx + yy = rr$, on arrivera encore à une égalité du ſixiéme degré, dont la reſolution fournira pour $AP(x)$ une valeur telle que menant la perpendiculaire $PM$, elle ira couper la circonference au point cherché $M$.

C'eſt à peu prés de cette façon que M. Deſcartes reſoud cette queſtion dans la ſoixante-cinquiéme de ſes Lettres Tom. 3. Elle lui avoit été propoſée par M. de Roberval, d'une maniere qui paroît differente de celle-ci, mais qui dans le fond revient à la même choſe.

## TROISIÉME MANIERE.

Soient décrits des diametres $AE$, $AF$, deux cercles $ART$, $AST$, ſur leſquels ſoient portées depuis le point $A$ deux cordes quelconques $AR$, $AS$, qui ſoient toûjours entr'elles en la raiſon donnée de $m$ à $n$; & ſoient tirées les droites $ER$, $FS$, qui s'entrecoupent au point $M$. Je dis que la ligne courbe $AM$, qui eſt le lieu de tous les points $M$ ainſi trouvés, coupera le cercle donné (dont le centre eſt en $A$) au point cherché $M$. FIG. 260.

Car tirant $AM$ & le prenant pour rayon ou ſinus total, il eſt clair que la corde $AR$ eſt le ſinus droit de l'angle $AME$, & la corde $AS$ le ſinus droit de l'angle $AMF$.

Il eſt à propos de remarquer 1°. Que cette conſtruction a cela de particulier, qu'elle ne réüſſit pas ſeulement lorſqu'il s'agit de trouver le point $M$ ſur la circonference d'un cercle dont le centre eſt en $A$, mais encore ſur telle ligne courbe qu'on voudra. 2°. Qu'ayant trouvé deux points de ce lieu de la maniere que l'on vient d'enſeigner, les plus proches que l'on pourra de la ligne courbe donnée, il ſuffit d'en tracer la portion qui joint ces deux points; ce qui rend la pratique de

cette construction fort aisée. 3°. Que le lieu de tous les points $M$ ainsi trouvés est du quatriéme degré, comme il est facile de voir par le calcul de la seconde maniere, en observant de ne point substituer dans les valeurs de $EM$ & $FM$ à la place de $xx+yy$ le quarré $rr$ que l'on trouve par le lieu au cercle ce qui donnera pour l'équation de ce lieu $\overline{nby+nax}\sqrt{\overline{c-x}^2+\overline{a-y}^2}=\overline{mcy-max}\sqrt{\overline{b+x}^2+\overline{a-y}^2}$, dont les inconnuës $x$ & $y$ montent au quatriéme degré, lorsqu'elle est délivrée d'incommensurables. 4°. Que ce n'est pas une faute legere en Geometrie, selon M. Descartes, d'employer une ligne courbe trop composée pour resoudre un Problême ; de sorte que selon lui, on doit préferer à cette derniere solution les deux précedentes, où les deux lieux qu'on a trouvés, & qui détermineroient par leur intersection avec la circonference donnée, le point cherché, ne sont que du troisiéme degré. Il me paroît neanmoins que la facilité d'une construction & sa simplicité peuvent récompenser én quelque sorte ce deffaut, & c'est ce qu'on verra encore dans l'exemple qui suit.

## EXEMPLE IX.

FIG. 261. 440. DIVISER un triangle scalene donné $ABC$ en quatre parties égales, par deux lignes droites $DE$, $FG$, qui s'entrecoupent à angles droits au point $H$.

Si l'on fait attention sur la nature de ce Problême, on verra 1°. Que deux des extremités $D$, $F$, des deux droites $DE$, $FG$, se trouvent necessairement sur l'un des côtés $AC$ du triangle donné $ABC$, & que leurs deux autres extremités $E$, $G$, se trouvent chacune sur chacun des deux autres côtés $BC$, $BA$. 2°. Que les deux points cherchés $D$, $F$, doivent avoir deux conditions, dont la premiere est que les lignes $DE$, $FG$, qui divisent chacune le triangle $ABC$ en deux parties égales, s'entrecoupent à angles droits en un point

$H$ ;

*H*; & la ſeconde qu'elles forment avec les deux autres côtés du triangle donné, un quadrilatere *BGHE* qui ſoit la quatriéme partie du triangle *ABC*. Cela poſé.

Soient menées ſur le côté *AC* les perpendiculaires *GI*, *BK*, *EL*, & ſoient nommées les données *AC*, $2a$; *BK*, $b$; *AK*, $c$; *KC*, $d$; & les inconnuës *AF*, $x$; *CD*, $y$. Puiſque le triangle *AGF*, ou $GI \times \frac{1}{2} AF$ doit être la moitié du triangle *ABC* ($ab$), il s'enſuit que $GI = \frac{ab}{x}$; & par la même raiſon $EL = \frac{ab}{y}$. Or les triangles ſemblables *CBK*, *CEL*, & *ABK*, *AGI*, donnent $BK(b). EL\left(\frac{ab}{y}\right) :: CK(d). CL = \frac{ad}{y}$. Et $BK(b). GI\left(\frac{ab}{x}\right) :: AK(c). AI = \frac{ac}{x}$. Et partant *DL* ou $CD - CL = y - \frac{ad}{y}$, *FI* ou $AF - AI = x - \frac{ac}{x}$. Mais les triangles rectangles *DEL*, *FGI*, ſont ſemblables entr'eux; puiſque chacun d'eux eſt ſemblable au même triangle *FDH*, qui eſt rectangle en *H* ſelon la condition du Problême qui demande que les deux lignes *DE*, *FG*, s'entrecoupent à angles droits. On aura donc $EL\left(\frac{ab}{y}\right). LD\left(\frac{yy-ad}{y}\right) :: FI\left(\frac{xx-ac}{x}\right). IG\left(\frac{ab}{x}\right)$; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, cette équation $xxyy - acyy - adxx + aacd = aabb$, ou $\overline{xx - ac} \times \overline{yy - ad} = aabb$, qui renferme la premiere condition du Problême; de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à accomplir la ſeconde; ſçavoir que le trapeſe *BGHE* ſoit le quart du triangle donné *ABC*.

Pour en venir à bout. Du point d'interſection *H* des deux droites *DE*, *FG*, ſoient menées aux trois angles du triangle *ABC*, les lignes *HA*, *HC*, *HB*; & on aura 1°. $FD(x + y - 2a). AF(x) :: FHD(\frac{1}{4}ab). FHA = \frac{abx}{4x + 4y - 8a}$. Et partant le triangle *AHG* ou le triangle *FGA* moins le triangle $FHA = \frac{1}{2}ab - \frac{abx}{4x + 4y - 8a}$.

2°. $AI\left(\frac{ac}{x}\right).IK\left(\frac{cx-ac}{x}\right)::AG.GB::AHG\left(\frac{abx+2aby-4aab}{4x+4y-8a}\right)$. $GHB=\frac{bxx-5abx+2bxy-2aby+4aab}{4x+4y-8a}$. On trouvera par un raiſonnement ſemblable que le triangle $HEB=$ $=\frac{byy-5aby+2bxy-2abx+4aab}{4x+4y-8a}$. Maintenant ſi l'on ajoûte enſemble les triangles $HGB$, $HEB$, on formera le quadrilatere $HGBE$ qui doit être égal à la quantité $\frac{1}{4}ab$ quatriéme partie du triangle $ABC$: ce qui donne pour la ſeconde équation $xx+yy+4xy-8ax-8ay+10aa=0$.

Si l'on fait évanoüir par le moyen de ces deux équations l'inconnuë $y$, on arrivera à une égalité du huitiéme degré qui renfermera toutes les conditions du Problême, & dans laquelle il n'y aura plus qu'une ſeule inconnuë $x$; de ſorte que toute la difficulté eſt reduite à trouver les racines de cette égalité. Et c'eſt ce qu'on peut faire par le moyen de deux lieux du troiſiéme degré, comme l'on a enſeigné dans les articles 417, & 418 (Liv. préced.) Mais comme la conſtruction de ces lieux devient fort embarraſſée & d'une longueur inſuportable dans la pratique, à cauſe de la multitude des termes de leurs équations, il eſt beaucoup plus naturel de conſtruire ſéparément les lieux des deux équations que l'on vient de former, quoique l'un d'eux ſoit du quatriéme degré & par conſequent plus composé, car l'autre n'étant que du ſecond récompenſe ce deffaut, & d'ailleurs la facilité de la conſtruction doit déterminer en ſa faveur : voici comment elle ſe fait.

FIG. 262. Ayant mené deux lignes droites indéfinies $AB$, $AC$, qui font entr'elles un angle droit $BAC$; on prolongera $BA$ en $E$, en ſorte que $AE=\sqrt{ac}$, & $CA$ en $F$, en ſorte que $AF=\sqrt{ad}$. Ayant pris ſur $AC$ une partie quelconque $AP$, on décrira du centre $E$ de l'intervalle $AP$ un arc de cercle qui coupe $AC$ en $G$; & ayant pris $AH$, en ſorte que le rectangle $HA\times AG$ ſoit égal au triangle donné $BAC$, on prendra ſur $AB$ la partie

$AQ = FH$. On menera ensuite les droites $PM$, $QM$, paralleles à $AB$, $AC$, lesquelles s'entrecoupent en un point $M$ ; & ayant trouvé en la même sorte une infinité d'autres points tels que $M$, on fera passer par tous ces points une ligne courbe $KML$. Cela fait, on prendra sur la diagonale $AD$ du quarré $ABDC$, qui a pour côté la ligne $AC$ égal au côté $AC$ du triangle donné $ABC$, les parties $AT = \frac{1}{3} AD$, & $DS = \frac{1}{6} AD$ ; & on décrira du premier axe $TS$ qui soit à son parametre comme 1 est à 3, une Hyperbole $OSR$. Je dis à présent que si l'on mene du point $M$ où je suppose qu'elle rencontre la ligne courbe $KML$ au dedans du quarré $ABDC$, la perpendiculaire $MP$ sur $AC$, & qu'on prenne sur le côté $AC$ du triangle $ABC$, les parties $AF = AP$, & $CD = PM$ ; les points $F$, $D$, seront tels qu'ayant mené (ce qui est facile) les deux droites $FG$, $DE$, qui divise chacune le triangle $ABC$ en deux parties égales ; elles s'entrecouperont à angles droits, & le partageront en quatre parties égales.

Car nommant $AP$, $x$ ; $PM$, $y$ ; on aura à cause des triangles $EAG$, $FAH$, rectangles en $A$, le quarré $\overline{AG}^2 = \overline{EG}^2 (xx) - \overline{AE}^2 (ac)$, & le quarré $\overline{AH}^2 = \overline{FH}^2 (yy) - \overline{AF}^2 (ad)$. Or puisque par la construction le rectangle $HA \times AG$ est égal au triangle donné $BAC (ab)$, il s'ensuit que $\overline{HA}^2 \times \overline{AG}^2 (\overline{yy - ad} \times \overline{xx - ac}) = aabb$. La ligne courbe $KML$ sera donc le lieu de cette équation qui est la premiere des deux que l'on vient de trouver ; & par consequent sa proprieté sera telle que si l'on mene d'un de ses points quelconques $M$ pris au dedans du quarré $ABDC$, une perpendiculaire $MP$ sur $AC$, & qu'on prenne sur le côté $AC$ du triangle donné $ABC$, les parties $AF = AP$, & $CD = PM$ ; les droites $FG$, $DE$ qui divise chacune par le milieu le triangle $ABC$, s'entrecouperont à angles droits au point $H$.

De plus si d'un point quelconque $M$ de l'Hyperbole $OSR$, on mene la perpendiculaire $MV$ sur son premier

axe $TS$, & qu'on prolonge $PM$ jusqu'à ce qu'elle rencontre la diagonale $AD$ au point $X$; les triangles rectangles & isoscelles $APX$, $MVX$, donneront $1. \sqrt{2} ::$ $AP$ ou $PX (x)$. $AX = x\sqrt{2}$, & $\sqrt{2}. 1 :: MX (x-y)$. $MV$ ou $VX = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$; & partant $AV$ ou $AX - XV$ $= \frac{x+y}{\sqrt{2}}$. Or par la construction $AD = 2a\sqrt{2}$ puisque $AC = 2a$, & par consequent $TS$ ou $DT - DS = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$. On aura donc $TV$ ou $AV - AT = \frac{x+y-2a}{\sqrt{2}}$, & $VS$ ou $TV - TS = \frac{3x+3y-10a}{3\sqrt{2}}$, & par la proprieté de l'Hyperbole $TV \times VS \left(\frac{3xx+6xy+3yy-16ax-16ay+20aa}{6}\right)$. $\overline{MV}^2$ $\left(\frac{xx-2yx+yy}{2}\right) :: 1. 3$, c'est à dire, comme le premier axe $TS$ est à son parametre: ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $xx + yy + 4xyy$ $- 8ax - 8ay + 10aa = 0$. L'Hyperbole $OSR$ en sera donc le lieu, & joüira par consequent de cette proprieté; sçavoir que si l'on mene d'un de ses points quelconques $M$ pris au dedans du quarré $ABDC$, une perpendiculaire $MP$ sur $AC$, & qu'on prenne sur le côté $AC$ du triangle donné $ABC$, les parties $AF = AP$, & $CD = PM$; les droites $FG$, $DE$, qui divise chacune par le milieu le triangle $ABC$, le couperont en quatre parties égales.

Maintenant puisque le point $M$ se trouve en même temps sur la ligne courbe $KML$, & sur l'Hyperbole $OSR$; il s'ensuit que les points $D$, $F$, pris sur le côté $AC$ du triangle donné, auront aussi en même temps les deux conditions requises. Et c'est ce qui étoit proposé.

S'il arrivoit que les deux courbes $OSR$, $KML$, ne se rencontrassent point au dedans du quarré $ABDC$, ce seroit une marque infaillible qu'on auroit fait une supposition fausse, sçavoir que les deux extremités $D$, $F$, se rencontrent sur le côté $AC$. C'est pourquoi il fau-

droit les suppoſer sur l'un des deux autres côtés, & recommencer le calcul, en faiſant des raiſonnemens ſemblables aux précedens, pour avoir une conſtruction par rapport à ce nouveau côté. Mais ſi l'on fait les trois remarques ſuivantes, il ſera aiſé de prévoir lequel des trois côtés on doit prendre pour celui ſur lequel tombent les deux extremités $D, F$, afin d'avoir ſûrement une ſolution, & de n'être pas obligé de recommencer.

La premiere eſt que $\overline{CL}^2 = \frac{aabb}{4aa-ac} + ad$, & $\overline{BK}^2 = \frac{aabb}{4aa-ad} + ac$; ce qui ſe voit en mettant dans $yy = \frac{aabb}{xx-ac} + ad$ à la place de $AP(x)$ ſa valeur $AC(2a)$, & dans $xx = \frac{aabb}{yy-ad} + ac$ à la place de $AQ(y)$ ſa valeur $AB(2a)$. La ſeconde conſiſte en ce que $CR = \sqrt{2aa} = BO$; ce qui ſe trouve en mettant dans l'autre équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$ dont le lieu eſt l'Hyperbole $OSR$, d'abord à la place de $AP(x)$ ſa valeur $AC(2a)$, & enſuite à la place de $AQ(y)$ ſa valeur $AB(2a)$. La troiſiéme ſe tire de ce qu'en ſuppoſant $AK(c)$ moindre que $CK(d)$ comme on le fait ici, il s'enſuit que $\overline{BK}^2 \left(\frac{aabb}{4aa-ad} + ac\right)$ eſt moindre que $\overline{CL}^2 \left(\frac{aabb}{4aa-ac} + ad\right)$. Or cela poſé, ſi l'on veut que $\overline{BK}^2 \left(\frac{aabb}{4aa-ad} + ac\right)$ ſoit moindre que $\overline{BO}^2$ $(2aa)$, on trouvera en mettant pour $d$ ſa valeur $2a - c$ & operant à l'ordinaire que $bb + cc$ doit être moindre que $4aa$, c'eſt à dire, que le côté $AB$ du triangle donné $ABC$ doit être moindre que le côté $AC$: & ſi l'on veut que le quarré $\overline{CL}^2 \left(\frac{aabb}{4aa-ac} + ad\right)$ ſoit plus grand que $\overline{CK}^2 (2aa)$, on trouvera en mettant pour $c$ ſa valeur $2a - d$ & operant à l'ordinaire que le côté $BC$ $(\sqrt{bb + dd})$ doit ſurpaſſer le côté $AC(2a)$. Mais il eſt viſible que $BK$ étant moindre que $BO$ & $CL$ plus grande que $CK$, les deux lignes courbes $KML$, $OMR$,

se coupent necessairement au dedans du quarré *ABDC*. D'où il suit que si le triangle donné *ABC* a tous les angles aigus, & qu'on prenne pour le côté *AC* sur lequel on suppose que les deux points *F*, *D*, se rencontrent, celui des trois dont la grandeur est moyenne entre les deux autres & pour le côté *AB* le plus petit, le Problême aura toûjours necessairement une solution, puisqu'alors (*fig.* 261.) le point *K* se trouvera entre les points *A*, *C*, & que *AK* est moindre que *AC*, comme l'on a supposé en faisant le calcul sur lequel tout ce raisonnement est fondé. On trouvera en la même sorte que si le triangle donné est rectangle ou obtus-angle, & qu'on prenne pour le côté *AC* sur lequel doivent tomber les deux extrêmités *D*, *F*, le côté moyen, on aura toûjours une solution; de sorte que cette remarque est generale pour toutes sortes de triangles.

On voit dans la figure 262. que l'Hyperbole *OSR* & la courbe *KML* se coupent non seulement dans un point *M*, au dedans du quarré *ABDC*, comme le demande le Problême; mais encore en un autre point *M* au dehors de ce quarré. Or si l'on veut sçavoir quelle peut être l'utilité de cet autre point, on trouvera qu'il donne une des resolutions du Problême suivant, dont celui-ci n'est qu'un cas particulier.

FIG. 263. Trouver sur le côté *AC* du triangle donné *ABC*, deux points *F*, *D*, tels qu'ayant mené les droites *FG*, *DE*, qui font avec les deux autres côtés *AB*, *BC*, les triangles *FGA*, *DEC*, égaux chacun à la moitié du triangle *ABC*: les lignes *FG*, *DE*, s'entrecoupent à angles droits au point *H*, & le quadrilatere *BGHE* soit égal au quart du triangle *ABC*.

FIG. 263. & 262. Car lorsque le point d'interfection *M* tombe au dedans du quarré *ABDC*, il est clair que les lignes *AP*, *PM* seront chacune moindre que le côté *AC*, & qu'ainsi les points *F*, *D*, qu'elles déterminent tomberont tous deux entre les points *A*, *C*; ce qui resoud le Problême énoncé comme l'on a fait au commencement. Mais

lorsque le point $M$ tombe au dehors du quarré, comme alors l'une des lignes $AP$, $PM$ est moindre que son côté $AC$, & l'autre plus grande; il s'ensuit que l'un des points $F$, $D$, tombe sur le côté $AC$ du triangle donné, & l'autre sur ce même côté prolongé; ce qui donne une autre solution du Problême énoncé comme l'on vient de faire en dernier lieu. FIG. 23. & 24.

## EXEMPLE X.

441. UNE Section conique $MAN$ étant donnée, avec un point $S$ hors de son plan pour le sommet du cone dont elle est la Section; on demande la position du cercle $MaN$ qui en est la base.

Je distingue cette question en deux differens cas, dont le premier est lorsque la Section donnée est une Parabole, & le second lorsque c'est une Ellipse ou une Hyperbole.

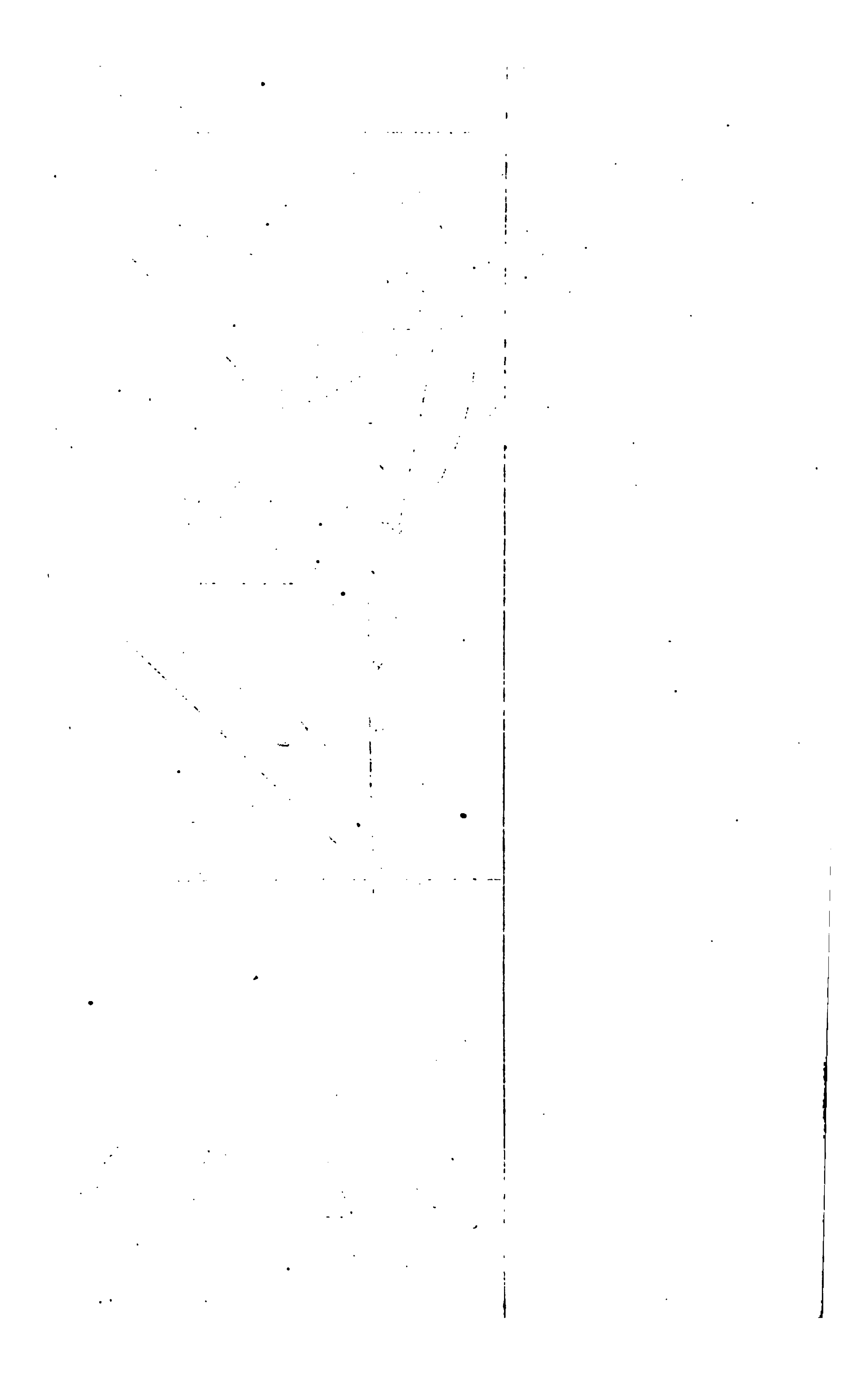
*Premier cas.* La question se reduit à trouver sur la Parabole, le point $A$ tel qu'ayant mené de ce point le diametre $AP$ avec la ligne $AS$; du point $S$ la ligne $SD$ parallele à $AP$; & d'un point quelconque $P$ du diametre $AP$, une ordonnée $PM$ à ce diametre dans le plan de la Parabole, & une perpendiculaire $aD$ à cette ordonnée dans le plan du triangle $DSA$, qui rencontre les côtés $SA$, $SD$, aux points $a$, $D$: le quarré de $PM$ soit égal au rectangle $aP \times PD$. Car décrivant dans le plan $aPM$ un cercle qui ait pour diametre $aD$, il est clair qu'il passera par le point $M$, puisque l'angle $APM$ est droit, & que $\overline{PM}^2 = aP \times PD$, qui est la proprieté essentielle du cercle; c'est pourquoi menant le diametre $PA$, & tirant de l'extremité $D$, du diametre $Da$ du cercle une parallele $DS$ à $PA$, qui rencontre $aA$ menée de son autre extremité $a$ par l'origine $A$ du diametre $AP$, en un point $S$, le cone qui a pour sommet ce point, & pour base le cercle $MAN$, formera * par sa rencontre avec le plan $APM$ la Parabole même FIG. 264. *Art. 269.

donnée *MAN*. Voici comment on peut trouver le point *A*.

Soit $v$ le parametre inconnu du diametre *AP*, & l'on aura par la proprieté de la Parabole, $\overline{PM}^2 = AP \times v$: mais pour satisfaire au Problême, il faut que $\overline{PM}^2 = aP \times PD$. Donc $aP \times PD = AP \times v$; ce qui donne cette proportion $AP . Pa :: PD . v$, qui se change en menant *AO* parallele à *Da* en cette autre $SO . AO :: PD$ ou $AO . v$, & partant $SO \times v = \overline{AO}^2$.

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques de ces lignes, je mene du point donné *S* sur le plan de la Parabole la perpendiculaire *SF*, & du point *F* où elle rencontre ce plan, sur l'axe *BG* la perpendiculaire *FG*, qui rencontre le diametre *AP* en *H*. Je tire du point *A* l'ordonnée *AK* à l'axe, & la perpendiculaire *AQ* à la tangente *AL*, lesquelles rencontrent en *E* & *Q* la ligne *FQ* menée par le point *F* parallelement à l'axe. J'éleve enfin du point *Q* une perpendiculaire *QO* sur le plan de la Parabole, qui rencontrera *SD* dans le même point *O*, où la ligne *AO* parallele à *aD* la rencontre. Car la tangente *AL* étant parallele à l'ordonnée *PM* qui est perpendiculaire sur *aD*, l'angle *LAO* sera droit aussi-bien que l'angle *LAQ*, & ainsi le plan *QAO* sera perpendiculaire sur *AL*, & sur le plan de la Parabole qui passe par cette ligne; c'est pourquoi la ligne *QO* perpendiculaire à ce plan se trouvera dans le plan *QAO*, & rencontrera par consequent la ligne *SD* dans le même point *O*, où le plan *QAO*, c'est à dire, la ligne *AO* parallele à *aD* la rencontre. Il est à remarquer que toutes ces lignes excepté les deux *FS*, *QO*, sont dans le plan de la Parabole. Cela posé.

Je nomme les données *SF* ou *QO*, $a$; *FG*, ou *KB*, $b$; *GB*, $c$; le parametre de l'axe, $p$; & les inconnuës *BK*, $x$; *KA* ou *GH*, $y$; & j'ai à cause des triangles semblables *AKT*, *AEQ*, cette proportion $AK (y) . KT (\frac{1}{2}p) :: AE (b+y) . EQ = \frac{bp}{2y} + \frac{1}{2}p$: ce qui donne à cause



cause des triangles $AEQ$, $AQO$, rectangles en $E$ & $Q$, le quarré $\overline{AO}^2$ ou $\overline{AE}^2 + \overline{EQ}^2 + \overline{QO}^2 = \frac{bbpp}{4yy} + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{4}pp + bb + 2by + yy + aa$. Or le parametre du diametre $AP$ sçavoir $v =^{*} p + 4x = p + \frac{4yy}{p}$, en mettant pour $x$ sa valeur $\frac{yy}{p}$; & $SO$ ou $FQ$ ou $GB + BK + EQ = c + x + \frac{bp}{2y} + \frac{1}{4}p = c + \frac{yy}{p} + \frac{bp}{2y} + \frac{1}{2}p$. * Art. 17.

Mettant donc ces valeurs analytiques à la place des lignes qu'elles expriment dans l'égalité $\overline{AO}^2 = SO \times v$, on trouvera $\frac{bbpp}{4yy} + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{4}pp + bb + 2by + yy + aa$ $= cp + yy + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{2}pp + \frac{4cyy}{p} + \frac{4y^4}{pp} + 2by + 2yy$, c'est à dire en effaçant de part & d'autre les quantités qui se trouvent les mêmes, substituant pour $yy$ la valeur $px$, & operant ensuite à l'ordinaire,

$$\begin{array}{llll} x^3 + cxx & + \frac{1}{4}cpx & - \frac{1}{16}bbp = 0 \\ \quad + \frac{1}{2}p & - \frac{1}{4}aa & \\ & - \frac{1}{4}bb & \\ & + \frac{1}{16}pp & \end{array}$$

dont la vraie racine que l'on peut trouver par le moyen* de la Parabole même donnée, exprimera la valeur de l'inconnuë $BK$, qui sert à determiner le point $A$ tel qu'on le demande. * Art. 387.

*Second cas.* Toute la difficulté consiste à trouver sur l'Hyperbole donnée $MAN$, le point $A$ tel qu'ayant mené le diametre $AB$ avec les lignes $SAa$, $BSb$; & par un de ses points quelconques $P$, du diametre $AB$ une ordonnée $PM$ dans le plan de l'Hyperbole, & une perpendiculaire $ab$ à cette ordonnée dans le plan du triangle $aSb$: on ait le quarré $\overline{PM}^2$ égal au rectangle $aP \times Pb$. Cela se prouve de même que dans la Parabole, & voici ce qu'il faut faire pour trouver le point $A$. FIG. 265.

Soit $v$ le diametre conjugué au diametre $AB$, & soient menées dans le plan du triangle $aSb$, les lignes $AO$ parallele à $ab$, & $OZ$ parallele à $AB$ qui rencon-

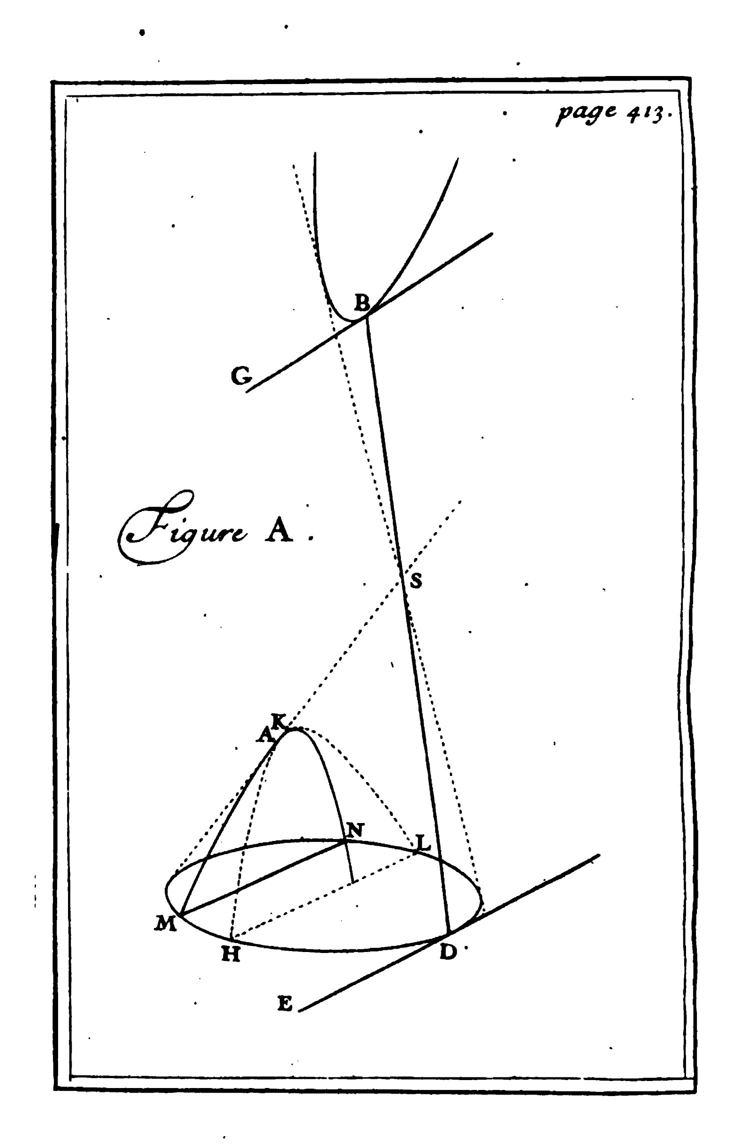
ger $dd + ff = mm$, $bb + cc = nn$, $aa + dd + cc = rr$, en cette autre $bbm^4x^4 - mmnnd^4xx + ccmmd^6 = \overline{mmxx - ddrr} \times \frac{m^4}{dd} \overline{x^4 - m^4 xx}$ qui se reduit enfin en faisant $xx = dz$ à cette égalité du troisiéme degré

$$z^3 \left.\begin{matrix} -d \\ -\frac{drr}{mm} \\ -\frac{dbb}{mm} \end{matrix}\right\} zz \left.\begin{matrix} +\frac{ddrr}{mm} \\ +\frac{nnd^4}{m^4} \end{matrix}\right\} z - \frac{ccd^5}{m^4} = 0;$$

dont l'une des racines ; sçavoir celle qui est plus grande que $d$, est telle que prenant une moyenne proportionnelle entre cette racine & $d$ moitié du premier axe ; cette moyenne proportionnelle exprime la valeur de $CK$ qui sert à déterminer le point cherché $A$. On pourra se servir de l'Hyperbole même donnée pour trouver les racines de cette égalité, par le moyen des articles 396, & 399. du Livre précedent.

Lorsque $CG\,(c) = o$, c'est à dire, lorsque le point $F$ tombe sur le second axe ; il est visible que cette égalité se change en une autre du second degré, puisque le dernier terme étant nul, elle se divise par $z$. Mais lorsque $FG\,(b) = o$, ce qui arrive lorsque le point $F$ tombe sur le premier axe ; le terme $\frac{dbbzz}{mm}$ s'efface dans l'égalité précedente, & un qui est $bb + cc$ devient $cc$ ; ce qui fait qu'elle se peut diviser par $z - d$, & qu'elle se reduit par consequent à celle-ci $zz - \frac{drr}{mm} z + \frac{ccd^4}{m^4} = o$, qui n'est encore que du second degré. Enfin si l'on fait dans cette derniere égalité $c = o$ ; ce qui doit arriver lorsque le point $F$ tombe sur le centre $C$, puisqu'alors les lignes $b$ & $c$ deviennent chacune nulles ; on aura $z = \frac{drr}{mm}$, & partant $dz$ ou $xx = \frac{ddrr}{mm}$, & $x = \frac{dr}{m} = d\sqrt{\frac{aa+dd}{dd+ff}}$.

Il est inutile d'avertir que le Problême se resoud par


page 413.
B
G
Figure A.
S
A
K
N
L
M
H
D
E


UNIV. OF MICH.

la même voie dans l'Ellipse, n'y ayant de changement que dans quelques signes. Mais on peut toûjours rapporter, si l'on veut, ce second cas au premier, de la maniere qui suit.

Ayant mené par un point quelconque *B* de l'une des Hyperboles données, une tangente *BG*; & ayant fait passer par cette tangente, & par le sommet donné *S*, un plan *GBS*: soit mené par tout où l'on voudra, un autre plan *HKL* parallele à celui-ci. Je dis qu'il formera dans la surface conique, décrite par une ligne droite indéfinie attachée en *S*, & mûë autour de l'Hyperbole opposée *MAN*, une ligne courbe *HKL* qui sera une Parabole; de sorte que toute la difficulté est reduite au cas précedent. Car supposant que le cercle *DHMNL* soit la base du cone, qui a pour sommet le point *S*, & pour Section l'Hyperbole *MAN* avec son opposée; il est clair que le plan *GBS* touchant les deux surfaces coniques opposées qui ont pour base ce cercle, dans le côté *BSD*, formera dans le plan de la base, une ligne droite *DE* qui touchera cette base en un point *D*. Or comme cette ligne est la directrice par rapport à la Section *HKL*, il s'ensuit selon la définition dixiéme du Livre VI. que cette Section sera une Parabole. FIG. A.

Ce Problême a été trés-celebre du temps de M. Descartes, & l'on en a trouvé une solution parmi ses Manuscrits, qui est imprimée à la fin de la 75e Lettre du 3e tome. Si l'on veut se donner la peine de comparer sa solution avec la mienne, on verra que non seulement elle est moins naturelle puisqu'elle ne va pas droit au but, mais encore qu'elle est beaucoup plus embarrassée. Aussi ne donne-t'il point l'analyse du cas où la Section est une Ellipse ou une Hyperbole; & il se contente d'assurer que l'égalité qui renferme les conditions du Problême, ne doit pas passer le quatriéme degré.

## LEMME I.

FIG. 266. 267. 268. 442. *Si par l'extremité* B *d'un diametre* AB, *l'on mene une corde quelconque* BD *qui termine l'arc* AD *moindre que la demie circonference ; & qu'ayant pris par tout où l'on voudra deux arcs contigus* EF, FG, *égaux chacun à l'arc* AD, *on tire les cordes* BE, BF, BG: *je dis que la corde du milieu* BF *est à la somme ou à la difference de ses deux voisines* BE, BG, *comme le rayon* CB *est à la corde* BD: *sçavoir à la somme lorsque l'origine commune* B *des cordes* BD, BE, BF, BG, *ne tombe sur pas un des deux arcs* EF, FG ; *& au contraire à la difference, lorsqu'il tombe sur l'un ou l'autre de ces deux arcs.*

Car soit du centre *F*, & du rayon *FB*, décrit un arc de cercle qui coupe la corde *BG* prolongée, s'il est necessaire, au point *H*, pour avoir une triangle isoscelle *BFH*, qui sera semblable au triangle isoscelle *DCB* ; puisque l'angle *FBH* a pour mesure la moitié de l'arc *FG* égal à l'arc *AD*, dont la moitié est aussi la mesure de l'angle *CBD*. On aura donc *FB. BH* :: *CB. BD*, de sorte qu'il ne reste qu'à démontrer que la ligne *BH* est la somme des deux cordes *BE*, *BG*, dans le premier cas, & leur difference dans le second. Pour le faire.

FIG. 266. Soient tirées les cordes *BF*, *FG*, & on aura deux triangles *BEF*, *FHG*, qui seront semblables & égaux. Car dans le premier cas l'angle *FHB* ou *FHG*, est égal à l'angle *FBH* qui vaut l'angle *FBE*, puisque les arcs *FG*, *FE*, sont égaux ; & de plus l'angle *BEF* est égal à l'angle *FGH*, puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié du même arc *BF* ; & partant l'angle *GFH* est égal à l'angle *EFB*. Or les côtés *FE*, *FG*, & *FB*, *FH*, sont égaux entr'eux. Le côté *GH* sera donc égal au côté *BE*. Donc &c.

FIG. 267. 268. On prouvera à peu prés de même dans le second cas que les triangles *FHG*, *FBE*, sont semblables & égaux ; & qu'ainsi la ligne *BH* est la difference des deux cordes *BG*, *BE*.

## LEMME II.

443. SOIT *une Table dont le premier rang parallele renfermant le nombre* 2, *& le second la lettre* x; *le troisiéme* $xx - 2$ *soit le produit du second par* x, *moins le premier, le quatriéme* $x^3 - 3x$ *soit le produit du troisiéme par* x, *moins le second, le cinquiéme* $x^4 - 4xx + 2$ *soit le produit du quatriéme par* x *moins, le troisiéme, & ainsi de suite à l'infini. Soit de plus un arc de cercle quelconque* AR *divisé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points* D, E, F, G, &c. FIG. 269. *Je dis que si le premier rang* 2 *de la Table exprime la valeur* 270. *du diametre* BA, *& le second rang* x *celle de la premiere corde* BD; *le troisiéme rang* $xx - 2$ *exprimera la valeur de la seconde corde* BE, *le quatriéme rang* $x^3 - 3x$ *celle de la troisiéme corde* BF, *& ainsi de suite jusqu'à la derniere* BR; *en observant que ces cordes deviennent negatives, lorsqu'elles passent de l'autre côté du point* B.

*Table pour la division des arcs de cercle en parties égales.*

| | |
|---|---|
| 1er | $2$ |
| 2e | $1x$ |
| 3e | $1xx - 2$ |
| 4e | $1x^3 - 3x$ |
| 5e | $1x^4 - 4xx + 2$ |
| 6e | $1x^5 - 5x^3 + 5x$ |
| 7e | $1x^6 - 6x^4 + 9xx - 2$ |
| 8e | $1x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$ |
| 9e | $1x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + 2$ |
| 10e | $1x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x$ |
| 11e | $1x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25xx - 2$ |
| 12e | $1x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x$ |
| 13e | $1x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x + 105x^4 - 36xx + 2$ |
| 14e | $1x^{13} - 13x^{11} + 65x^9 - 156x^7 + 182x^5 - 91x^3 + 13x$ |

Car 1°. Lorsque l'arc *AR* est moindre que la demie FIG. 269. circonference *ADB*; si l'on multiplie une corde quelconque *BF* par *x*; & qu'on retranche de ce produit la corde *BE* qui la precede, on aura la corde *BG* qui la suit immediatement, puisque selon le Lemme préce-

dent $CB(1). BD(x) :: BF. BE + BG = xBF$, & partant $BG = xBF - BE$. Donc &c.

FIG. 279. 2°. Lorſque l'arc $AR$ eſt plus grand que la demie circonference $ADB$; il eſt viſible que l'origine commune $B$ de toutes les cordes ſe trouvera neceſſairement ſur l'une des parties égales comme $GH$, dans leſquelles l'arc $AR$ eſt diviſé. Or l'on prouvera comme dans le premier cas que le troiſiéme rang de la Table exprime la valeur de $BE$, le quatriéme celle de $BF$, & ainſi de ſuite juſqu'à $BG$: mais il reſte à démontrer que le rang qui ſuit celui qui exprime la corde $BG$, n'exprimera point la valeur de $+BH$, mais celle de $-BH$; & de même que le rang qui ſuit ce dernier exprime la valeur de $-BI$, & ainſi de ſuite juſqu'à $-BR$.

Selon la formation de la Table, le rang qui ſuit celui qui exprime $BG$ eſt $xBG - BF$. Or par le Lemme $CB(1). BD(x) :: BG. BF - BH$, & partant $-BH = xBG - BF$; c'eſt à dire que $-BH$ vaut le rang parallele de la Table qui ſuit immediatement celui qui exprime la valeur de $BG$. Mais ſelon la formation de la même Table, le rang qui ſuit celui qui vaut $-BH$ eſt $-xBH - BG$ valeur de $BI$, puiſque ſelon le Lemme $xBH = BI - BG$: & de même le rang qui ſuit celui qui vaut $-BI$ eſt ſelon la formation de cette même Table $-xBI + BH$ valeur de la corde negative $-BL$, puiſque ſelon le Lemme $xBI = BL + BH$. Or il eſt viſible qu'il en eſt de même de toutes les cordes qui ſuivent $BL$ juſqu'à $BR$; & c'eſt ce qui reſtoit à démontrer.

## COROLLAIRE I.

FIG. 269. 270. 444. De là il eſt évident que ſi l'arc $AR$ eſt diviſé en cinq parties égales, le ſixiéme rang de Table $x^5 - 5x^3 + 5x$ exprimera la valeur de la corde $BR$ qui ſoutend l'arc $BR$ difference de l'arc $AR$ & de la demie circonference $ADB$; que s'il étoit diviſé en ſept parties égales, le huitiéme rang ſeroit la valeur de $BR$;

&

& en general qu'il faut augmenter d'une unité le nombre des parties égales, afin d'avoir le rang de la Table qui vaut *BR*: en observant que le rayon $CB=1$, que la premiere corde $BD=x$, & que la derniere corde *BR* est negative lorsque l'arc *AR* est plus grand que la demie circonference.

## COROLLAIRE II.

445. On voit par la composition de cette Table, 1°. Que le nombre 2 est le premier terme de chaque rang perpendiculaire. 3°. Que les coeficiens de tous les autres termes du premier rang perpendiculaire sont égaux à l'unité. 3°. Que le coeficient d'un terme quelconque de tel rang perpendiculaire qu'on voudra, est toûjours égal au coeficient d'un pareil terme dans le rang perpendiculaire à gauche, plus au coeficient du terme qui est au dessus de lui: c'est à dire, par exemple, que le coeficient 14. du quatriéme terme $14x^3$ du troisiéme rang perpendiculaire, est égal au coeficient 5 du quatriéme terme $5x^3$ du deuxiéme rang perpendiculaire qui est le rang à gauche, plus au coeficient 9 du terme $9xx$ qui est au dessus du terme $14x^3$.

## REMARQUE.

446. Si l'on continuoit à diviser la circonference en parties égales aux arcs *AD*, *DE*, &c. au de là du point *R*; il est clair que les rangs paralleles de la Table qui suivent celui qui exprime $-BR$ continuëroient à exprimer par ordre toutes les cordes négatives qui suivroient *BR*, jusqu'à ce que repassant le point *B* elles redeviendroient encore negatives; & ainsi de suite alternativement positives & negatives, autant de fois qu'elles passeroient le point *B* jusqu'à l'infini. FIG. 270.

EXEMPLE I.

447. COUPER un arc de cercle donné *AR*, en autant de parties égales *AD*, *DE*, *EF*, *FG*, &c. qu'on voudra.

FIG. 269. 270. Ayant mené le diametre *AB* & la corde *BR*, & nommé le rayon donné *CA* ou *CB*, *1*; la corde donnée *BR*, *a*; on formera une égalité dont le premier membre sera le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des parties égales, & le second sera $\mp a$; sçavoir $-+a$ lorsque l'arc *AR* est moindre que la demie circonference, & $-a$ lorsqu'il est plus grand. Or il est visible selon l'article 443. que la resolution de cette égalité doit fournir pour l'une de ses racines $x$, une valeur *BD* telle qu'ayant décrit du point *B* comme centre & de l'intervalle *BD* un arc de cercle, il coupera sur l'arc donné *AR* la premiere des parties égales cherchées *AD*.

Qu'il faille, par exemple, diviser l'arc donné *AR* en trois parties égales; on trouvera $x^3 - 3x = \mp a$, dont l'une des racines *BD* terminera la premiere des trois parties égales qu'on demande. S'il falloit diviser l'arc *AR* en cinq parties égales, on auroit $x^5 - 5x^3 + 5x = \mp a$; & de même, s'il falloit diviser en sept, il viendroit $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x = \mp a$: de sorte que toute la difficulté se reduit à trouver les racines de ces égalités. Or c'est ce qu'on a enseigné dans le Livre precedent. Donc &c.

Il est à remarquer que ces égalités sont les plus simples qu'il est possible, lorsque le nombre des parties égales est un nombre premier. Mais lorsqu'il est composé de deux ou plusieurs nombres premiers, on divisera d'abord l'arc donné en autant de parties égales que l'un de ces nombres a d'unités, & ensuite la premiere de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres restans a d'unités, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les nombres premiers, dont le produit for-

me le nombre donné ; ce qui donnera enfin la premiere des parties égales qu'on cherche : si l'on veut, par exemple, diviser l'arc *AR* en trente parties égales, il faudra d'abord le diviser en cinq, ensuite la premiere de ces cinq parties en trois, & enfin la premiere de ces trois en deux, pour avoir la trentiéme partie qu'on demande, & cela parce que $30 = 5 \times 3 \times 2$.

## REMARQUE I.

448. DEUX points donnés *A*, *R*, sur la circonference d'un cercle en déterminent non seulement deux arcs, dont l'un *AR* est moindre que la demie circonference, & l'autre *ABR* plus grand ; mais encore une infinité de portions, dont les unes sont la circonference entiere plus l'arc *AR*, deux fois la circonference plus l'arc *AR*, trois fois la circonference plus l'arc *AR* &c. & les autres sont la circonference entiere plus l'arc *ABR*, deux fois la circonference plus l'arc *ABR*, trois fois la circonference plus l'arc *ABR* &c ; dont la raison est que la circonference d'un cercle rentrant en elle-même, on peut considerer cette ligne courbe comme faisant une infinité de revolutions autour d'elle-même, Si donc l'on nomme l'arc *AR*, $d$ ; la circonference entiere $c$ ; l'arc *ABR* sera $c - d$ & l'on aura ces deux suites, FIG. 270. 271. 272. &c.

1°. $d,\ c+d,\ 2c+d,\ 3c+d,\ 4c+d,\ 5c+d,\ 6c+d,\ 7c+d,\ 8c+d$, &c.

2°. $c-d,\ 2c-d,\ 3c-d,\ 4c-d,\ 5c-d,\ 6c-d,\ 7c-d,\ 8c-d$, &c.

qui expriment par ordre toutes les portions de circonferences terminées par les deux points *A*, *R*. Cela posé.

Si l'arc *AD* est une aliquote quelconque de l'arc *AR* moindre que la demie circonference ; & qu'ayant inscrit dans le cercle un poligone *DEFGH* &c. d'un pareil nombre de côtés à commencer par le point *D*, on tire de l'extremité *B* du diametre *AB* aux angles du poligone les cordes *BD*, *BF*, *BG*, *BH*. &c :

je dis qu'elles terminent des aliquotes pareilles de tous les termes de ces deux suites, dont l'origine fixe est toûjours au point $A$.

FIG. 271. Car. soit pour fixer les idées l'arc $AD = \frac{1}{5}d$; il est clair que l'arc $ADE = \frac{c+d}{5}$, l'arc $ADEF = \frac{2c+d}{5}$, l'arc $ADEFG = \frac{3c+d}{5}$ l'arc $ADEFGH$ $\frac{4c+d}{5}$ qui sont les cinquiémes parties ou les aliquotes pareilles des cinq premiers termes de la premiere suite. Or si l'on divise tel autre de ses termes qu'on voudra par 5, il est visible que le quotient renferme au juste un certain nombre de fois la circonference entiere plus une des cinq fractions précedentes. Donc puisque la corde qui termine un arc, dont l'origine est en $A$, est la même que celle qui termine cet arc plus la circonference repetée autant de fois qu'on veut, il s'ensuit que les cordes $BD$, $BE$, $BF$, $BG$, $BH$, terminent les cinquiémes parties de tous les termes de la premiere suite. On prouvera de la même maniere que les arcs $AH$, $AHG$, $AHGF$, $AHGFE$, $AHGFED$ sont les cinquiémes parties des cinq premiers termes de la seconde suite, & qu'ainsi les cordes $BH$, $BG$, $BF$, $BE$, $BD$, terminent les cinquiémes parties de tous les termes de la seconde suite. Mais il visible que cette démonstration se peut appliquer à telle autre aliquote qu'on voudra de l'arc $AR$. Donc &c.

FIG. 273. 274. De là il suit que si l'on réünit les deux suites précedentes en une seule $d$, $c \mp d$, $2c \mp d$, $3c \mp d$ &c; les deux cordes voisines de part & d'autre de la plus grande ou premiere $BD$ qui termine l'aliquote $AD$ de l'arc $AR$ moindre que la demie circonference, termineront des aliquotes pareilles du second terme $c \mp d$, de la suite; que les deux cordes voisines de celles-ci termineront des aliquotes pareilles du troisiéme terme $2c \mp d$ de la suite; & ainsi à l'infini de deux en deux jusqu'aux dernieres lorsque l'aliquote est impaire, & jusqu'à la derniere lorsqu'elle est paire. Ainsi lorsque l'arc $AD = \frac{1}{5}AR$; les cordes $BE$, $BH$, terminent les deux arcs $ADE$, $AH$,

cinquiémes parties du second terme $c \mp d$ de la suite, c'est à dire de la circonference plus l'arc *AR*, & de la circonference moins cet arc; les deux cordes *BF*, *BG*, voisines de celles-ci termineront deux arcs *ADEF*, *AHG*, qui sont les cinquiémes parties du troisiéme terme $2c \mp d$ de la suite: & de même lorsque l'arc *AD* $= \frac{1}{6}$ *AR*; les deux cordes *BE*, *BK*, voisines de part & d'autre de la premiere ou plus grande *BD* terminent les deux arcs *ADE*, *AK*, qui sont les sixiémes parties du second terme $c \mp d$; les deux cordes *BF*, *BH*, voisines de ces deux-ci terminent les deux arcs *ADEF*, *AKH*, sixiémes parties du troisiéme terme $2c \mp d$; & enfin la derniere corde *BG* termine les deux arcs *ADEFG*, *AKHG*, sixiémes parties du quatriéme terme $3c \mp d$.

On entend dans les remarques suivantes par *cordes impaires*, celles qui étant prises de part & d'autre de la premiere ou plus grande *BD*, se trouvent dans des lieux impairs à commencer par cette plus grande; & par *cordes paires*, celles qui étant prises de part & d'autre de la même *BD*, se trouvent dans des lieux pairs. Ainsi lorsque l'arc *AD* $= \frac{1}{5}$ *AR*; les cordes *BD*, *BF*, *BG*, sont des cordes impaires, & les cordes *BE*, *BH*, des cordes paires: & de même lorsque l'arc *AD* $= \frac{1}{6}$ *AR*; les cordes *BD*, *BF*, *BH*, sont des cordes impaires, & les côtés *BE*, *BK*, *BG*, sont des cordes paires.

### REMARQUE II.

449. Si l'arc *AD* est une aliquote quelconque de l'arc *AR* moindre que la demie circonference *ARB*; & qu'ayant inscrit dans le cercle à commencer par le point *D*, un poligone *DEFGH* &c. d'un pareil nombre de côtés, on tire de l'extrêmité *B* du diametre *AB* aux angles du poligone les cordes *BD*, *BE*, *BF*, *BG*, *BH* &c: je dis que les cordes impaires lorsque l'arc *AD* est une aliquote impaire de l'arc *AR*, & leurs quar- FIG. 273. 274.

rés lorſqu'il en eſt une aliquote paire, expriment les racines vraies de l'égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur poſitive $+a$, le rang parallele de la Table dont l'expoſant ſurpaſſe d'une unité le nombre des côtés du poligone ; & que les cordes paires dans le premier cas, & leurs quarrés dans le ſecond, expriment les racines vraies de l'autre égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur negative $-a$, le même rang parallele de la Table.

Fig. 171. 273. Soit, par exemple, l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; je dis que les cordes impaires $BD$, $BF$, $BG$, ſont les racines vraies de l'égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = a$, & que les cordes paires
Fig. 172. 274. $BE$, $BH$, ſont les racines vraies de l'autre égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = -a$. Si l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les quarrés des cordes impaires $BD$, $BF$, $BH$, ſeront les racines vraies de l'égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = a$, & les quarrés des cordes paires $BE$, $BK$, $BG$, ſeront les racines vraies de l'autre égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = -a$.

Car ſi l'on propoſe de diviſer la circonference entiere repetée un certain nombre de fois plus ou moins l'arc $AR$, en parties égales dont la premiere ſoit moindre que la demie circonference, il eſt clair ſelon l'article 444. qu'on formera la même Table que pour la diviſion de l'arc $AR$: en obſervant que les cordes doivent changer neceſſairement une fois de ſigne (avant que d'arriver à la derniere $BR$) lorſque la circonference n'eſt repetée qu'une fois, par ce que l'origine commune $B$ de toutes ſe trouve ſur l'une des parties égales ; que les cordes doivent changer deux fois de ſignes, lorſque la circonference eſt repetée deux fois, parce que l'origine $B$ ſe trouve neceſſairement ſur deux des parties égales; qu'elles doivent changer trois fois, lorſque la circonference eſt repetée trois fois, parce que l'origine $B$ ſe trouve ſur trois parties égales, & ainſi de ſuite. La corde $BR$ ſera donc poſitive lorſqu'il s'agit de diviſer en parties égales l'arc $AR$ & la circonference repetée un nombre pair de fois plus ou moins l'arc $AR$; & negative lorſque la circonferen-

ce est repetée un nombre impair de fois : c'est à dire que dans le premier cas on doit égaler le rang parallele de la Table à la grandeur positive $+a$. Et par consequent les cordes impaires ou leurs quarrés seront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres est $-a$. *Ce qu'il falloit &c.*

## REMARQUE III.

450. Les mêmes choses étant posées, si l'arc $AD$ est un aliquote impaire de l'arc $AR$ ; il est clair par l'inspection de la Table, que tous les termes pairs, c'est à dire, le deuxiéme, quatriéme, sixiéme &c, excepté le dernier terme $a$, manquent toûjours dans les deux égalités qu'on trouve selon la remarque précedente. Or l'on sçait en Algebre, qu'en changeant de signes les termes pairs d'une égalité, on ne fait qu'en changer les racines vraies en fausses & les fausses en vraies. D'où il suit que les cordes paires qui sont des racines vraies de l'égalité dont l'un des membres est $-a$, deviendront des racines fausses de l'autre égalité dont l'un des membres est $+a$. Par exemple si l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$ ; les cordes impaires $BD$, $BF$, $BG$, seront les racines vraies de l'égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = a$, & les cordes paires $BE$, $BH$, en seront les racines fausses. FIG. 271. 273.

On peut tirer de ces deux dernieres Remarques plusieurs Theorêmes la plûpart entierement nouveaux, touchant l'inscription des poligones reguliers ; si l'on fait attention que la grandeur connuë du second terme d'une égalité renferme la somme de ses racines, que celle du troisiéme terme renferme la somme des plans alternatifs de ses racines, que celle du quatriéme terme renferme la somme des solides alternatifs &c, & enfin que le dernier terme est égal au produit de toutes les racines les unes par les autres. J'en mettrai ici quatre des principaux, aprés avoir fait la remarque suivante qui peut être de quelque utilité.

## REMARQUE IV.

Fig. 271. 273.

451. Les mêmes choses étant posées que dans la Remarque précedente, où l'on veut que l'aliquote *AD* de l'arc *AR* soit impaire; je dis qu'entre les cordes renfermées dans la demie circonference *ARB* qui contient l'arc *AR*, la derniere ou plus petite *BF* soûtend un arc *BF* qui est à l'arc *BR*, en même raison que l'arc *AD* à l'arc *AR*.

Car soit l'arc *AD* la cinquiéme partie de l'arc *AR*, & par consequent l'arc *DE* la cinquiéme partie de la circonference; il est clair que la demie circonference *ARB* contiendra deux fois & demie l'arc *DE*, c'est à dire, deux fois l'arc *DE* ou bien l'arc *DEF* plus la cinquiéme partie de la demie circonference. Donc l'arc *AD* plus l'arc *BF* vaut la cinquiéme partie de la demie circonference *ARB*. Donc puisque *AD* est la cinquiéme partie de l'arc *AR*, il s'ensuit que *BF* sera aussi la cinquiéme partie de l'arc *BR* complement à deux droits de l'arc *AR*. Mais ce que l'on vient de démontrer subsiste avec la même force, soit que l'arc *AD* soit la cinquiéme partie de l'arc *AR*, ou bien une autre aliquote quelconque impaire. On a donc eu raison de dire en general &c.

De là on voit que si l'on nomme *b* la corde *BR* d'un arc quelconque *BR* moindre que la demie circonference, dont le rayon est 1; & que l'on forme une égalité dont l'un des membres soit *b*, & l'autre le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des parties égales dans lesquelles l'arc *BR* doit être divisé: cette égalité aura pour l'une de ses racines la corde *BF* de la premiere de ses parties, & par consequent pour une autre de ses racines, la corde *BG* de la premiere d'un pareil nombre de parties égales de l'arc *BAR* complement à quatre droits de l'arc *BR*.

## THEORESME I.

452. *Si l'on inſcrit au dedans d'un cercle un poligone regulier quelconque* D E F G H &c *d'un nombre impair de côtés ; & qu'on tire d'un point quelconque* B *de la circonference à tous les angles du poligone des cordes* BD, BE, BF, BG, BH, &c : *je dis*, FIG. 271.

1°. *Que la ſomme des cordes impaires* BD, BF, BG &c, *à commencer par la plus grande* BD *ſera toûjours égale à la ſomme des cordes paires* BE, BH &c ; *c'eſt à dire que la plus petite corde* BF — BE + BD — BH + DG &c = 0.

Car menant le diametre *BA*, & prenant l'arc *AR* qui contienne l'arc *AD* autant de fois que le poligone a de côtés, il eſt clair comme l'on vient de voir que ſi l'on nomme la corde *BR*, *a* ; & le rayon *CA* ou *CB*, 1 ; les cordes impaires *BD*, *BF*, *BG &c*, ſeront les racines vraies, & les cordes paires *BE*, *BH &c*, les racines fauſſes de l'égalité qui a pour l'un de ſes membres + *a*. Or puiſque le ſecond terme, qui ſelon qu'on démontre en Algebre contient la ſomme des racines, manque toûjours dans cette égalité ; il s'enſuit &c.

2°. *Que ſi l'on mene le diametre* BA, *& qu'ayant pris l'arc* AR *qui contienne l'arc* AD *autant de fois que le poligone a de côtés, on tire la corde* BR : *le produit* BD×BE×BF×BG×BH &c *de toutes les cordes* BD, BE, BF, BG, BH &c *les unes par les autres, ſera toûjours égal au produit de la corde* BR *par une puiſſance du rayon* CA *qui ait pour expoſant le nombre des cordes* — 1.

Car ce dernier produit vaut le membre *a* ; puiſque *BR* = *a*, & qu'on prend dans la Table pour l'unité le rayon *CA*. Or comme le terme *a* eſt toûjours le dernier terme de l'égalité qui a pour ſes racines toutes les cordes *BD*, *BE*, *BF*, *BG*, *BH &c*, & que le dernier terme d'une égalité contient toûjours ſelon ce qu'on démontre en Algebre le produit de toutes ſes racines ; il s'enſuit &c.

## THEORESME II.

FIG. 273. 453. *Si l'on divise une demie circonference* AEB *en un nombre quelconque impair de parties égales, dont les deux premieres soient l'arc* AE, *les quatre premieres l'arc* AEF, *& ainsi de suite de deux en deux jusqu'à la derniere; & qu'on tire les cordes* BE, BF &c: *je dis.*

1°. *Que la premiere de ces cordes* BE, *moins la seconde* BF, *plus la troisiéme, moins la quatriéme &c, jusqu'à la derniere inclusivement; est toûjours égale au rayon.*

2°. *Que le produit* BE×BF &c *de toutes les cordes les unes par les autres, est égale à une puissance convenable du rayon. Ainsi dans cet exemple où le nombre des divisions est 5, & où il n'y a par consequent que deux cordes* BE, BF; *on aura* 1°. $BE - BF = CA$. 2°. $BE \times BF = \overline{CA}^2$.

Car inscrivant dans le cercle entier le poligone regulier *EFGH* dont le nombre des côtés soit égal au nombre des divisions à commencer par le point *A*; & tirant de l'autre extremité *B* du diametre *AB* à toue les angles de ce poligone des cordes *BD*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG &c*; il est clair 1°. Que la plus grande de ces cordes *BD* est égale au diametre *BA*, & qu'ainsi l'arc *AD* étant nul ou zero, l'arc *AR* le sera aussi; d'où l'on voit que la corde *BR* sera aussi égale au diametre *BA*. 2°. Que les cordes *BE*, *BH*, *BF*, *BG &c*, étant prises deux à deux sont égales entr'elles. Or cela posé, si l'on applique le Theorême précedent à ce cas particulier on en verra naître celui-ci. Donc &c.

## THEORESME III.

FIG. 272. 454. *Si l'on inscrit au dedans d'un cercle un poligone regulier quelconque* DEFGHK &c, *dont le nombre des côtés soit pair; & que d'un point quelconque* B *de la circonference, on tire à tous les angles de ce poligone des cordes* BD, BE, BF, BG, BH, BK &c: *je dis.*

1°. *Que la somme tant des quarrés des cordes impaires* BD,

*BF, BH, que des cordes paires BE, BG, BK, est égale au quarré du rayon CB pris autant de fois que le poligone a de côtés.*

Car menant le diametre *BA*, & prenant l'arc *AR* qui contienne l'arc *AD* autant de fois que le poligone a de côtés; il est clair * qu'en nommant la corde *BR*, *a*; & le rayon *CA* ou *CB*, 1; les quarrés des cordes impaires *BD*, *BF*, *BH &c*, seront les racines vraies de l'égalité dont l'un des membres est $+a$; & que les quarrés des cordes paires *BE*, *BK*, *BG &c*, seront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres est $-a$. Or le coeficient du second terme de chacune de ces deux égalités qui contient la somme de leurs racines, est toûjours égal au quarré du rayon pris autant de fois que le poligone a de côtés, comme l'on voit dans la Table. Donc &c. * Art. 449.

2°. *Que si l'on mene le diametre BA; & qu'ayant pris l'arc AR qui contienne autant de fois l'arc AD que le poligone a de côtés, on tire la corde BR: le produit* $\overline{BD}^2 \times \overline{BF}^2 \times \overline{BH}^2$ &c *des quarrés des cordes impaires, est égal au produit de* $BA \mp BR$ *par une puissance convenable du rayon, sçavoir* $BA + BR$ *lorsque le nombre des côtés du poligone est simplement pair, &* $BA - BR$ *lorsqu'il est pairement pair, c'est à dire, divisible par 4; & le produit* $\overline{BE}^2 \times \overline{BG}^2 \times \overline{BK}^2$ &c *des cordes paires, est égal au produit de* $BA \pm BR$ *par la même puissance du rayon, sçavoir* $BA - BR$ *dans le premier cas &* $BA + BR$ *dans le second.*

Car nommant *BR*, *a*; & le rayon *CA*, 1; il est clair que les quarrés des cordes impaires *BD*, *BF*, *BH &c*, sont les racines d'une égalité qui a toûjours pour dernier terme $2 \mp a$ c'est à dire $BA \mp BR$; & de plus que les quarrés des cordes paires *BE*, *BG*, *BK &c*, sont les racines de l'autre égalité qui a toûjours pour dernier terme $2 \pm a$ c'est à dire $BA \pm BR$. Or comme le dernier terme d'une égalité contient toûjours le produit de toutes ses racines, il s'ensuit &c.

## COROLLAIRE.

455. DE LA il est évident 1°. Que la somme des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires, est égal au quarré du rayon multiplié par le double du nombre des côtés du poligone, c'est à dire ici que $\overline{BF}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{BG}^2 = 12\,\overline{CA}^2$. 2°. Que la difference des quarrés des cordes impaires avec les quarrés des cordes paires, est toûjours égale à zero, c'est à dire, que $\overline{BF}^2 - \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{BK}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{BG}^2 = o$. 3°. Que le produit des quarrés des cordes impaires plus celui des quarrés des cordes paires, est égal au quadruple d'une puissance pareille du rayon; c'est à dire, que $\overline{BF}^2 \times \overline{BD}^2 \times \overline{BH}^2 + \overline{BE}^2 \times \overline{BK}^2 \times \overline{BG}^2 = 4\,CA^6$. 4°. Que la difference de ces deux produits, est égale au double de la corde $BR$ multipliée par une puissance convenable du rayon; en observant que le produit du quarré des cordes impaires, surpasse celui des quarrés des cordes paires, lorsque le nombre des côtés du poligone est simplement pair, & au contraire qu'il est moindre, lorsqu'il est pairement pair: c'est à dire ici, que $\overline{BF}^2 \times \overline{BD}^2 \times \overline{BH}^2 - \overline{BE}^2 \times \overline{BK}^2 \times \overline{BG}^2 = 2BR \times CA^5$. 4°. Que le produit des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires les uns par les autres sera toûjours égal au produit de $\overline{BA}^2 - \overline{BR}^2 = BA + BR \times BA - BR = \overline{AR}^2$ à cause de l'angle droit $ARB$, par une puissance convenable du rayon: c'est à dire, en extrayant de part & d'autre les racines quarrées, que le produit de toutes les cordes est égal au produit de la corde $AR$ par une puissance du rayon moindre d'une unité que le nombre des cordes; par exemple ici, $BF \times BE \times BD \times BK \times BH \times BG = AR \times CA^5$.

## THEORESEME IV.

FIG. 275. 456. *Si l'on divise une demie circonference* ADB *en un nombre quelconque pair de parties égales, dont la premiere*

*soit l'arc* AD, *les trois premieres l'arc* ADE, *les cinq premieres l'arc* ADEF, *& ainsi de suite de deux en deux jusqu'à la derniere; & qu'on tire les cordes* BD, BE, BF &c: *je dis.*

1°. *Que la somme des quarrés de ces cordes est égale au quarré du rayon pris autant de fois qu'il y a de divisions. C'est à dire ici, où le nombre des divisions est 6, que* $\overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{BF}^2 = 6\,\overline{CA}^2$.

2°. *Que le produit des quarrés de ces cordes les uns par les autres, vaut le double de la puissance convenable du rayon. Ainsi* $\overline{BD}^2 \times \overline{BE}^2 \times \overline{BF}^2 = 2\,CA^6$, *& par consequent* $BD \times BE \times BF = CA^3 \times \sqrt{2}$.

Car inscrivant dans le cercle entier un poligone regulier *DEFGHK*, dont le nombre des côtés soit égal au nombre des divisions, à commencer par la premiere *D*; & tirant de l'extremité *B* du diametre *AB*, à tous les angles de ce poligone, des cordes *BD*, *BK*, *BE*, *BH*, *BF*, *FG*: il est clair que les cordes *BD*, *BK*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG &c*, étant prises deux à deux sont égales entr'elles; & partant que si l'on applique les articles premier & troisiéme du Corollaire précedent à ce cas particulier, on en verra naître ce Theorême.

## EXEMPLE XII.

457. INSCRIRE dans un cercle donné, un poligone regulier quelconque, dont le nombre des côtés soit donné.

On peut regarder ce Problême, comme n'étant qu'un cas particulier de l'exemple précedent. Car si l'on suppose que la corde *BR* devienne nulle ou zero, il s'ensuit que l'arc *AR* qu'elle termine deviendra la demie circonference. Or si l'on propose de diviser la circonference entiere en un nombre quelconque de parties égales; il est évident qu'en divisant la demie circonference dans ce même nombre, & prenant la seconde corde au FIG. 275.

lieu de la premiere, elle terminera la premiere des parties demandées. Par exemple, si l'on divise la demie circonference *ADB* en sept parties égales *AD*, *DE*, *EF*, *FG*, *GH*; *HI*, *IB*; la seconde corde *BE* terminera l'arc *AE* qui est la septiéme partie de la circonference entiere. D'où l'on voit qu'en égalant à zero le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des côtés du poligone, on formera une égalité dont la plus grande des racines $x$ exprimera la valeur de la corde *BD* qui termine l'arc *AD* moitié de l'arc cherché *AE*. Mais * $CB(1) . BD(x) :: BD(x) . BE + BA$, & par consequent si l'on nomme la seconde corde *BE*, $z$; on aura $xx = z + 2$. Si donc l'on fait évanoüir par le moyen de cette égalité l'inconnuë $x$ dans la précedente, on en formera une nouvelle dont la plus grande racine $z$ exprimera la corde *BE* qui termine l'arc cherché *AE*. Ainsi dans nôtre exemple, en égalant à zero le huitiéme rang parallele & divisant par $x$, je trouve cette égalité $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 = 0$, dans laquelle mettant à la place de $xx$ sa valeur $z + 2$, à la place de $x^4$ le quarré de cette valeur &c. je la change en cette autre $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, dont la plus grande des racines $z$ exprime la valeur de la corde *BE* qui termine l'arc *AE* septiéme partie de la circonference entiere.

Fig. 276.

* Art. 442.

Voici maintenant une maniere generale de trouver immediatement toutes ces égalités lorsque le nombre des côtés du poligone est impair qui est le seul cas necessaire; puisque s'il étoit pair, on le reduiroit toûjours en le divisant par 2, autant de fois qu'il seroit possible, en un nombre impair dans lequel ayant partagé la circonference, on auroit par la bissection d'une des parties égales, réïterée autant qu'il seroit necessaire, l'arc qu'on demande.

Soit construite une Table dans laquelle le premier rang parallele étant 1, & le second $z - 1$; le troisiéme $zz - z - 1$ soit égal au produit du second par $z$, moins le premier; le quatriéme $z^3 - zz - 2z + 1$ soit égal au pro-

duit du troisiéme par $z$, moins le second ; & ainsi à l'infini. Soit formée une égalité dont l'un des membres étant zero, l'autre soit le rang parallele de la Table, qui ait pour exposant la plus grande moitié du nombre des côtés du poligone. Je dis que la plus grande des racines $z$ de cette égalité, terminera un arc qui aura pour corde, le côté cherché du poligone.

*Table pour l'inscription des poligones reguliers dans le cercle.*

| | |
|---|---|
| 1er | $1$ |
| 2e | $z - 1$ |
| 3e | $zz - z - 1$ |
| 4e | $z^3 - zz - 2z + 1$ |
| 5e | $z^4 - z^3 - 3zz + 2z + 1$ |
| 6e | $z^5 - z^4 - 4z^3 + 3zz + 3z - 1$ |
| 7e | $z^6 - z^5 - 5z^4 + 4z^3 + 6zz - 3z - 1$ |
| 8e | $z^7 - z^6 - 6z^5 + 5z^4 + 10z^3 - 6zz - 4z + 1$ |
| 9e | $z^8 - z^7 - 7z^6 + 6z^5 + 15z^4 - 10z^3 - 10zz + 4z + 1$ |
| 10e | $z^9 - z^8 - 8z^7 + 7z^6 + 21z^5 - 15z^4 - 20z^3 + 10zz + 5z - 1$ |

Qu'il faille, par exemple, inscrire dans un cercle un heptagone. Je prends le quatriéme rang parallele de la Table, parce que 4 est la plus grande moitié de 7, & l'égalant à zero j'ai $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, donc la plus grande racine $z$ exprimera la valeur de la corde *BE*, qui termine l'arc *AE* septiéme partie de la circonference entiere. Pour le prouver.

Soit un arc de cercle *AR* moindre que la demie circonference, divisé en un nombre quelconque impair, de parties égales aux points *D*, *E*, *F*, *G &c* : & soient menées de l'extremité *B* du diametre *BA*, les cordes *BD*, *BE*, *BF*, *BG &c*, jusqu'à la derniere *BR*. Ayant pris l'arc *AS* égal à l'arc *AD*, soit tirée la corde *BS*, & soient nommées la premiere corde *BD* ou *BS*, $x$ ; & la seconde *BE*, $z$. Cela posé, on aura selon le Lemme $CB\,(1) . BE\,(z) :: BD\,(x) . BF + BS$. Et par consequent $BF = xz - x$. De même $CB\,(1) . BE\,(z) :: BF . BD + BH$. Et par consequent $BH = zBF - BD$ ; de FIG. 275.

même encore $CB$ (1). $BE$ ($z$) :: $BH$. $BF+BR$, & partant $BR=zBH-BF$: c'eſt à dire, que la cinquiéme corde $BH$ eſt égale au produit de la troiſiéme $BF$ par $z$, moins la premiere $BD$; que la ſeptiéme $BR$ eſt égale au produit de la cinquiéme $BH$ par $z$, moins la troiſiéme $BF$; & ainſi à l'infini de toutes les cordes impaires. D'où l'on voit que ſi l'on conſtruit une Table dont le premier rang étant $x$, & le ſecond $xz-x$; le troiſiéme $xzz-xz-x$ ſoit égal au produit du ſecond par $z$, moins le premier; le quatriéme $xz^3-xzz-2xz+1$ ſoit égal au produit du troiſiéme par $z$ moins le ſecond; & ainſi à l'infini: les rangs de cette Table exprimeront par ordre toutes les cordes impaires $BD$, $BF$, $BH$, $BR$, de l'arc $AR$. Or les rangs de cette Table n'étant autres que ceux de la précedente multipliez chacun par $x$, il s'enſuit qu'en ſuppoſant que la derniere corde $BR$ devienne nulle ou zero (ce qui arrive lorſque l'arc $AR$ devient la demie circonference,) & faiſant ce qu'on vient de preſcrire, on aura une égalité dont l'inconnuë $z$ exprimera la ſeconde corde $BE$ qui termine l'arc $AE$ qui eſt contenu autant de fois dans la circonference entiere, que l'arc $AD$ qui en eſt la moitié, l'eſt dans la demie circonference.

FIG. 276.

Il faut remarquer 1°. Que les égalités qu'on trouve de cette maniere ſont les plus ſimples qu'il eſt poſſible, lorſque le nombre des côtés du poligone eſt un nombre premier: mais que lorſqu'il eſt compoſé de deux ou de pluſieurs nombres premiers, il faudra diviſer d'abord la circonference entiere en autant de parties égales que le plus grand de ces nombres a d'unités, & enſuite une de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres reſtans a d'unités, & continuer juſqu'à ce que tous les nombres premiers qui compoſent le nombre donné des côtés du poligone ſoient épuiſés. 2°. Qu'entre les cordes qui partent du point $B$, & qui ſont renfermées dans la demie circonference $AEB$; les impaires à commencer par la plus grande $BE$ ſont les racines vraies,

vraies, & les paires les fausses des égalités qu'on trouve par cette methode : ainsi les cordes *BE*, *BI*, sont les deux racines vraies de l'égalité $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, & la corde *BG* en est la fausse. 3°. Qu'entre les racines de ces sortes d'égalités, la plus petite est la corde d'un arc qui est la moitié de celui qu'on cherche : c'est à dire dans cette exemple, que la plus petite racine *BI* de l'égalité $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, est la corde d'un arc *BI* qui est la quatorziéme partie de la circonference.

## REMARQUE.

458. Il est visible dans cette derniere Table, que tous les termes du premier & du second rang perpendiculaire ont chacun pour coeficient l'unité ; que ceux du troisiéme & du quatriéme rang ont pour coeficiens les nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c, qui se forment par l'addition continuelle des unités ; que ceux du cinquiéme & du sixiéme rang ont pour coeficiens les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, &c qui se forment par l'addition continuelle des nombres naturels ; que ceux du septiéme & du huitiéme rang ont pour coeficiens les nombres piramidaux 1, 4, 10 &c, qui se forment par l'addition continuelle des triangulaires ; & ainsi à l'infini de deux en deux des nombres d'un ordre superieur qui se forment par l'addition continuelle de ceux du dernier ordre.

## LEMME I.

459. *S'il y a sur un demi cercle* AEB *deux arcs égaux* AD, EF, *dont l'un* AD *ait son commencement en l'une des extremités* A *du diametre* AB, *& l'autre* EF *soit pris par tout où l'on voudra ; & qu'on tire les cordes* BD, BE, BF, *&* AD, AE, AF : *je dis*, 1°. *Que* $AB \times BF = BD \times BE - AD \times AE$. 2°. *Que* $AB \times AF = BD \times AE + AD \times BE$. FIG. 277.

Car les trois triangles rectangles *ADG* (le point *G* est ici le point d'intersection des cordes *BD*, *AF*), *AEB*,

$BFG$ sont semblables entr'eux ; puisque l'angle $AGD$ ou $BGF$ ayant pour mesure la moitié des deux arcs $BF$, $AD$, est égal à l'angle $BAE$ qui a aussi pour mesure la moitié des deux arcs $BF$, $FE$, ou $AD$. Si donc l'on nomme le diametre $AB$, 1 ; les cordes $BD$, $x$ ; $AD$, $y$ ; $BE$, $v$ ; $AE$, $z$ ; on aura 1°. $BE(v) . EA(z) :: AD(y) . DG = \frac{yz}{v}$, & partant $BG$ ou $BD - DG = x - \frac{yz}{v}$. 2°. $AB(1) . BE(v) :: BG\left(x - \frac{yz}{v}\right) . BF = vx - yz$ c'est à dire (puisque $AB = 1$) que $AB \times BF = BD \times BE - AD \times AE$. Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.

Maintenant $BE(v) . BA(1) :: AD(y) . AG = \frac{y}{v}$. Et $AB(1) . AE(z) :: BG\left(x - \frac{yz}{v}\right) . GF = xz - \frac{zzy}{v}$ ; & partant $AG + GF$ ou $AF = xz - \frac{zzy}{v} + \frac{y}{v} = xz + vy$, puisqu'à cause du triangle rectangle $AEB$ on trouve $1 - zz = vv$ ; c'est à dire que $AF$ ou $AB \times AF = BD \times AE + AD \times BE$. Et c'est ce qui restoit à démontrer.

## LEMME II.

460. SOIT *formée une Table, dont le premier rang parallele étant composé de deux parties* x & y, *tous les autres le soient aussi selon cette regle ; la premiere partie de tel rang parallele qu'on voudra, vaut la premiere partie du rang parallele qui le précede immediatement, multipliée par* x, *moins la seconde partie du même rang multipliée par* y : & *la seconde partie vaut la même premiere partie multipliée par* y, *plus la même seconde multipliée par* x. *Soit de plus un arc de cercle*
FIG. 278. *quelconque* AR *moindre que la demie circonference divisé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points* D, E, F, G, &c. *Je dis que si le diametre* AB = 1, & *les deux premieres cordes* BD = x, AD = y ; *toutes les autres cordes* BE, BF, BG &c, *seront exprimées par les premieres parties du deuxième, troisiéme, quatrième, &c. rang parallele, &*

*les autres cordes correspondantes* AE, AF, AG, &c, *par les secondes parties des mêmes rangs. Ainsi* BG *étant la quatriéme corde, vaut la premiere partie* $x^4 - 6yyxx + y^4$ *du quatriéme rang parallele, & sa correspondante* AG *vaut la seconde partie* $4yx^3 - 4y^3x$ *du même rang.*

| | | |
|---|---|---|
| 1^er | $x$ | $y$ |
| 2^e | $xx - yy$ | $2yx$ |
| 3^e | $x^3 - 3yyx$ | $3yxx - y^3$ |
| 4^e | $x^4 - 6yyxx + y^4$ | $4yx^3 - 4y^3x$ |
| 5^e | $x^5 - 10yyx^3 + 5y^4x$ | $5yx^4 - 10y^3xx + y^5$ |
| 6^e | $x^6 - 15yyx^4 + 15y^4xx - y^6$ | $6yx^5 - 20y^3x^3 + 6y^5x$ |
| 7^e | $x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$ | $7yx^7 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - x^7$ |

Car il eſt clair ſelon le Lemme précedent que le produit d'une corde quelconque *BF* par la premiere corde *BD* ($x$), moins le produit de la corde correſpondante *AF*, par l'autre premiere corde *AD* ($y$) exprime la valeur de la corde *BG* qui ſuit immediatement *BF*; & auſſi que la corde *AG* vaut $BF \times AD\ (y) + AF \times BD\ (x)$. Donc &c.

COROLLAIRE.

461. Si l'on ajoûte enſemble les deux parties de chaque rang parallele de la Table précedente, en mettant par ordre tous les termes qui les compoſent ſelon les differens degrez des puiſſances de $x$; on formera cette nouvelle Table qui contiendra par ordre les termes de toutes les puiſſances du binome $x + y$: en obſervant que le premier & le ſecond terme doivent être pris affirmativement, le troiſiéme & le quatriéme negativement, & ainſi alternativement de deux en deux juſqu'au dernier. Ainſi le troiſiéme rang parallele contiendra $x^3 + 3yxx - 3yyx - y^3$; c'eſt à dire le cube du binome $x + y$, dont on prend les deux premiers termes affirmativement, & les deux derniers negativement: de même le cinquiéme rang parallele contiendra $x^5 + 5yx^4 - 10yyx^3 - 10y^3xx + 5y^4x + y^5$, qui eſt la cinquiéme

puiſſance du binome $x + y$, dont le premier & le ſecond terme ſont pris affirmativement, le troiſiéme & le quatriéme negativement, le cinquiéme & le ſixiéme affirmativement; & il en eſt ainſi de tous les autres rangs à l'infini.

| | |
|---|---|
| 1<sup></sup>er | $x + y$ |
| 2e | $xx + 2yx - yy$ |
| 3e | $x^3 + 3yxx - 3yyx - y^3$ |
| 4e | $x^4 + 4yx^3 - 6yyxx - 4y^3x + y^4$ |
| 5e | $x^5 + 6yx^4 - 10yyx^3 - 10y^3xx + 5y^4x + y^5$ |
| 6e | $x^6 + 6yx^5 - 15yyx^4 - 20y^3x^3 + 15y^4xx + 6y^5x - y^6$ |
| 7e | $x^7 + 7yx^6 - 21yyx^5 - 35y^3x^4 + 35y^4x^3 + 21y^5xx - 7y^6x - y^7$ |

Car ſi l'on fait attention à la maniere dont la Table précedente eſt formée, on verra que tous les termes de chacun de ſes rangs paralleles ſont formés par ceux du rang parallele qui le précede, multiples par $x$ & par $y$, & joints par des ſignes + & −, en telle ſorte que les termes des deux parties qui compoſent chaque rang, étant mis par ordre, ſelon les differens degrés de l'inconnuë $x$, il y a de ſuite deux ſignes +, & aprés deux ſignes −; & ainſi alternativement juſqu'au dernier.

## REMARQUE.

462. Il eſt viſible dans cette derniere Table, que tous les termes du premier rang perpendiculaire, ont chacun pour coeficient l'unité; que ceux du ſecond rang ont pour coeficiens les nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des unités; que ceux du troiſiéme rang ont pour coeficiens les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10 &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des nombres naturels; que ceux du quatriéme rang ont pour coeficiens les nombres piramidaux 1, 4, 10, 20 &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des triangulaires; & ainſi à l'infini de rang en rang en avançant vers la droite, les nombres d'un

ordre superieur, se forment par l'addition continuelle de ceux de l'ordre immediatement précedent.

## EXEMPLE XII.

463. Un arc de cercle *AR* étant donné; le diviser en autant de parties égales qu'on voudra, aux points *D*, *E*, *F*, *G* &c; par une methode differente de celle de l'exemple dixiéme. FIG. 278.

Ayant nommé le diametre *AB*, 1; les cordes données *BR*, *a*; *AR*, *b*; qui terminent l'arc donné *AR*; & les cordes inconnuës *BD*, *x*; *AD*, *y*; qui terminent l'arc cherché *AD*; on élevera le binome $x+y$ à une puissance dont l'exposant soit égal au nombre des divisions. On formera deux égalités, dont la premiere aura pour l'un de ses membres la donnée *a*, & pour l'autre tous les termes impairs de la puissance de $x+y$, joints par des signes + & − alternatifs; & la seconde aura pour l'un de ses membres la donnée *b*, & pour l'autre tous les autres termes de la même puissance du binome $x+y$, joints encore ensemble par des signes alternatifs + & −. On fera évanoüir l'une ou l'autre des inconnuës *x* ou *y*, par le moyen de l'égalité $xx=1-yy$ où $yy=1-xx$, qui se tire du triangle *ADB* rectangle en *D*: ce qui donnera enfin une derniere égalité où il n'y aura qu'une seule inconnuë *x* ou *y*, dont la resolution fournira la valeur de cette inconnuë *BD* ou *AD* qui termine l'arc cherché *AD*.

Qu'il faille, par exemple diviser l'arc cherché *AR* en sept parties égales, aux points *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*. Je prends la septiéme puissance $x^7+7yx^6+21yyx^5+35y^3x^4+35y^4x^3+21y^5xx+7y^6x+y^7$ du binome $x+y$, de laquelle je forme les deux égalités $a=x^7-21yyx^5+35y^4x^3-7y^6x$, & $b=7yx^6-35y^3x^4+21y^5xx-y^7$. Et faisant évanoüir dans la premiere de ces deux égalités l'inconnuë *y*, ou dans la seconde l'inconnuë *x*, par le moyen de l'égalité $yy=1-xx$ ou $xx=1-yy$,

je forme l'une de ces deux nouvelles égalités $a = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$ ou $b = 7y - 56y^3 + 112y^5 - 63y^7$, qui ne renferme plus qu'une ſeule inconnuë, & dont la reſolution qui ſe fera ſelon les regles du Livre précedent, fournira pour l'une de ſes racines $x$ ou $y$, une valeur *BD* ou *AD* qui ſervira à déterminer la premiere des parties égales demandées. Tout cela eſt une ſuite des deux articles précedens.

Il eſt à remarquer que ſi l'arc *AR* étoit plus grand que la demie circonference, celle des deux égalités précedentes qui a pour l'un de ſes membres $+b$ ſert également ſans y rien changer, mais dans l'autre il faut changer le membre $+a$ en $-a$; dont la raiſon eſt que la corde *BR* ($a$) paſſant de l'autre côté du point *B* devient negative de poſitive qu'elle étoit, au lieu que la corde *AR* ne repaſſant point de l'autre côté du point *A* demeure toûjours poſitive.

## LEMME I.

464. QUE *dans un quarré quelconque de cellules on rempliſſe de la lettre* a, *toutes les cellules du premier rang parallele; de la lettre* b, *toutes les cellules du premier rang perpendiculaire, excepté la premiere; & enſuite toutes les autres cellules par le moyen de cette regle; c'eſt à ſçavoir qu'une cellule doit toûjours être égale à celle qui eſt au deſſus plus à celle qui eſt à gauche: de cette ſorte on aura le quarré de cellules qu'on voit ici. Or cela poſé;*

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| 2. | $b$ | $a+b$ | $2a+b$ | $3a+b$ | $4a+b$ | $5a+b$ | $6a+b$ |
| 3. | $b$ | $a+2b$ | $3a+3b$ | $6a+4b$ | $10a+5b$ | $15a+6b$ | $21a+7b$ |
| 4. | $b$ | $a+3b$ | $4a+6b$ | $10a+10b$ | $20a+15b$ | $35a+21b$ | $56a+28b$ |
| 5. | $b$ | $a+4b$ | $5a+10b$ | $15a+20b$ | $35a+35b$ | $70a+56b$ | $126a+84b$ |
| 6. | $b$ | $a+5b$ | $6a+15b$ | $21a+35b$ | $56a+70b$ | $126a+126b$ | $252a+210b$ |
| 7. | $b$ | $a+bb$ | $7a+21b$ | $28a+56b$ | $84a+126b$ | $210a+252b$ | $462a+462b$ |

*Je dis qu'une cellule quelconque eſt égale à la cellule qui eſt*

*à gauche plus à toutes celles qui sont au dessus : c'est à dire, par exemple, que la quatriéme cellule* 4a + 6b *du troisiéme rang perpendiculaire, est égale à la cellule* a + 3b *qui est à gauche, & qui par consequent est la quatriéme du second rang perpendiculaire, plus à toutes les autres* a + 2b, a + b, a, *qui sont au dessus d'elle dans ce second rang.*

Car supposant que $a, c, d, e$, expriment les quatre premieres cellules du second rang perpendiculaire, & $a, f, g, h$, les quatre premiers du troisiéme rang, on aura par la formation du quarré de cellules $h = e + g$, $g = d + f$, $f + c + a$, & partant $h = e + d + c + a$; ce qu'il falloit prouver. Or il est visible que cette démonstration se peut appliquer à tel nombre de cellules qu'on voudra de deux rangs perpendiculaires voisins. Donc &c.

## COROLLAIRE.

465. PUISQUE toutes les cellules excepté celles du premier rang parallele & celle du premier rang perpendiculaire, sont composées de deux termes dans le premier desquels se trouve la lettre $a$, & dans le second la lettre $b$; il s'ensuit 1°. Que le terme où se trouve la lettre $a$, est égal au terme où se trouve la même lettre $a$ dans la cellule à gauche, plus à tous les termes où elle se rencontre dans les cellules qui sont au dessus de celle-ci. 2°. Que le terme où se trouve la lettre $b$, est égal au terme où se trouve la même lettre $b$ dans dans la cellule à gauche, plus à tous ceux où elle se trouve dans les cellules qui sont au dessus. Ainsi le terme $15a$ de la cinquiéme cellule du quatriéme rang perpendiculaire, est égal au terme $5a$ de la cellule à gauche, plus aux termes $4a$, $3a$, $2a$, $1a$, qui se trouvent dans les cellules qui sont au dessus de celle-ci; & de même $10b$ est égal au terme $10b$ de la cellule à gauche, plus aux termes $6b$, $3b$, $1b$, de toutes les cellules qui sont au dessus.

## LEMME II.

466. *Si l'on multiplie le terme où se trouve la lettre* a *dans une cellule quelconque, par la somme des exposans de son rang parallele & de son rang perpendiculaire moins* 2, *& qu'on divise le produit par l'exposant de son rang perpendiculaire moins* 1; *je dis que le quotient sera égal à ce terme plus à tous ceux qui sont au dessus de lui : c'est à dire, par exemple, que si l'on multiplie le terme* 15*a de la cinquiéme cellule du quatriéme rang perpendiculaire par* $5+4-2=7$, *& qu'on divise le produit par* $4-1=3$; *le quotient* 35*a sera égal au terme* 15*a plus à tous les autres* 10*a*, 6*a*, 3*a*, 1*a*, *qui sont au dessus de lui.*

Cela est visible dans toutes les cellules du deuxiéme rang perpendiculaire, puisqu'elles contiennent toutes le même terme 1*a*. Or je vais démontrer que supposé que cette proprieté se rencontre dans un rang perpendiculaire quelconque, elle se trouve necessairement dans celui qui est à droit; d'où il suivra que puisqu'elle se trouve dans le deuxiéme rang perpendiculaire, elle sera aussi dans le troisiéme, que puisqu'elle se rencontre dans dans le troisiéme, elle sera aussi dans le quatriéme, & ainsi de suite à l'infini. Pour le prouver.

Soient $a, e, c, d, e, f$ &c, autant de termes qu'on voudra de ceux où se trouve la lettre $a$, dans un rang perpendiculaire quelconque à commencer par le premier; $a, g, h, k, l,$ &c un pareil nombre de termes du rang qui est à droit à commencer aussi par le premier. Soit de plus $m$ égale à la somme des exposans moins 2 des rangs perpendiculaire & parallele de la cellule où se trouve le terme $f$; & $r$ égale à l'exposant moins 1 du rang perpendiculaire de cette cellule. Par la supposition $\frac{m}{r}f = f + e + d + c + a =$ * $l$, $\frac{m-1}{r}e = e + d + c + a = k$, $\frac{m-2}{r}d = d + c + a = h$, $\frac{m-3}{r}c = c + a = g$, $\frac{m-4}{r}a = a$. Donc $l + k + h + g + a = \frac{m}{r}f$ +

* Art. 464.

$+ \frac{m-1}{r} e + \frac{m-2}{r} d + \frac{m-3}{r} c + \frac{m-4}{r} a = \frac{m}{r} \times f + e$ $+ d + c + a, - \frac{1}{r} \times 1e + 2d + 3c + 4a = \frac{m}{r} l, - \frac{1}{r} \times k$ $+ h + g + a$ en mettant pour $f + e + d + c + a$ ſa valeur $l$, & pour $1e + 2d + 3c + 4a$ ſa valeur $k + h$ $+ g + a$: tranſpoſant d'une part $l$ & de l'autre $- \frac{1}{r} \times k$ $+ h + g + a$, on aura $\frac{r+1}{r} \times k + h + g + a = \frac{m-r}{r} l$: multipliant de part & d'autre par $r$, diviſant par $r + 1$, & ajoûtant de part & d'autre $l$, il vient enfin $\frac{m+1}{r+1} l = l$ $+ k + h + g + a$. Mais comme le rang perpendiculaire de la cellule où ſe trouve $l$, ſurpaſſe d'une unité celui de la cellule où ſe trouve $f$, & que leur rang parallele demeure le même ; il eſt évident que la proprieté marquée pour chaque terme où ſe trouve la lettre $a$ dans un rang perpendiculaire quelconque, convient auſſi au terme $l$ du rang perpendiculaire qui eſt à droit. De plus puiſque cette démonſtration ſubſiſte également tel que puiſſe être le nombre de termes des deux rangs perpendiculaires voiſins, il s'enſuit que ce que l'on vient de montrer par rapport au terme $l$, ſera vrai auſſi à l'égard de tout autre de ſon rang perpendiculaire.

Si l'on ſuppoſe à preſent que $n$ exprime en general l'expoſant d'un rang parallele quelconque autre que le premier, on verra que la premiere cellule de ce rang ne renferme aucun terme où la lettre $a$ ſe rencontre ; que la ſeconde renferme toûjours $1a$ ; que ſi l'on multiplie $1a$ par $\frac{n+2-2}{2-1} = \frac{n}{1}$, on aura $\frac{n}{1} a$ pour le terme où ſe trouve la lettre $a$ dans la troiſiéme cellule ; & de même que ſi l'on multiplie $\frac{n}{1} a$ par $\frac{n+3-2}{3-1} = \frac{n+1}{2}$, on aura $\frac{n}{1} a \times \frac{n+1}{2}$ pour le terme où ſe trouve $a$ dans la quatriéme cellule : de ſorte que cette ſuite $0, 1a, \frac{n}{1} a, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} a,$ $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+1}{3} a, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} a$ &c, exprimera

par ordre tous les termes où se trouve la lettre *a*, dans les cellules du rang parallele dont *n* est l'exposant. Ainsi si $n=5$, la suite 0, 1*a*, 5*a*, 15*a*, 35*a* &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve la lettre *a* dans les cellules du cinquiéme rang parallele.

## LEMME III.

467. *Si l'on multiplie le terme où se trouve la lettre* b *dans une cellule quelconque, par la somme des exposans de son rang parallele & de son rang perpendiculaire moins* 2, *& qu'on divise le produit par l'exposant de son rang perpendiculaire; je dis que le quotient sera égal à ce terme plus à tous ceux qui sont au dessus de lui : c'est à dire, par exemple, que si l'on multiplie le terme* 10b *de la cinquiéme cellule du troisiéme rang perpendiculaire par* $5+3-2=6$, *& qu'on divise le produit par* 3, *on aura* 20b *pour la somme du terme* 10b, *& de tous les autres* 6b, 3b, 1b, *qui sont au dessus de lui :*

Il est visible que cette proprieté se rencontre dans le premier rang perpendiculaire où toutes les cellules renferment la même valeur 1*b*, excepté la premiere dans laquelle la lettre *b* ne se rencontre point. Or de cela seul l'on prouvera comme l'on vient de faire dans le Lemme précedent à l'égard des termes qui sont multiples de, *a*, qu'elle se doit rencontrer dans le second rang perpendiculaire, dans le troisiéme, dans le quatriéme, & ainsi dans tous les autres à l'infini. D'où l'on conclura que si *n* designe l'exposant d'un rang parallele quelconque autre que le premier; la suite $1b$, $\frac{n-1}{1}b$, $\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}b$, $\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}b$, $\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}\times\frac{n+2}{4}b$ &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve la lettre *b* dans les cellules du rang parallele dont *n* est l'exposant. Ainsi si $n=5$, la suite 1*b*, 4*b*, 10*b*, 20*b*, 35*b* &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve *b* dans le cinquiéme rang parallele.

## COROLLAIRE.

468. Il suit de ces deux derniers Lemmes, que si l'on ajoûte par ordre tous les termes de cette suite à ceux de la précedente, on en formera une, $1b, 1a, + \frac{n-1}{1}b, \frac{n}{1}a + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}b, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}a + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3}b,$ $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n+2}{3}a \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{-3} \times \frac{n+2}{4}b$, &c; ou en abregeant l'expression, $b, a + \frac{n-1}{1}b, a + \frac{n-1}{2}b \times \frac{n}{1}, a$ $+ \frac{n-1}{3}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, a + \frac{n-1}{4}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c. qui exprimera par ordre toutes les cellules du rang parallele de la Table dont $n$ est l'exposant.

D'où l'on voit que par le moyen de cette suite, on peut trouver tout d'un coup telle cellule qu'on voudra, les exposans de son rang parallele & perpendiculaire étant donnés; puisque prenant dans la suite generale le terme qui répond à l'exposant du rang perpendiculaire, c'est à dire, le quatriéme terme, si le rang perpendiculaire est le quatriéme, le cinquiéme, s'il est le cinquiéme &c, & mettant dans ce terme à la place de $n$ l'exposant du rang parallele, on aura la cellule que l'on cherche. Que l'on demande, par exemple, la cinquiéme cellule du quatriéme rang perpendiculaire; ayant mis dans le quatriéme terme $a + \frac{n-1}{3}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, à la place de $n$ l'exposant 5 du rang parallele de la cellule, on trouvera $a + \frac{4}{3}b \times 15$, c'est à dire, $15a + 20b$ pour cette cellule; & il en est ainsi de toutes les autres.

## LEMME IV.

469. *Si l'on fait* a $=$ 2 & b $=$ 1 *dans le quarré de cellules de l'article* 464, *on le changera en celui-ci; duquel je dis que le premier rang parallele contient de suite les premiers termes de tous les rangs perpendiculaires de la Table de l'article* 443; *le second rang parallele, les seconds termes; le troisiéme*

*rang, les troisiémes termes; & ainsi de suite à l'infini.*

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2. | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| 3. | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |
| 4. | 1 | 5 | 14 | 30 | 55 | 91 | 140 |
| 5. | 1 | 6 | 20 | 50 | 105 | 196 | 336 |
| 6. | 1 | 7 | 27 | 77 | 182 | 378 | 714 |
| 7. | 1 | 8 | 35 | 112 | 294 | 672 | 1386 |

Cela eſt une ſuite naturelle de l'article 445, & de la formation du quarré de cellules de l'article 464. expliquée dans ce même article & dans le ſuivant 465.

## COROLLAIRE.

470. Si l'on fait $b = 1$ & $a = 2$ dans la ſuite generale de l'article 468. $b$, $a + \frac{n-1}{1} b$, $a + \frac{n-1}{2} b \times \frac{n}{1}$, $a + \frac{n-1}{3} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $a + \frac{n-1}{4} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c; on la changera en cette autre $1$, $\frac{n+1}{1}$, $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$, $\frac{n+5}{3} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $\frac{n+7}{4} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c, par le moyen de laquelle on trouvera tout d'un coup le coeficient de tel terme qu'on voudra de la Table de l'article 443, ſon rang perpendiculaire & le quantiéme qu'il y occupe étant donnés. Voici la regle.

On prendra dans cette ſuite le terme qui répond au rang perpendiculaire donné, c'eſt à dire le troiſiéme, ſi c'eſt le troiſiéme rang, le quatriéme, ſi c'eſt le quatriéme &c; & ayant mis dans ce terme à la place de $n$ le nombre qui expoſe le quantiéme du terme dans ſon rang perpendiculaire, c'eſt à dire 4 s'il eſt le quatriéme, 5, s'il eſt le cinquiéme &c, on aura le coeficient qu'on cherche. Si l'on demande, par exemple, le coeficient du quatriéme terme $14x^3$ du troiſiéme rang perpendicu-

laire; on mettra dans le troisiéme terme $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$ à la place de $n$ le nombre 4, & l'on aura 14 pour le coeficient cherché.

Car l'exposant du rang perpendiculaire du coeficient pris dans la Table de l'article 443, est le même que l'exposant du rang perpendiculaire du quarré de cellules de l'article précedent; & le quantiéme que ce coeficient occupe dans son rang perpendiculaire, est l'exposant du rang parallele du quarré de cellules. D'où l'on voit que cette regle n'est qu'une application de celle de l'article 468, à ce cas particulier où $a = 2$ & $b = 1$.

## LEMME V.

471. *Si l'on met* 1 *à la place de* b, *dans le quarré de cellules de l'article* 464; *on le changera en celui-ci, dont je dis que les rangs perpendiculaires contiennent par ordre tous les nombres qu'on appelle* Figurés : *sçavoir le premier rang les nombres du premier ordre qui sont les unités, le second rang les nombres naturels ou du second ordre qui se forment par l'addition continuelle des unités, le troisiéme rang les nombres triangulaires ou du troisiéme ordre qui se forment par l'addition continuelle des naturels, le quatriéme les nombres piramidaux ou du quatriéme ordre qui se forment par l'addition continuelle des triangulaires, & ainsi à l'infini.*

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3. | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 |
| 4. | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 |
| 5. | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 |
| 6. | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 |
| 7. | 1 | 7 | 28 | 84 | 110 | 462 | 924 |

Car selon le même article 464, chaque cellule est

égale à celle qui est à gauche, plus à toutes les autres qui sont au dessus.

M. Paschal a fait un Traité qui a pour titre Triangle Arithmetique, dans lequel il considere les proprietés de ces nombres, & fait voir qu'ils sont d'un trés-grand usage dans plusieurs questions d'Arithmetique.

### COROLLAIRE.

472. Si l'on fait $a = 1$ & $b = 1$ dans la suite generale de l'article 468. $b, a + \frac{n-1}{1} b, a + \frac{n-1}{2} b \times \frac{n}{1}, a + \frac{n-1}{3} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, a + \frac{n-1}{4} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+3}{3}$ &c; on changera en cette autre $1, n, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ &c, qui servira à trouver tout d'un coup tel nombre figuré qu'on voudra, son ordre étant donné avec le quantiéme qu'il y occupe. Voici comment.

On prendra dans cette derniere suite le terme qui répond à l'ordre donné, c'est à dire le troisiéme, si c'est le troisiéme ordre, le quatriéme, si c'est le quatriéme ordre &c; & ayant mis à la place de $n$ le nombre qui expose le quantiéme du nombre figuré, c'est à dire 4, s'il doit être le quatriéme, 5, s'il doit être le cinquiéme &c, on aura ce nombre. Qu'il faille, par exemple trouver le cinquiéme nombre du quatriéme ordre; je mets dans le quatriéme terme $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ de la suite à la place de $n$ le nombre 5, & j'ai 35 pour le nombre cherché.

Ceci n'est autre chose que l'application de la regle de l'article 468. à ce cas particulier.

### PROBLEME I.

473. SOIT *proposé de trouver une suite generale, qui exprime par ordre tous les termes d'un rang parallele quelconque, de la Table de la division des arcs de l'article 443.*

Comme le troiſiéme terme d'un rang perpendiculaire quelconque de cette Table, répond toûjours au premier du rang qui eſt à droit; il s'enſuit que ſi $m+1$ exprime en general l'expoſant du rang parallele, il faudra trouver dans le premier rang perpendiculaire, le coeficient du terme dont le quantiéme eſt $m+1$; dans le deuxiéme, le coeficient du terme dont le quantiéme eſt $m+1-2$ ou $m-1$; dans le troiſiéme, le coeficient du terme dont le quantiéme eſt $m-1-2$ ou $m-3$, & ainſi de ſuite en diminuant toûjours de 2 le quantiéme du terme, à meſure que le rang perpendiculaire avance vers la droite. Il faudra donc ſelon la regle de l'article 470. mettre dans le ſecond terme $\frac{n+1}{1}$ à la place de $n$ le nombre $m-1$; dans le troiſiéme terme $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$ à la place de $n$ le nombre $m-3$; dans le quatriéme terme $\frac{n+5}{3} \times \frac{n+1}{2}$ à la place de $n$ le nombre $m-5$; dans le cinquiéme $\frac{n+7}{4} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ à la place de $n$ le nombre $m-7$; &c : ce qui donnera pour la ſuite des coeficiens $1$, $m$, $\frac{m}{2} \times \frac{m-3}{1}$, $\frac{m}{3} \times \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2}$, $\frac{m}{4} \times \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3}$, &c. Or comme les ſignes des termes d'un rang parallele quelconque de la Table ſont toûjours alternatifs; & que le premier terme eſt toûjours l'inconnuë $x$ élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt moindre d'une unité que celui du rang parallele; & que tous les autres termes renferment des puiſſances de $x$ dont les expoſans diminuent continuellement de 2, en obſervant que $x^0 = 1$: il s'enſuit qu'on aura $x^m - mx^{m-2} + \frac{m}{2} \times \frac{m-3}{1} x^{m-4} - \frac{m}{3} \times \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} x^{m-6} + \frac{m}{4} \times \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} x^{m-8}$ &c. pour l'expreſſion generale du rang parallele de la Table, dont l'expoſant eſt $m+1$. Ce qui étoit propoſé.

Lorſqu'on a les premiers termes de ces ſortes de ſuites, il eſt facile d'obſerver la loy qui y regne par tout,

& qui ſert à les continuer autant que l'on veut. Si l'on ſuppoſe, par exemple, dans celle-ci, que $r$ exprime le quantiéme du terme dont on veut avoir le coeficient; il ſera exprimé par la fraction generale $\frac{m \times m - r \times m - r - 1 \times m - r - 2 \text{ \&c}}{r - 1 \times r - 2 \times r - 3 \times r - 4 \text{ \&c}}$, en obſervant que le numerateur & le dénominateur doivent avoir chacun autant de termes, que le nombre $r-1$ contient d'unités. Ainſi ſi $r=5$, on aura pour le coeficient du cinquiéme terme, la fraction $\frac{m \times m - 5 \times m - 6 \times m - 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$: ſi $r=4$, on aura $\frac{m \times m - 4 \times m - 5}{3 \times 2 \times 1}$.

Il faut remarquer que le nombre des termes de cette ſuite eſt toûjours déterminé, de ſorte qu'il eſt égal à la plus grande moitié de l'expoſant du rang parallele qu'elle exprime, lorſque cet expoſant eſt impair, & à ſa moitié au juſte lorſqu'il eſt pair. Ainſi elle n'a que trois termes, lorſqu'elle exprime le cinquiéme ou le ſixiéme rang parallele, elle n'en a que quatre, lorſqu'elle exprime le ſeptiéme ou le huitiéme rang parallele, &c.

## PROBLEME II.

474. SOIT *propoſé de trouver une ſuite generale, qui exprime par ordre tous les termes de tel rang parallele qu'on voudra, de la Table de l'inſcription des poligones reguliers de l'article* 457.

Comme le ſecond terme de chaque rang perpendiculaire répond au premier de celui qui eſt à droit, il
* *Art.* 458. s'enſuit * que ſi $m+1$ eſt l'expoſant d'un rang parallele quelconque de cette Table, les coeficiens des quatre premiers termes de ce rang ſeront 1, 1, $m-1$, $m-2$; le coeficient du cinquiéme terme ſera le nombre trian-
* *Art.* 472. gulaire dont le quantiéme eſt $m-3$, c'eſt à dire * $\frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2}$; celui du ſixiéme rang ſera le nombre triangulaire dont le quantiéme eſt $m-4$, c'eſt à dire $\frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2}$; celui du ſeptiéme terme ſera le nombre pira-

midal

midal dont le quantiéme est $m-5$, c'est à dire $\frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3}$; celui du huitiéme terme sera le nombre piramidal dont le quantiéme est $m-6$, c'est à dire $\frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3}$; celui du neuviéme terme sera le nombre du cinquiéme ordre dont le quantiéme est $m-7$, c'est à dire $\frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4}$; & ainsi à l'infini. Si donc l'on joint à ces coeficiens les puissances de $z$ qu'ils affectent, en faisant preceder le second & le troisiéme terme du signe $-$, le quatriéme & le cinquiéme du signe $+$, le sixiéme & le septiéme du signe $-$, & ainsi alternativement de deux en deux; on aura cette suite generale $z^m - z^{m-1} - \overline{m-1}\, z^{m-2} + \overline{m-2}\, z^{m-3} + \frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} z^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2} z^{m-5} - \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3} z^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} z^{m-7} + \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} z^{m-8}$ &c, qui exprime par ordre tous les termes du rang parallele de la Table de l'article 457 dont l'exposant est $m+1$ : où l'on doit observer de ne prendre qu'autant de termes que le nombre $m+1$ contient d'unités.

## PROBLESME III.

475. TROUVER *une suite generale, qui exprime par ordre, les coeficiens de tous les termes, de tel rang parallele qu'on voudra, de la Table de l'article 460; ou (ce qui est la même chose) d'une puissance quelconque du binome* $x+y$.

Soit en general $m$ l'exposant d'un rang parallele quelconque de cette Table, il est clair que les coeficiens des deux premiers termes de ce rang seront toujours * 1, $m$; & comme le second terme de chaque rang perpendiculaire à commencer par le second, répond au premier terme du rang qui est à droit, il s'ensuit que le coeficient du troisiéme terme du rang parallele sera * * *Art.* 462. * *Art.* 462.

le nombre triangulaire dont le quantiéme est $m-1$, c'est à dire * $\frac{m-1}{1} \times \frac{m}{2}$; que celui du quatriéme terme sera le nombre piramidal dont le quantiéme est $m-2$, c'est à dire $\frac{m-2}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m}{3}$; que celui du cinquiéme terme sera le nombre du cinquiéme ordre dont le quantiéme est $m-3$, c'est à dire $\frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} \times \frac{m-1}{3} \times \frac{m}{4}$; & ainsi à l'infini. On aura donc pour la suite generale qu'on demande $1, m, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

*Art. 472.

## COROLLAIRE.

476. **D**E LA il suit que $\overline{x \mp y}^{m} = x^m \mp \frac{m}{1} y x^{m-1} + \frac{m \times \overline{m-1}}{1 \times 2} yy x^{m-2} \mp \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{m-3} \ldots + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{m-4} \mp \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5 x^{m-5}$ &c.

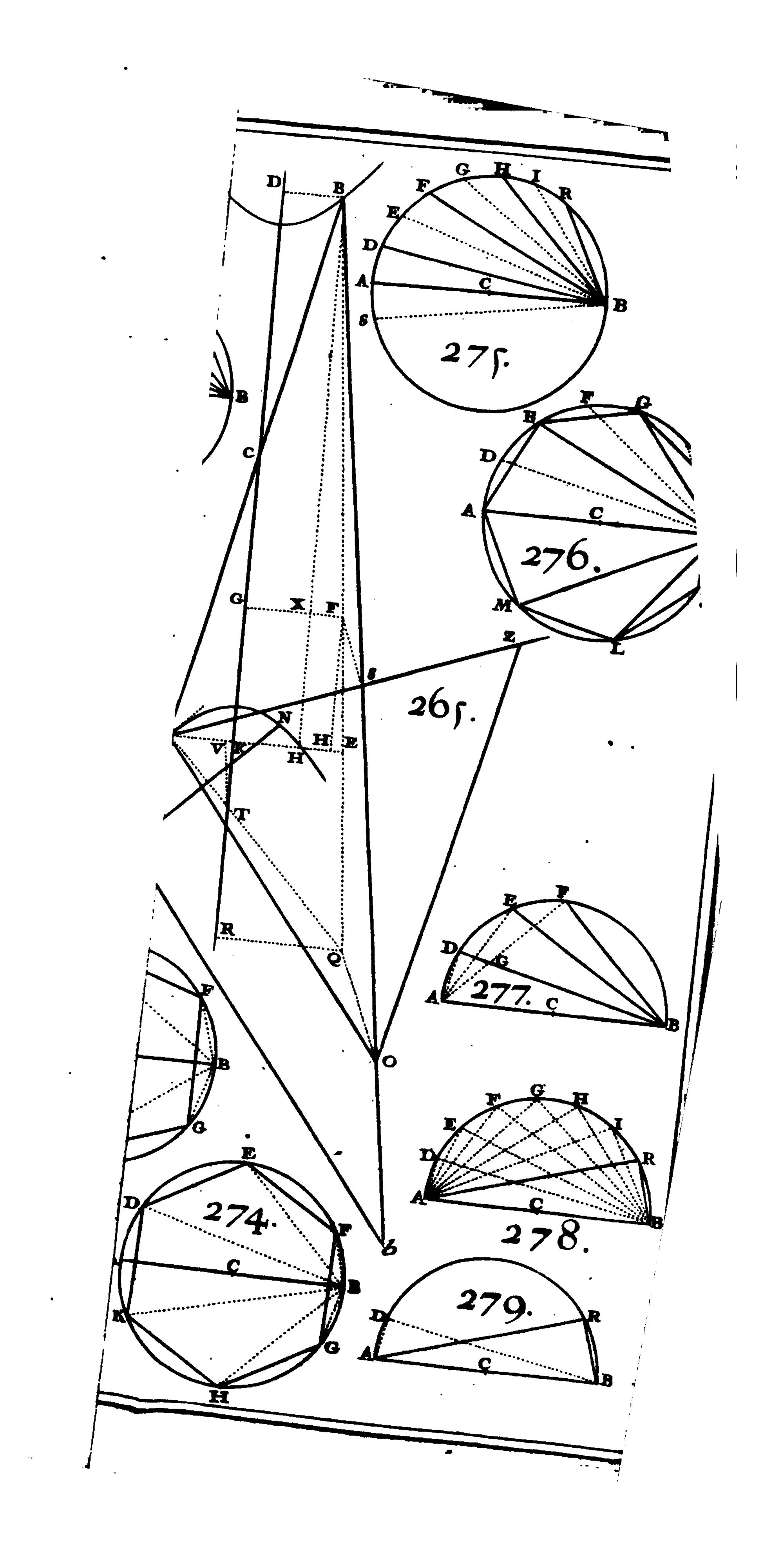
## PROBLESME IV.

477. **T**ROUVER *une équation generale qui serve à diviser un arc de cercle donné* AR, *en autant de partie égales qu'on voudra.*

### PREMIERE MANIERE.

FIG. 279. Soit en general $m$ le nombre des parties égales, l'arc $AD$ la premiere de ces parties; soit tiré le diametre $AB$; & les cordes $BD$, $BR$; & soit le rayon $CA$ ou $CB = 1$; la corde donnée $BR = a$, la corde cherchée

*Art. 444. 473. $BD = x$. On aura * $\mp a = x^m - m x^{m-2} + \frac{m \times \overline{m-3}}{2 \times 1} x^{m-4} - \frac{m \times \overline{m-5} \times \overline{m-4}}{3 \times 1 \times 2} x^{m-6} + \frac{m \times \overline{m-7} \times \overline{m-6} \times \overline{m-5}}{4 \times 1 \times 2 \times 3} x^{m-8}$ &c, ( sçavoir $+a$ lorsque l'arc donné $AR$ est moindre que la demie circonference, & $-a$ lorsqu'il est plus grand


275.
276.
265.
277.
278.
279.
274.

pour l'équation generale qu'on demande ; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes, que la moitié du nombre $m$ lorsqu'il est pair, ou sa plus grande moitié lorsqu'il est impair contient d'unités ; parce que le terme qui suivroit seroit nul ou zero.

Si $m = 5$, il vient $\pm a = x^5 - 5x^3 + 5x$; si $m = 7$, on trouve $\mp a = x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$.

## SECONDE MANIERE.

Soit tiré le diametre $AB$, & les cordes $BR$, $AR$, $BD$, $AD$, qui terminent l'arc donné $AR$, & l'arc cherché $AD$. Soit $m$ le nombre des parties égales, le diametre $AB = 1$, les cordes données $BR = a$, $AR = b$; & les cordes inconnuës $BD = x$, $AD = y$. On aura * ces deux égalités generales $\mp a = x^m$ — * Art. 463. 475.
$- \frac{m \times m - 1}{1 \times 2} yyx^{m-2} + \frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{m-4}$ &c, $b = \frac{m}{1} yx^{m-1} - \frac{m \times m - 1 \times m - 2}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{m-3} + \ldots \frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3 \times m - 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5 x^{m-5}$ &c, dans lesquelles mettant à la place de $m$, le nombre de parties égales dans lesquelles l'arc $AR$ doit être divisé, il en vient deux autres particulieres, dont la resolution fournit la valeur cherchée de la corde $BD\,(x)$ ou $AD\,(y)$, aprés avoir fait évanoüir l'inconnuë $y$ ou $x$, par le moyen de l'équation $yy = 1 - xx$ ou $xx = 1 - yy$.

Soit par exemple $m = 7$. On aura $\mp a = x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$, & $b = 7yx^6 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - y^7$, & l'on achevera le reste comme dans l'article 462.

## PROBLESME V.

478. TROUVER *une équation generale, qui serve à inscrire dans un cercle donné, un poligone regulier quelconque* ADEFGHK &c. FIG. 280.

Soit tiré le diametre $AB$, & la corde $BD$ qui terminent le premier côté du poligone ; soit le rayon

donné $CA$ ou $CB = 1$, la corde inconnuë $BD = z$, & en general $m$ la plus petite moitié du nombre des côtés du poligone, que je suppose être impair. On

* Art. 457. 474. aura * $o = z^m - z^{m-1} - \overline{m-1}\, z^{m-2} + \overline{m-2}\, z^{m-3} + \frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2}\, z^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2}\, z^{m-5} - \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3}\, z^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3}\, z^{m-7} + \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4}\, z^{m-8}$ &c, pour l'équation generale qu'on demande; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes que le nombre $m+1$ contient d'unités, parce que celui qui suivroit seroit nul ou zero.

Soit par exemple 7 le nombre des côtés du poligone à inscrire, on aura $m = 3$; & partant $o = z^3 - zz - 2z + 1$, dont la plus grande racine $z$ exprimera la corde $BD$, qui termine l'arc $AD$, qui a pour corde le premier côté $AD$ du poligone. De même si le nombre des côtés est 11, on aura $m = 5$; & par consequent l'équation generale devient $o = z^5 - z^4 - 4z^3 + 3zz + 3z - 1$, dont la plus grande des racines est $z = BD$.

## PROBLESME VI.

FIG. 281. 282. 479. DIVISER *un angle donné en un nombre quelconque impair de parties égales, par le moyen d'un instrument.*

1°. Soit proposé de diviser l'angle donné $ECF$ en trois parties égales. Il faut avoir un rhombe $ABCD$, dont les quatre côtés soient mobiles autour de ses quatre angles, & duquel les deux côtés $AB$, $AD$, soient indéfiniment prolongés vers $X$ & $Z$; attacher l'angle $C$ du rhombe, dans le sommet $C$ de l'angle donné $ECF$; marquer sur les côtés $CE$, $CF$, les points $E$, $F$, en sorte que $CE$ & $CF$ soient égales chacune au côté $CB$ ou $CD$ ou $DA$ ou $AB$ du rhombe. Cela fait, il faut ouvrir ou resserrer les côtés $AX$, $AZ$, de l'angle $BAD$, en sorte qu'ils passent par les points $E$, $F$; &

l'angle $BAD$ sera la troisiéme partie de l'angle $ECF$.

Car les triangles $ABC$, $BCE$, étant isoscelles, l'angle externe $CBE$ ou son égal $CEB$, qui vaut les deux internes opposés $BAC$, $BCA$, sera double de l'angle $BAC$; & dans le triangle $ECA$, l'angle externe $ECY$, qui vaut l'angle $CEA$ plus l'angle $BAC$, sera triple de l'angle $BAC$. On démontrera de même que l'angle $FCY$ est triple de l'angle $DAC$. D'où il suit que l'angle donné $ECF$ est triple de l'angle $BAD$. *Ce qu'il falloit &c.*

2°. Soit proposé de diviser l'angle donné $HGK$, en cinq parties égales. On attachera dans l'angle $C$ du rhombe $ABCD$ de l'instrument précedent, un autre rhombe $CEGF$, dont les côtés seront égaux à ceux du premier & mobiles aussi autour de leurs angles. On fichera l'angle $G$ de ce dernier rhombe, dans le sommet $G$ de l'angle donné $HGK$; & ayant pris sur les côtés de cet angle les parties $GH$, $GK$, égales chacune au côté $GE$ de l'un des rhombes, on ouvrira ou fermera l'angle $XAZ$ mobile autour du point $A$, en sorte que ses côtés $AX$, $AZ$, touchent les angles $E$, $F$, & passent en même temps par les points marqués $H$, $K$. Je dis que l'angle $XAZ$ ou $BAD$ sera la cinquiéme partie cherchée de l'angle donné $HGK$. Fig. 284.

Car ayant mené dans le rhombe $ABCD$ la diagonale $AC$, prolongée indéfiniment vers $Y$; elle passera par le point $G$, puisque les angles $ECY$, $FCY$, étant triples des angles égaux $BAC$, $DAC$, seront aussi égaux entr'eux. Or dans le triangle $EGA$, l'angle externe $HEG$, qui vaut les deux internes opposés $BAC$, $EGA$, ou $ECY$ (à cause du triangle isoscelle $CEG$) sera quadruple de l'angle $BAC$. Et partant dans le triangle $AHG$, l'angle externe $HGY$, qui vaut les deux internes opposés $BAC$, $GHA$ ou $GEH$ (à cause du triangle isoscelle $EGH$) sera le quintuple de l'angle $BAC$. On prouvera de même que l'angle $KGY$ sera quintuple de l'angle $DAC$; d'où il est évident

que l'angle entier *HGK* ſera quintuple de l'angle entier *BAD* ou *XAZ*.

S'il falloit diviſer un angle donné en ſept parties égales, il n'y aura qu'à joindre aux deux rhombes précedens, un troiſiéme rhombe égal & conſtruit de la même maniere ; & ainſi de ſuite de deux en deux. Car la pratique & la démonſtration ſe fera toûjours de la même maniere.

EXEMPLE.

480. TROUVER entre deux lignes données $a$ & $b$, autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra.

Soit l'inconnuë $x$ la premiere des moyennes proportionnelles qu'il eſt queſtion de trouver ; & l'on aura la progreſſion geometrique continuë $a, x, \frac{xx}{a}, \frac{x^3}{aa}, \frac{x^4}{a^3}, \frac{x^5}{a^4}$ &c, de laquelle on prendra le terme dont le quantiéme ſurpaſſe de 2 le nombre donné des moyennes proportionnelles, & l'égalant à la donnée $b$ on formera une égalité, dont la reſolution fournira la valeur de l'inconnuë $x$ qui eſt la premiere des moyennes proportionelles que l'on cherche.

Qu'il faille, par exemple, trouver deux moyennes proportionnelles. On prendra dans la progreſſion geometrique le quatriéme terme $\frac{x^3}{aa}$, qui étant égalé à la ligne $b$, donne $x^3 = aab$ ; & de même ſi l'on demande quatre moyennes proportionnelles, l'on aura $x^5 = a^4b$. D'où il eſt facile de voir que ſi $n$ marque en general le nombre des moyennes proportionnelles qu'il faut trouver entre les données $a$ & $b$, on aura $x^{n+1} = a^nb$ pour l'égalité generale qu'il faut reſoudre. Or cela poſé.

Soit 1°. $x^{17} = a^{16}b$ qui ſert à trouver ſeize moyennes proportionnelles. Je multiplie les deux membres de cette égalité par $x^3$, afin d'avoir $x^{20} = a^{16}bx^3$, dont la plus haute dimenſion 20 eſt le produit des deux nombres 4 & 5 qui ſe ſuivent immediatement. Je prends l'é-

quation $x^5 = a^4 y$; ce qui donne en élevant chaque membre à la puissance quatriéme $x^{20} = a^{16} y^4 = a^{16} b x^3$, d'où je tire une autre équation $y^4 = b x^3$, dont le lieu étant construit séparément, donnera par son intersection avec celui de la supposée $x^5 = a^4 y$, la valeur de l'inconnuë $x$. Ou bien je prends l'équation $x^4 = a^3 y$, dont j'éleve chaque membre à la quatriéme puissance; & les multipliant ensuite par $x$, j'ai $x^{17} = a^{12} y^4 x = a^{16} b$, d'où je tire $y^4 x = a^4 b$, dont le lieu étant construit séparément avec celui de l'équation $x^4 = a^3 y$, donnera par son intersection la valeur cherchée de l'inconnuë $x$.

Soit 2°. $x^{31} = a^{30} b$ qui sert à trouver trente moyennes proportionnelles. Je multiplie de part & d'autre par $x^5$, afin d'avoir $x^{36} = a^{30} b x^5$, dont la plus haute dimension 36 est le quarré de 6: c'est pourquoi faisant $x^6 = a^5 y$, & prenant de part & d'autre la sixiéme puissance, j'ai $x^{36} = a^{30} y^6 = a^{30} b^5$, d'où je tire $x^6 = b y^5$, dont le lieu étant construit séparément avec celui de l'équation que j'ai prise d'abord $x^6 = a^5 y$, donnera par son intersection la valeur de l'inconnuë $x$. Ou bien ayant pris comme ci-dessus l'équation $x^6 = a^5 y$, je l'éleve à la cinquiéme puissance, & la multipliant ensuite par $x$, j'ai $x^{31} = a^{25} y^5 x = a^{30} b$, ce qui donne $y^5 x = a^5 b$. D'où l'on voit que le lieu de l'équation $x^6 = a^5 y$, étant construit séparément avec le lieu de l'autre équation $y^5 x = a^5 b$, donnera la resolution de l'égalité proposée $x^{31} = a^{30} b$; de sorte que l'on peut choisir entre les deux lieux $y^6 = b x^5$, ou $y^5 x = a^5 b$, celui qu'on jugera le plus simple. Il en est ainsi de tous les autres exemples qu'on peut se former à plaisir.

Il est à remarquer que si la dimension de l'inconnuë $x$ n'étoit pas un nombre premier, l'égalité proposée se pourroit toûjours abaisser. Si l'on avoit, par exemple, $x^9 = a^8 b$, qui sert à trouver huit moyennes proportionnelles; on trouveroit en extrayant de part & d'autre la racine cubique $x^3 = \sqrt[3]{a^8 b}$. Or afin que le nombre $a^8 b$ soit un cube, il n'y a qu'à trouver une ligne $z$ dont le

cube $z^3=aab$, ou ce qui eſt la même choſe de trouver entre $a$ & $b$ deux moyennes proportionnelles; car mettant à la place de $aab$ ſa valeur $z^3$, on aura $x^9=a^6z^3$ ou $x^3=a^2z$, de ſorte qu'en reſolvant ces deux égalités $z^3=aab$, & enſuite $x^3=aaz$ qui ne ſont que du troiſiéme degré, on trouvera la valeur de l'inconuë $x$, qui eſt la premiere des huit moyennes proportionnelles entre les extrêmes $a$ & $b$. De même ſi l'on avoit $x^{14}=a^{13}b$ qui ſert à trouver treize moyennes proportionnelles, il viendroit en extrayant de part & d'autre la racine quarrée $x^7=\sqrt{a^{13}b}$. Or afin que $\sqrt{a^{13}b}$ ſoit un quarré, il faut trouver une ligne $z$ dont le quarré $zz=ab$; car ſubſtituant à la place de $ab$, le quarré $zz$ dans l'égalité propoſée, on aura $x^{14}=a^{12}zz$ ou $x^7=a^6z$; c'eſt pourquoi il n'y aura qu'à reſoudre d'abord l'égalité du ſecond degré $zz=ab$, & enſuite celle du ſeptiéme $x^7=a^6z$.

On doit encore remarquer que ces ſortes d'égalités qui ſervent à trouver des moyennes proportionnelles, & dont la dimenſion de l'inconnuë eſt un nombre premier, n'ont qu'une racine réelle & toutes les autres imaginaires; dont la raiſon eſt qu'il ne peut y avoir qu'une ſeule ligne qui ſoit la premiere des moyennes proportionnelles cherchées.

## REMARQUE.

FIG. 285. 481. ON peut reſoudre le Problême précedent par le moyen d'un inſtrument geometrique dont la conſtruction eſt telle. Soient deux lignes indéfinies $XY$, $YZ$, mobiles autour du point $Y$, en ſorte qu'elles ſe puiſſent ouvrir & fermer. Soit attachée à un point quelconque fixe $B$ du côté $YX$, une perpendiculaire indéfinie $BC$ ſur ce côté, laquelle chaſſe devant elle (pendant que l'angle $XYZ$ s'ouvre) par le point $C$ où elle rencontre l'autre côté $YZ$, la perpendiculaire indéfinie $CD$ ſur ce dernier côté; qui chaſſe de même

par

par le point *D* où elle rencontre le côté *YX*, la perpendiculaire indéfinie *DE*; qui chasse encore de même par le point *E* où elle rencontre le côté *YZ*, la perpendiculaire indéfinie *EF*; qui chassera par le point *F* où elle rencontre le côté *YX*, la perpendiculaire *FG*; qui chasse encore par le point *G* où elle rencontre le côté *YZ*, la perpendiculaire *GH*; & ainsi de suite à l'infini, en augmentant autant que l'on voudra le nombre des perpendiculaires sur les côtés *YX* & *YZ*. Cela fait, soit proposé, par exemple, de trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux lignes droites données *a* & *b*. Ayant pris sur le côté *YZ* la partie *YG* quatriéme proportionnelle aux trois lignes *a*, *b*, *YB*, on ouvrira le côté *XY* de l'instrument, jusqu'à ce que la cinquiéme perpendiculaire *FG* (parce qu'il est question de trouver quatre moyennes proportionnelles) passe par le point *G*; & alors les lignes *YC*, *YD*, *YE*, *YF*, seront les quatre moyennes proportionnelles entre les extrêmes *YB*, *YG*; & partant la quatriéme proportionnelle aux trois lignes *YB*, *YC*, *a* sera la premiere des quatre moyennes proportionnelles demandées.

Car les triangles rectangles *YBC*, *YCD*, *YDE*, *YEF*, *YFG*, étant tous semblables; leurs côtés *YB*, *YC*, *YD*, *YE*, *YF*, *YG*, seront en progression geometrique continuë. Donc &c.

Il est clair que pendant que l'angle *XYZ* s'ouvre de plus en plus, le point *B* décrit un arc de cercle *AB*; & que les intersections continuelles *D*, *F*, *H*, des perpendiculaires *CD*, *EF*, *GH*, sur le côté *YZ*, avec l'autre côté *YX*, décrivent des lignes courbes *AD*, *AF*, *AH*, qui servent à trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra. Car si l'on décrit, par exemple, du diametre *YE* un demi cercle, il coupera la courbe *AD* en un point *D*, tel que *YD* est la seconde des deux moyennes proportionnelles, entre les ex-

trêmes *YB* ou *YA* & *YE*; & de même si l'on décrit un demi cercle du diametre *YG*, il coupera la ligne courbe *AF* en un point *F*, tel que *YF* est la derniere des quatre moyennes proportionnelles entre *YA* & *YG* &c. Sur quoi il est à propos de remarquer que la ligne courbe *AD* est du quatriéme degré; la ligne courbe *AF* du huitiéme; la courbe *AH* du seiziéme &c; ce que je prouve ainsi.

Soient 1° les inconnuës & indéterminées $YC = x$, $CD = y$, $YD = z$, & la connuë *YA* ou $YB = a$, on aura à cause des triangles rectangles semblables *YCD*, *YBC*, cette équation $YB\ (a) = \frac{xx}{z}$, & à cause du triangle rectangle *YCD* cette autre $yy + xx = zz$, dans laquelle mettant à la place de $z$ sa valeur $\frac{xx}{a}$ trouvée par le moyen de la premiere équation, il vient $aayy = x^4 - aaxx$; ce qui fait voir que la courbe *AD* est un lieu du quatriéme degré. Soient 2° les inconnuës & indéterminées $YE = x$, $EF = y$, $YF = z$, & la connuë *YA* ou $YB = a$; on aura à cause des triangles rectangles semblables *YFE*, *YED*, *YDC*, *YCB*, cette équation $YB\ (a) = \frac{x^4}{z^3}$, & à cause du triangle rectangle *YEF* cette autre $yy + xx = zz$, dans laquelle faisant évanoüir l'inconnuë $z$ par le moyen de la premiere équation, & ôtant les incommensurables, on trouve $aay^6 + 3aaxxy^4 + 3aax^4yy + aax^6 = x^8$; d'où l'on voit que la courbe *AF* est un lieu du huitiéme degré. On prouvera de même que la courbe *AH* est un lieu du seiziéme degré &c.

Maintenant puisque selon l'exemple on peut trouver deux moyennes proportionnelles, en n'employant que deux lignes du second degré; quatre moyennes proportionnelles, en se servant d'un lieu du second degré, & d'un autre du troisiéme; au lieu qu'ici il faut dans le premier cas un lieu du quatriéme, qui

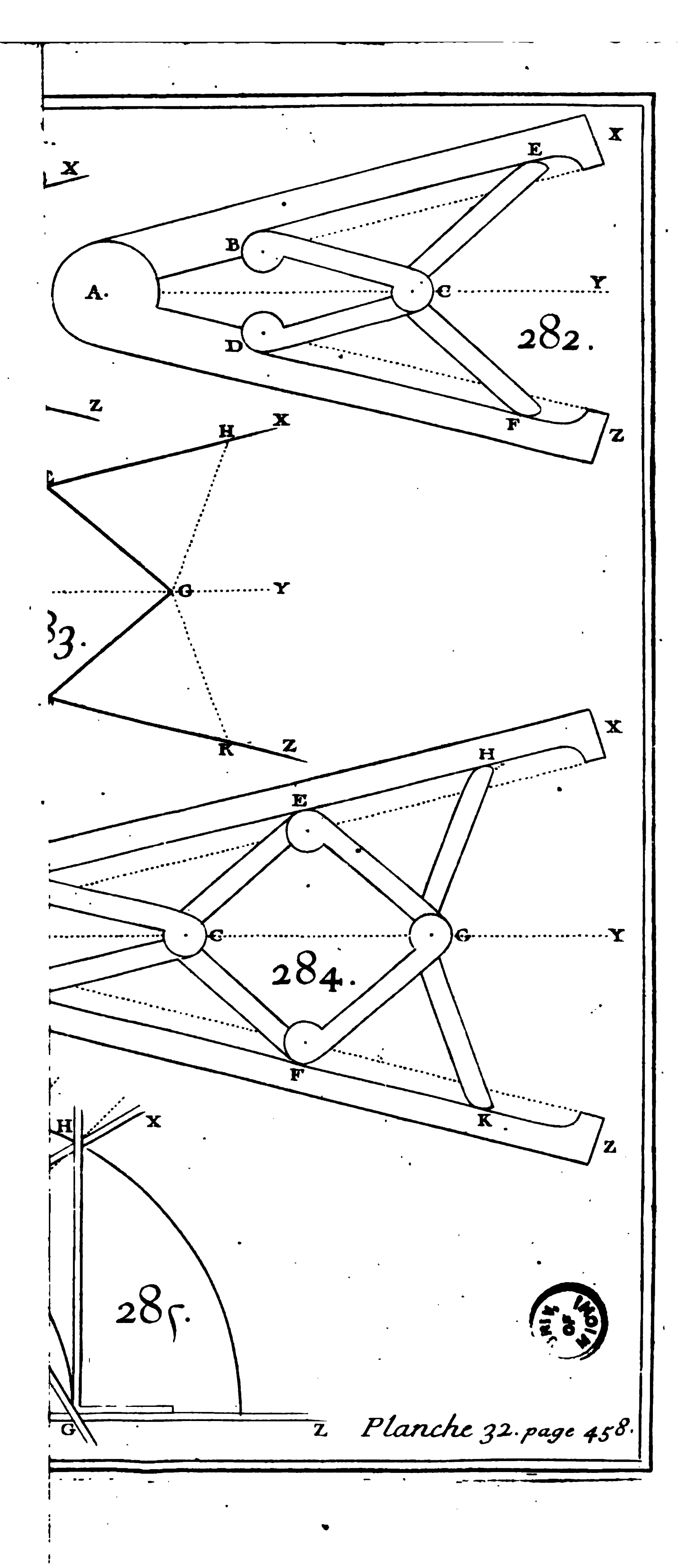


Planche 32. page 458.

est la ligne *AD*, & un lieu du second qui est le cercle *YDE*; & dans le second un lieu du huitiéme, sçavoir; la ligne courbe *AF*; & un lieu du second, sçavoir le cercle *YFG*: il s'ensuit que ces lignes courbes *AD*, *AF*, *AH*, sont beaucoup trop composées pour resoudre ce Problême. Cependant la facilité de la construction, & de la démonstration, récompense en quelque sorte ce deffaut.

FIN.

---

## *FAUTES A CORRIGER.*

P*Age* 137, *à la marge de l'Art.* 204, *au lieu de* FIG. 100. 111. *lisez*, FIG. 110. 111.

*Pag*. 148, *lig*. 9, *au lieu de* CL, *lisez*, CK.

*Pag*. 215, *lig. dern.* lignes, *lisez*, signes.

*Pag*. 263, *lig*. 1, *au lieu de* EXEMPLE II. *lisez*, EXEMPLE VI.

*Pag*. 264, *vis à vis de la lig*. 14, *à la marge*, *au lieu de*, Art. 287, *lisez*, Art. 237.

*Pag*. 293, *sur la fin*, COROLLAIRE, *lisez*, COROLLAIRE II.

*Pag*. 320, *lig*. 2, *au lieu de*, 389, *lisez*, 398.

*Pag*. 321, *lig*. 16, construire, *lisez*, trouver.

*Pag*. 348, *au lieu de*, FIG. 334. *lisez*, FIG. 234.

## *PRIVILE*[redacted]*DU ROY.*

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amez & feaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Senechaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra: SALUT. Nôtre Academie Royale des Sciences Nous ayant trés-humblement fait exposer, que depuis qu'il Nous a plû luy donner par un Reglement nouveau de nouvelles marques de nôtre affection, Elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les Sciences qui font l'objet de ses exercices; ensorte qu'outre les Ouvrages qu'Elle a déja donnez au public, Elle seroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaisoit luy accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous luy avons accordées en datte du 6. Avril 1699. n'ayant point de tems limité, ont été déclarées nulles par un Arrest de nôtre Conseil d'Etat du 13. du mois d'Aoust dernier. Et desirant donner à ladite Academie en corps, & en particulier à chacun de ceux qui la composent, toutes les facilitez & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs travaux utiles au public; Nous avons permis & permettons par ces Presentes à ladite Academie, de faire imprimer, vendre & debiter dans tous les lieux de nôtre obéïssance, par tel Imprimeur qu'Elle voudra choisir, en telle forme, marge, caractere, & autant de fois que bon luy semblera: *Toutes les Recherches ou Observations journalieres, & Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans ses Assemblées de l'Academie Royale des Sciences;* comme aussi *les Ouvrages, Memoires ou Traitez de chacun des particuliers qui la composent,* & generalement tout ce que ladite Academie voudra faire paroître sous son nom, lorsqu'aprés avoir examiné & approuvé lesdits Ouvrages aux termes de l'article xxx. dudit Reglement, elle les jugera dignes d'être imprimez: & ce pendant le tems de dix années consecutives, à compter du jour de la datte desdites Presentes. Faisons trés-expresses deffenses à tous Imprimeurs, Libraires, & à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition que ce soit, d'imprimer, faire imprimer en tout ni en partie, aucun des Ouvrages imprimez par l'Imprimeur de ladite Academie; comme aussi d'en introduire, vendre & debiter d'impression étrangere dans nôtre Royaume sans le consentement par écrit de ladite Academie ou de ses ayans cause, à peine contre chacun des contrevenans de confiscation des Exemplaires contrefaits au profit de son-

